

Trigonométrie :

Cercle trigonométrique

Définition : Soit un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle cercle trigonométrique, le cercle de centre O et de rayon 1.

Le point I de coordonnées $(0 ; 1)$ est appelé origine du cercle.

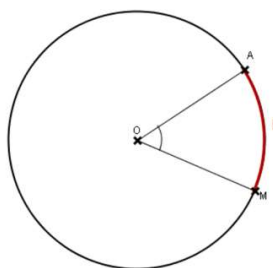
Le sens trigonométrique (sens positif) du cercle est le sens contraire de celui de la rotation des aiguilles d'une montre.

Mesure en radian

Définition : On appelle mesure en radian d'un angle θ dans le sens trigonométrique, la longueur de l'arc de cercle trigonométrique associé, et dans le sens trigonométrique contraire, l'opposé de la mesure de l'arc associé. Cette mesure s'exprime en fonction de π .

Pour un point quelconque du cercle trigonométrique, soit un angle θ donné, il existe une unique mesure de cet angle, exprimée en radian, dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ et cette mesure est appelée mesure principale de l'angle θ .

Remarque : Le radian est, comme le degré ou le grade, une unité de mesure d'angle. Elle est définie de la manière suivante : Soient A et M deux points d'un cercle de centre O et de rayon r . On désigne l la longueur de l'arc de cercle AM . La mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$ est le réel l/r .

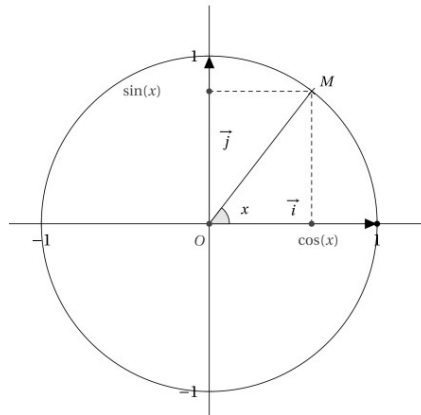


En particulier, un angle de 1 radian intercepte un arc de longueur r . Un angle droit mesure lui $\pi/2$ radians (un quart de la longueur totale du cercle).

