

A

ABEL *Niels Henrik* (1802–1829)
(Mathématicien norvégien)

Lemme d'Abel sur le rayon Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et soit $\rho > 0$. Si la suite de terme général $a_n \rho^n$ est bornée, alors

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| < \rho \implies a_n z^n = O\left(\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n\right).$$

En particulier, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente sur le disque ouvert de convergence $B(0; \rho)$.

RAYON, DISQUE DE CONVERGENCE.

Théorème de convergence radiale d'Abel Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et de somme f . Si $\sum a_n R^n$ converge, alors

$$\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

REMARQUE : Ce théorème s'étend à la variable complexe. Si $z_0 = R e^{i\theta}$ est un point du cercle de convergence, et si $\sum a_n z_0^n$ converge, alors la série converge uniformément sur tout domaine inclus dans le domaine ouvert de convergence et de la forme ci-dessous, où $0 < \alpha < \pi/2$. Notamment, elle est continue et il est possible de prendre la limite en z_0 de la somme de la série sur tout chemin appartenant à un secteur angulaire fixé.

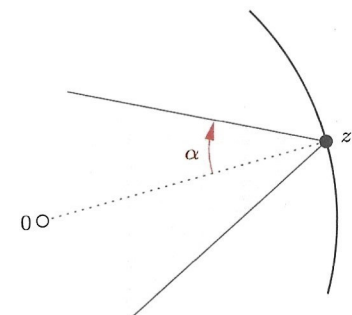


Fig. 1 — Domaine de Stolz de convergence uniforme de la série entière.

Lemme d'Abel sur le déterminant Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . Alors

$$\sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, u(x_k), \dots, x_n) = \text{tr}(u) \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Transformation d'Abel Également appelée « intégration par parties discrète ». Lors de l'étude d'une série numérique, il peut être utile de remplacer le terme général u_n

d'une suite par l'expression $U_n - U_{n-1}$, où $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles.

♦ D'une manière générale, si l'on note A_n et B_n les sommes partielles des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ et $B_{-1} = 0$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n A_k b_k &= \sum_{k=0}^n A_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=0}^n A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_{k+1} B_k \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k + A_n B_n. \end{aligned}$$

REMARQUE : Cette formule est parfois appelée « intégration par parties discrète », car on peut la rapprocher de la formule d'intégration par parties pour les intégrales, où cette fois-ci les fonctions A et B sont les primitives des fonctions a et b s'annulant en 0 :

$$\int_0^x A(t) b(t) dt = - \int_0^x a(t) B(t) dt + A(x) B(x).$$

Exemple : Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante et tend vers 0, et si les sommes partielles de la série $\sum b_n$ sont bornées, alors l'étude de la série $\sum a_n b_n$ peut passer par une transformation d'Abel. C'est notamment le cas des séries où $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est oscillante, comme

$$\sum \frac{\sin n\theta}{n} \quad \text{ou} \quad \sum \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}.$$

Si, en effet, l'on note $b_n = \sin n\theta$ avec $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$, alors un calcul explicite prouve que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est bornée. Une transformation d'Abel montre alors que

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin k\theta}{k} = - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_k}{k(k+1)} + \frac{B_n}{n}.$$

Le premier terme converge (série absolument convergente) et le second tend vers 0. Ainsi, la série $\sum (\sin n\theta)/n$ converge.

Critère d'Abel Autre nom du critère spécial des séries alternées.

Théorème d'Abel sur les séries numériques Si deux séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument vers A et B , leur produit de Cauchy converge absolument et a pour somme le produit AB .

Prix Abel Chaque année depuis 2003, l'Académie norvégienne des sciences et des lettres décerne le prix Abel à un ou plusieurs mathématiciens ; ce prix pallie l'absence de prix Nobel en mathématiques.

ABÉLIEN

Groupe abélien Autre nom d'un groupe commutatif, c'est-à-dire d'un groupe dans lequel tous les éléments commutent. La loi d'un groupe abélien est généralement notée « + » et son élément neutre « 0 ».

