

Enoncé : Trigonométrie : Autre démonstration formules d'addition

Soient a et b des réels. Démontrer les formules d'addition suivantes :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$$

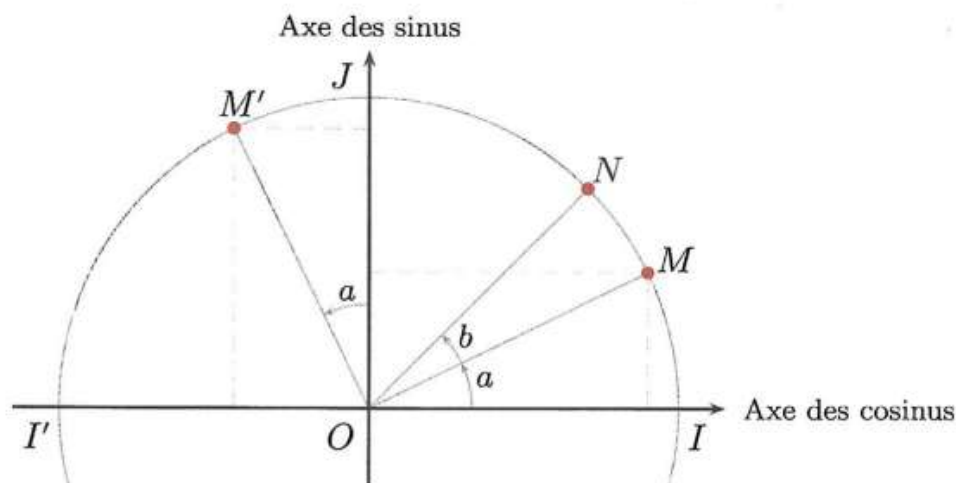
On pourra s'intéresser aux coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ON}$ (voir figure ci-dessous) dans les repères orthonormés $(O; I, J)$ et $(O; M, M')$.

Application - Étudier la parité des fonctions cos et sin.

En déduire : $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$$

Solution :



Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormé direct $(O; I, J)$.

Notons respectivement M et N les points de $\mathcal{C}$ tels que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = a$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}) = a + b$. Notons M' le point de $\mathcal{C}$ tel que le repère $(O; M, M')$ soit orthonormé direct.

Dans le repère $(O; I, J)$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont $(\cos(a), \sin(a))$:

$$\overrightarrow{OM} = \cos(a) \overrightarrow{OI} + \sin(a) \overrightarrow{OJ} \quad (*)$$

Dans le repère $(O; J, I')$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM'}$ sont $(\cos(a), \sin(a))$:

$$\overrightarrow{OM'} = \cos(a) \overrightarrow{OJ} + \sin(a) \overrightarrow{OI'}$$

Or $\overrightarrow{OI'} = -\overrightarrow{OI}$: $\overrightarrow{OM'} = -\sin(a)\overrightarrow{OI} + \cos(a)\overrightarrow{OJ}$ (**)

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM'}$ dans le repère $(O; I, J)$ sont donc $(-\sin(a), \cos(a))$.

Enfin, exprimons de deux façons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ON}$.

Dans le repère $(O; I, J)$, on a : $\overrightarrow{ON} = \cos(a+b)\overrightarrow{OI} + \sin(a+b)\overrightarrow{OJ}$

Dans le repère $(O; M, M')$, on a : $\overrightarrow{ON} = \cos(b)\overrightarrow{OM} + \sin(b)\overrightarrow{OM'}$

Tenant compte de (*) et (**) en réinjectant les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ précédentes :

$$\overrightarrow{ON} = \cos(b) \left(\cos(a)\overrightarrow{OI} + \sin(a)\overrightarrow{OJ} \right) + \sin(b) \left(-\sin(a)\overrightarrow{OI} + \cos(a)\overrightarrow{OJ} \right)$$

$$\overrightarrow{ON} = (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))\overrightarrow{OI} + (\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b))\overrightarrow{OJ}$$

Et par unicité des coordonnées d'un vecteur dans un repère, on obtient bien :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{aligned}$$

On a obtenu les premières formules d'addition.

Application - En spécialisant ces formules avec $b = -a$ on obtient :

$$1 = \cos(a)\cos(-a) - \sin(a)\sin(-a) \quad \text{et} \quad 0 = \sin(a)\cos(-a) + \cos(a)\sin(-a)$$

En multipliant la première formule par $\cos(a)$ et la seconde par $\sin(a)$:

$$\begin{aligned} \cos(a) &= (\cos(a))^2 \cos(-a) - \cos(a)\sin(a)\sin(-a) \quad \text{et} \\ 0 &= (\sin(a))^2 \cos(-a) + \cos(a)\sin(a)\sin(-a) \end{aligned}$$

Et en ajoutant ces deux égalités :

$$\cos(a) = \left((\cos(a))^2 + (\sin(a))^2 \right) \cos(-a) = \cos(-a)$$

Ceci étant valable pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a prouvé que la fonction cosinus est paire.

De même, en multipliant la première formule par $\sin(a)$ et la deuxième par $\cos(a)$:

$$\begin{aligned} \sin(a) &= \sin(a)\cos(a)\cos(-a) - (\sin(a))^2 \sin(-a) \quad \text{et} \\ 0 &= \cos(a)\sin(a)\cos(-a) + (\cos(a))^2 \sin(-a) \end{aligned}$$

Et en retranchant ces deux égalités (la deuxième moins la première) :

$$-\sin(a) = \left((\cos(a))^2 + (\sin(a))^2 \right) \sin(-a) = \sin(-a)$$

Ce qui prouve que la fonction sinus est impaire sur $\mathbb{R}$.

En substituant maintenant $-b$ à b dans les formules d'addition, on obtient, via la parité des fonctions sinus et cosinus, les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \end{aligned}$$