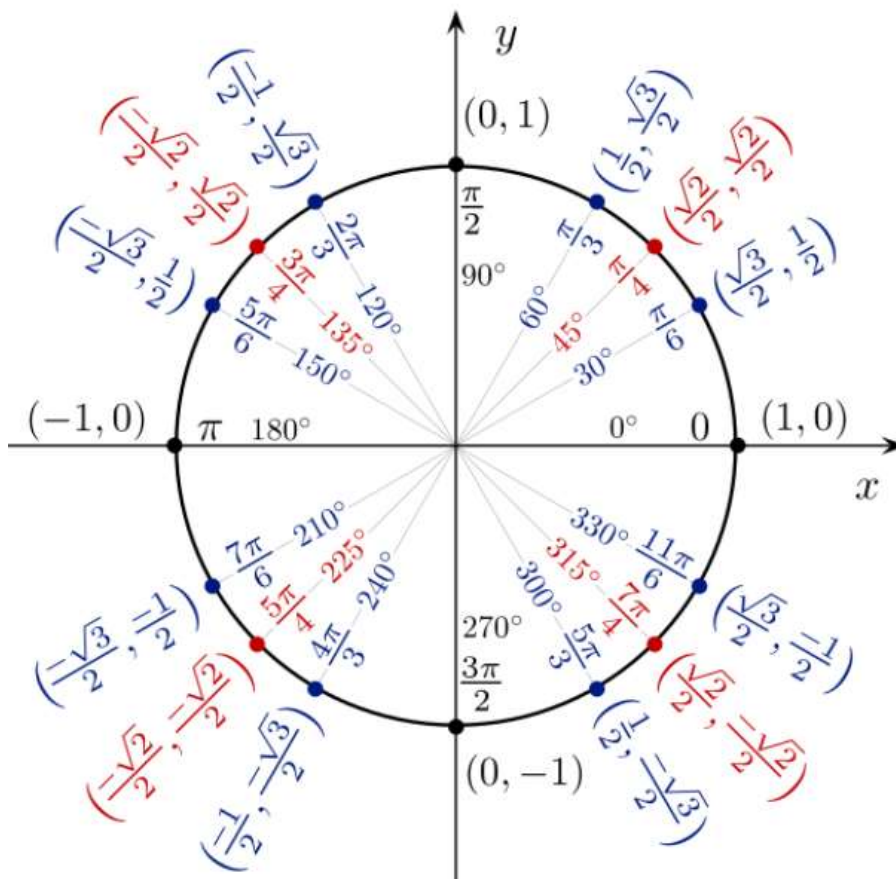
Cosinus et sinus

Définition : Soit le cercle trigonométrique et un angle x , exprimé en radian, repéré sur le cercle trigonométrique et associé au point M . On appelle cosinus de l'angle x , noté $\cos(x)$, l'abscisse du point M et sinus de l'angle x noté $\sin(x)$, l'ordonnée du point M .

On a $(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) = x$ et $M(\cos(x); \sin(x))$



Les valeurs remarquables :



Formules du sinus et cosinus à connaître :

Propriétés : Soit x un nombre réel quelconque.

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \text{ et } -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \text{ (Pythagore)}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin^2(x) = \frac{\tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}$$

$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ La fonction cosinus est périodique de période 2π .

$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ La fonction sinus est périodique de période 2π .

$\cos(-x) = \cos(x)$ La fonction cosinus est paire.

$\sin(-x) = -\sin(x)$ La fonction sinus est impaire.

$\tan(-x) = -\tan(x)$ La fonction tangente est impaire.

$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

$\tan(x + \pi) = \tan(x)$ (angles opposés supplémentaires)

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

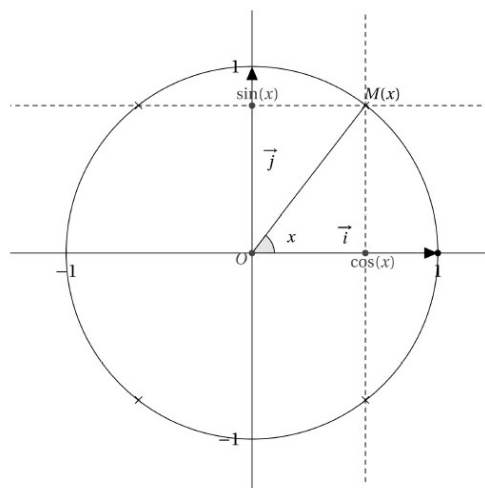
$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$ (angles supplémentaires)

$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

$\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$ (angles opposés complémentaires)

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$ (angles complémentaires)



$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin(x) \text{ et } \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos(x)$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin(x) \text{ et } \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos(x)$$

$$\tan\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$$

Equations trigonométriques :

- $\sin(a) = \sin(b)$ alors $a = b + 2k\pi$ ou $a = \pi - b + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$)
- $\cos(a) = \cos(b)$ alors $a = b + 2k\pi$ ou $a = -b + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$)
- $\tan(a) = \tan(b)$ alors $a = b + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$)

Formules d'addition :

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\tan(a) + \tan(b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$$

$$\tan(a) - \tan(b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a)\cos(b)}$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

Formules de duplication :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$

$$\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a) = \frac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)}$$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

$$\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\tan^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{1 + \cos(2a)}$$

$$\tan(a) = \frac{\sin(2a)}{1 + \cos(2a)} = \frac{1 - \cos(2a)}{\sin(2a)}$$

Posons $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$, il vient :

$$\sin(a) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Formule de Moivre : (voir le chapitre des nombres complexes)

$$(\cos(a) + i\sin(a))^n = \cos(na) + i\sin(na)$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

Formule d'Euler : (voir le chapitre des nombres complexes)

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$