Intégrale abélienne Intégrale de la forme $\int \frac{A(x,y)}{B(x,y)} dx$ où A et B sont des polynômes à deux indéterminées, et où y est lié à x par une équation algébrique $P(x,y) = 0$.

ABSCISSE

Abscisse curviligne $\Leftrightarrow$ CURVILIGNE.

ABSOLUE CONVERGENCE

$\Leftrightarrow$ CONVERGENCE ABSOLUE, COMPLET (ESPACE —), CONVERGENCE NORMALE, SÉRIE SEMI-CONVERGENTE.

ABSORBANT

Dans un ensemble E muni d'une loi de composition interne « * », un élément a est dit absorbant si, pour tout $x \in E$, on a $ax = xa = a$.

Exemples : Dans un anneau $(A, +, \times)$, l'élément neutre pour l'addition, noté 0, est absorbant pour la multiplication. ♦ Si A est un ensemble, le monoïde $(\mathfrak{P}(A), \cap)$ admet l'ensemble vide pour élément absorbant, tandis que $(\mathfrak{P}(A), \cup)$ admet l'ensemble A pour élément absorbant.

ABSURDE

Raisonnement par l'absurde Supposer une proposition P vraie et en déduire une contradiction permet de montrer la fausseté de P .

Exemple : Un des exemples les plus fameux est celui de la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Supposons en effet $\sqrt{2}$ rationnel : il existe alors un couple (p, q) d'entiers, premiers entre eux, tels que $\sqrt{2} = p/q$. Mais alors $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair, donc, puisque 2 est premier, p est pair ; on peut l'écrire $p = 2k$, d'où l'on déduit que $q^2 = 2k^2$ est pair et donc que q est pair, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $p \wedge q = 1$. Ainsi, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

ACCROISSEMENTS FINIS

Égalité des accroissements finis Soit $[a; b]$ un segment de $\mathbb{R}$, soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Alors, il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$. ♦ Ce théorème est une généralisation de celui de Rolle, et un cas particulier de l'égalité de Taylor-Lagrange.

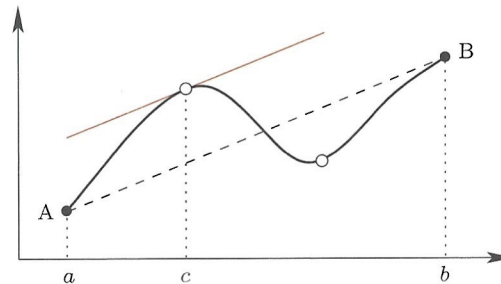


Fig. 2 — Illustration de l'égalité des accroissements finis. La tangente en c est parallèle à la droite AB , dont le taux d'accroissement est $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Il n'y a pas unicité du point c ; sur la figure, un second point vérifiant l'égalité est représenté.

Inégalité des accroissements finis Soient F un espace vectoriel normé, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $a, b \in I$. Soit $f : I \rightarrow F$ une fonction dérivable. On suppose que la dérivée de f est bornée sur $[a; b]$. Alors $\|f(b) - f(a)\| \leq |b - a| \sup_{x \in [a; b]} \|f'(x)\|$.

Exemple : Si ma voiture ne peut dépasser le $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, et que je dois aller d'une ville à une autre, distante de 200 km à vol d'oiseau, alors, quel que soit le chemin choisi et les aléas de la circulation, le trajet nécessitera au moins deux heures.

REMARQUE : L'avantage de l'inégalité des accroissements finis, par rapport à l'égalité du même nom, est d'être encore valable pour des fonctions prenant des valeurs dans un espace vectoriel normé. ♦ Il n'y a pas d'égalité des accroissements finis pour une fonction autre que réelle. Par exemple, $f : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f : t \mapsto e^{it}$ vérifie $f(0) = f(2\pi) = 1$, bien que la dérivée de f ne s'annule en aucun point.

ACCUMULATION

Point d'accumulation d'un ensemble Soient E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E . Un point x de E est point d'accumulation de A si tout voisinage de x rencontre A en au moins un point distinct de x . En d'autres termes, x est point d'accumulation si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A , non stationnaire en x , qui converge vers x . ♦ Cette propriété est équivalente à dire : tout voisinage de x contient une infinité de points de A .

REMARQUES : Un point d'accumulation de A est donc nécessairement un point adhérent à A . La réciproque est fautive : si $A = \{x\}$, alors x est évidemment adhérent à A , mais n'est pas un point d'accumulation. ♦ La notion de point d'accumulation s'étend aux parties d'un espace métrique.

Exemple : Tout réel est point d'accumulation de $\mathbb{Q}$.

☞ DENSE, ISOLÉ.

ACHEVÉ

Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$ ☞ $\mathbb{R}$.

ACTION

Action d'un groupe sur un ensemble Soient G un groupe et X un ensemble quelconque. On dit que G opère sur X lorsqu'on se donne une application (notée de façon multiplicative)

$$\begin{aligned} \varphi: G \times X &\longrightarrow X, \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

telle que, si e est l'élément neutre du groupe, on ait $e \cdot x = x$ et, pour tous $g, g' \in G$ et $x \in X$, on ait $g \cdot (g' \cdot x) = (gg') \cdot x$. ♦ Cela revient à se donner un morphisme de groupes ψ de G dans le groupe $\mathfrak{S}(X)$ des permutations de X : pour tout $g \in G$, la permutation $\psi(g)$ est définie par $\psi(g)(x) = g \cdot x$.

REMARQUE : Par construction, si l'on se fixe $g \in G$, l'application $x \mapsto g \cdot x$ est nécessairement une bijection, et l'application $x \mapsto g^{-1} \cdot x$ en est la bijection réciproque.

Exemple : Le groupe multiplicatif $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} ; \theta \in \mathbb{R}\}$ opère sur le plan euclidien : à tout $z = e^{i\theta}$ de $\mathbb{U}$ et à tout point M du plan, on associe le point $M' = R_\theta(M)$ obtenu par la rotation d'angle θ et d'origine O .

☞ ORBITE, PERMUTATIONS.

ADAPTÉE

Base adaptée à un sous-espace vectoriel Si V est un sous-espace vectoriel de dimension p d'un espace vectoriel E de dimension n , une base de E adaptée à V est une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de V . ♦ Une telle base existe toujours en vertu du théorème de la base incomplète.

Base adaptée à une décomposition Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; soient p un entier naturel non nul et $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$. Une base de E adaptée à cette décomposition est une base $(e_1, \dots, e_n)$ telle qu'il existe une partition $[1; n] = I_1 \cup \dots \cup I_p$ vérifiant $e_i \in E_k$ pour tout $i \in I_k$. On choisit en général une partition ordonnée, c'est-à-dire que la base $\mathcal{B}$ s'écrit sous la forme

$$\mathcal{B} = \underbrace{(e_1^{(1)}, \dots, e_{d_1}^{(1)})}_{\mathcal{B}_1}, \dots, \underbrace{(e_1^{(p)}, \dots, e_{d_p}^{(p)})}_{\mathcal{B}_p}.$$

où $\mathcal{B}_k$ est une base de E_k pour $k = 1, \dots, p$.

ADHÉRENCE

Point adhérent Un point a d'un espace vectoriel normé E est dit adhérent à une partie A de E si pour tout $r > 0$, la boule de centre a et de rayon r rencontre A :

$$\forall r > 0 \quad \mathcal{B}(a; r) \cap A \neq \emptyset.$$

REMARQUE : Cette définition est utile pour généraliser la notion de limite en un point qui ne fait pas partie du domaine de définition d'une fonction.

☞ ACCUMULATION.

Adhérence d'une partie On appelle adhérence de A l'ensemble des points adhérents à A ; on la note $\bar{A}$.

Exemples : Dans $\mathbb{R}$, l'adhérence de $[0; 1[$ est $[0; 1]$, et l'adhérence de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$ tout entier.

REMARQUE : On prendra bien soin de ne pas confondre avec le complémentaire d'une partie, que l'on notera plutôt A^c ou cA dans un texte où l'adhérence est utilisée.

Valeur d'adhérence ☞ ACCUMULATION, VALEUR.

ADJACENTES

Suites adjacentes Suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que : u est croissante, v est décroissante et $\lim(v - u) = 0$. ♦ Si u et v sont de telles suites, alors elles sont convergentes et admettent la même limite.

☞ VALEUR APPROCHÉE PAR DÉFAUT, SUITE *ARITHMÉTIQUE-GÉOMÉTRIQUE.

ADJOINT

Adjoint d'un endomorphisme Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien ou hermitien. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme u^* , appelé adjoint de u , tel que pour tous $x, y \in E$: $\langle u^*(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$. La matrice représentative de u^* dans une base orthonormée est la transposée de celle de u (cas réel) ou sa transconjugée (cas complexe).

REMARQUE : Dans le langage matriciel, la relation précédente s'écrit $\langle {}^tAX | Y \rangle = \langle X | AY \rangle$, ce qui n'est rien d'autre que la réécriture de la relation « évidente » ${}^t({}^tAX)Y = {}^tX(AY)$.

☞ ORTHOGONAL, SYMÉTRIQUE.

Adjoint d'une matrice Synonyme de transposée (pour une matrice réelle) ou de transconjugée (pour une matrice complexe).

ADMISSIBLE

Paramétrage admissible ☞ PARAMÉTRAGE.

AFFINE

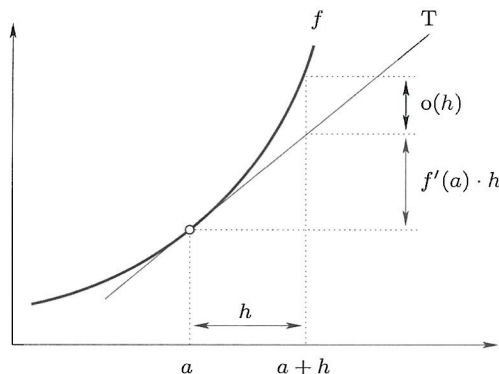
Application (transformation) affine Transformation du plan ou de l'espace préservant les propriétés affines (alignements, barycentres, etc.). ♦ Plus généralement, application $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ d'un espace affine dans un autre telle qu'il existe une application linéaire $\varphi : E \rightarrow F$ telle que, pour tout point $M \in \mathcal{E}$ et tout vecteur V de E , on ait $u(M + V) = u(M) + \varphi(V)$.

REMARQUE : Par une transformation affine, les images de points alignés sont des points alignés, l'image du milieu de deux points est le milieu des images. ♦ Si cette transformation est de plus injective, alors l'image d'une droite est une droite, celle d'un plan est un plan, l'image d'une intersection est l'intersection des images.

Application affine tangente Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction différentiable en un point a . L'application affine

$$T : x \mapsto f(a) + df(a)(x - a)$$

est appelée application affine tangente à f en a . Elle représente l'approximation de f , au premier ordre, au voisinage de a . Dans le cas d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la représentation graphique de cette application affine tangente est bien connue :



Espace affine Soit E un espace vectoriel. On peut le munir d'une structure affine :

- les éléments de E sont appelés *points* (plutôt que vecteurs) ;
- si M et N sont deux points de E , on désigne par $\overrightarrow{MN}$ ou $\overrightarrow{MN}$ le vecteur $N - M$.

Avec ces notations, si $u = \overrightarrow{AB}$, on peut écrire $B = A + u$. ♦ L'espace muni de cette structure affine est noté $\mathcal{E}$, tandis que E représente l'espace vectoriel sous-jacent. On dit que $\mathcal{E}$ est associé, ou *attaché*, à E .

REMARQUE : Tout ceci peut sembler n'être qu'un jeu de langage, mais il a son importance. Dans l'espace affine, le point O (correspondant au vecteur nul) n'a plus le caractère exceptionnel qu'a le vecteur nul de E . On peut également décider de changer l'origine de l'espace affine, de manière arbitraire. ♦ D'une manière générale, on peut considérer un espace affine $\mathcal{E}$ comme un ensemble de points sur lequel agit un espace vectoriel E par une opération externe $(M, v) \mapsto M + v$, en satisfaisant la règle suivante : pour tout couple (M, N) de points de $\mathcal{E}$, il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que $N = M + v$. Avec cette définition, un espace vectoriel peut bien être muni de sa structure affine comme énoncé précédemment, la loi externe étant la simple addition de E . $\square$ ACTION.

Fonction affine Fonction de la forme $f : x \mapsto ax + b$, où a et b sont des constantes.

♦ Si $E = \mathbb{R}^n$, une fonction de la forme $X \mapsto AX + B$, où B est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et A une matrice carrée, est également appelée fonction affine.

Fonction affine par morceaux $\square$ MORCEAUX.

Géométrie affine Géométrie du plan ou de l'espace affines, construits à partir d'une structure d'espace vectoriel sur lequel, en opposition avec le cas euclidien, on n'a pas défini de produit scalaire ni de norme. ♦ Appartiennent donc à la géométrie affine les notions de : points alignés ou coplanaires, droites, plans, milieux, barycentres, intersections. Ne lui appartiennent pas les notions de : orthogonalité, distances, isométries, angles, points cocycliques, etc., qui font partie de la géométrie dite *euclidienne*.

Exemple : Pour la géométrie affine, un cercle et une ellipse de $\mathbb{R}^2$ ne peuvent être différenciés (on passe de l'un à l'autre par une affinité, qui est une transformation affine).

Sous-espace affine Encore appelé variété linéaire affine. Ensemble non vide $\mathcal{V}$ de points d'un espace vectoriel affine $\mathcal{E}$, tel qu'il existe un sous-espace vectoriel V de E

et un point A de $\mathcal{E}$ tels que

$$\mathcal{V} = A + V = \{A + v ; v \in V\}.$$

♦ Le sous-espace vectoriel V est appelé *direction* du sous-espace affine $\mathcal{V}$. Si A est un point de $\mathcal{V}$, alors $V = \{\overrightarrow{AM} ; M \in \mathcal{V}\}$. ♦ Si B est un point quelconque de $\mathcal{V}$, on a encore $\mathcal{V} = B + V$. ♦ Dans l'espace $\mathbb{K}^n$ muni de sa structure affine, un sous-espace affine est défini par un système d'équations affines

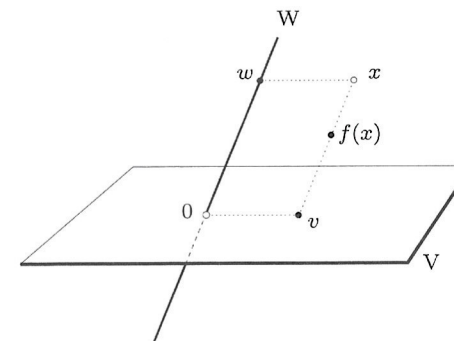
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \dots + a_{p,n}x_n = b_p \end{cases}$$

Le sous-espace vectoriel V associé à $\mathcal{V}$ a pour équation le système homogène associé. Si ce système est de rang r , alors V et $\mathcal{V}$ sont de dimension r .

$\square$ SYSTÈME LINÉAIRE.

AFFINITÉ

Affinité dans un espace vectoriel Application linéaire d'un espace vectoriel E telle qu'il existe deux sous-espaces supplémentaires V (la *base* de l'affinité) et W (sa *direction*), stables par f et tels que l'endomorphisme induit f_V est l'identité de V , tandis que f_W est une homothétie. Si $f_W = \lambda \text{Id}_W$, le scalaire λ est appelé *rapport* de l'affinité. ♦ En d'autres termes, si l'on décompose x dans $E = V \oplus W$ sous la forme $x = v + w$, alors $f(x) = v + \lambda w$.



REMARQUES : Une affinité de rapport 0 est la projection sur V parallèlement à W . ♦ Une affinité de rapport -1 est la symétrie par rapport à V parallèlement à W .

Affinité dans un espace affine Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace affine d'un espace $\mathcal{E}$, de direction V . Soit W un sous-espace vectoriel de E , supplémentaire de V dans E . Une affinité de base $\mathcal{V}$, de direction W et de rapport λ est une application affine dont la partie linéaire est l'affinité linéaire de base V , de direction W et de rapport λ , et laissant invariant point par point l'espace $\mathcal{V}$.

Exemple : L'image d'un cercle par une affinité du plan est une ellipse.

Affinité orthogonale Si E est un espace euclidien, affinité dont la base V et la direction W sont orthogonaux.

AFFIXE

Le plan $\mathbb{R}^2$ peut être identifié au plan complexe $\mathbb{C}$. L'affixe d'un point $M(x, y)$ est alors le complexe $z = x + iy$.

AIRE

Aire d'une partie de $\mathbb{R}^2$ Si D est une partie de $\mathbb{R}^2$ et si la fonction constante égale à 1 est intégrable sur D , on dit que D admet une aire ; l'aire de D est alors définie par

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D 1.$$

☞ GREEN, KEPLER.

ALÉATOIRE

Dans le sens courant : faisant intervenir le hasard. En mathématiques, se dit d'un système représenté par la théorie des probabilités, des variables aléatoires, etc. On emploie alors plus volontiers le mot : *stochastique*.

Exemple : Équation différentielle stochastique : équation différentielle dans laquelle apparaît, comme coefficient ou comme second membre, une variable aléatoire.

Variable aléatoire ☞ VARIABLE.

ALEMBERT Jean le Rond d'— (1717–1783)
(Philosophe et mathématicien français)

Équation de d'Alembert Équation aux dérivées partielles régissant la propagation des ondes dans un milieu linéaire non dispersif. Dans l'espace usuel $\mathbb{R}^3$, dont les coordonnées sont notées (x, y, z) , si t représente le temps et c la célérité des ondes dans le vide, l'équation de d'Alembert s'écrit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

REMARQUE : Cette équation est vérifiée, par exemple, par les différentes composantes du potentiel vecteur et par le potentiel scalaire dans le vide, mais également par d'autres champ. Le cas historique, étudié par d'Alembert, était celui de la déformation d'une corde vibrante. ♦ Avec une seule dimension d'espace, l'équation $\partial^2 f / \partial x^2 - (1/c^2) \partial^2 f / \partial t^2 = 0$ peut se résoudre grâce au changement de variable $\varphi : (x, t) \mapsto (u, v) = (x - ct, x + ct)$, qui établit un $\mathcal{C}^2$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même. On posant $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$, l'équation de d'Alembert devient en effet $\partial^2 \tilde{f} / \partial u \partial v = 0$, ce qui se résout en $\tilde{f}(u, v) = \Phi(u) + \Psi(v)$, ou encore $f(x, t) = \Phi(x - ct) + \Psi(x + ct)$, où Φ et Ψ sont des fonctions quelconques de classe $\mathcal{C}^2$.

☞ DALEMBERTIEN.

Règle de d'Alembert pour les séries numériques Règle de comparaison avec une série géométrique permettant d'établir la nature de certaines séries. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de termes strictement positifs. Supposons que $\ell = \lim a_{n+1}/a_n$ existe ; alors

- si $\ell > 1$, la série $\sum a_n$ diverge ;
- si $\ell < 1$, la série $\sum a_n$ converge.

Règle de d'Alembert pour le rayon Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $a_n \neq 0$ et si la suite $(|a_{n+1}/a_n|)_{n \geq N}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^+$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R = 1/\ell$ (en posant $1/+\infty = 0$ et $1/0 = +\infty$.)

REMARQUE : Personne ne tombera dans le piège d'oublier de vérifier que la limite existe, ou que la suite est bien définie, ou de conclure avec simplement l'inégalité $a_{n+1}/a_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas contraire, les conséquences en seraient terrifiantes.

Théorème de d'Alembert-Gauss Tout polynôme complexe non nul se factorise en produit de polynômes de degré 1. Ce théorème est parfois appelé « théorème fondamental de l'algèbre ».

REMARQUE : On en déduit, notamment, qu'un polynôme complexe de degré n possède, dans $\mathbb{C}$, n racines (en comptant leur multiplicité).

d'Alembertien ☞ DALEMBERTIEN.

ALEPH ($\aleph$)

Première lettre de l'alphabet hébraïque, utilisée depuis Cantor pour noter des cardinaux infinis. ♦ Le plus petit cardinal infini est $\aleph_0 = \text{Card } \mathbb{N}$. Le plus petit des cardinaux strictement plus grand que $\aleph_0$ est noté $\aleph_1$; l'hypothèse du continu est un axiome qui postule que $\aleph_1$ est égal au cardinal C de $\mathbb{R}$.

REMARQUE : Cette hypothèse ($\aleph_1 = C$) n'est pas démontrable dans le cadre de l'axiomatique mathématique usuelle, comme l'a prouvé Paul COHEN en 1963 ; sa négation ne l'est pas davantage. On peut donc choisir d'accepter l'hypothèse du continu ou de la rejeter.

ALGÈBRE

D'abord étude de la simplification et de la résolution d'équations, selon la méthode expliquée par le mathématicien Al Khwarizmi (788–850) dans son ouvrage *Kitab al-jabr w'al muqabalah* (livre de la remise en place et de la simplification), l'algèbre s'est élargie à l'étude plus globale des structures et des relations que des objets, indépendamment de leur nature même, ont entre eux au sein de cette structure.

Algèbre (structure) On appelle algèbre sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ tout quadruplet $(A, +, \times, \cdot)$ tel que :

- $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,
- $(A, +, \times)$ est un anneau,
- $(\lambda \cdot x) \times (\mu \cdot y) = (\lambda \mu) \cdot (x \times y)$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in A$.

Exemples : L'espace $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel, muni de la loi de composition, est une algèbre (non commutative si E n'est pas de dimension 1). ♦ L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes, muni des lois usuelles, est une algèbre commutative. ♦ Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E , on note $\mathbb{K}[u] = \text{Vect}(\{u^k ; k \in \mathbb{N}\})$. C'est la plus petite algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant u et elle est commutative. ♦ De même, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathbb{K}[M] = \text{Vect}(\{M^k ; k \in \mathbb{N}\})$.

Algèbre commutative Une algèbre A est dite commutative si sa loi de multiplication interne est commutative.

Algèbre normée Une algèbre, munie d'une norme $\|\cdot\|$ d'espace vectoriel, est dite *algèbre normée* si $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|$ pour tous $x, y \in A$.

Exemple : Soit E un espace vectoriel normé. L'espace $\mathcal{L}(E)$, muni de la loi de composition, est une algèbre normée pour la norme subordonnée définie par $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

☞ NORME D'ALGÈBRE, NORME MATRICIELLE, NORME SUBORDONNÉE.

Algèbre de Banach C'est une algèbre normée complète.

Exemple : Si E est complet, alors $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre de Banach pour la norme subordonnée à celle de E . ☞ SÉRIE *GÉOMÉTRIQUE.

Sous-algèbre Une *sous-algèbre* est un sous-espace vectoriel d'une algèbre, stable par multiplication et contenant l'élément neutre.

☞ ANNEAU, ESPACE VECTORIEL, NORME, ESPACE DE *BANACH.

σ -algèbre Synonyme de *tribu*. Une σ -algèbre sur un ensemble E est une partie $\mathcal{T}$ de l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties de E , vérifiant les conditions suivantes :

- $E \in \mathcal{T}$;
- pour tout élément $A \in \mathcal{T}$, son complémentaire $A^c = E \setminus A$ est dans $\mathcal{T}$;
- pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est élément de $\mathcal{T}$.

☞ ESPACE *PROBABILISABLE.

ALGÈBRE

Clôture algébrique d'un corps K Plus petit corps L, algébriquement clos, dont K est un sous-corps.

Exemple : Le corps $\mathbb{C}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{R}$. ♦ La clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, notée $\overline{\mathbb{Q}}$, est le corps des nombres algébriques. Le fait que ce soit un corps n'est pas un résultat facile à démontrer. En revanche, il est aisé de montrer que $\overline{\mathbb{Q}}$ est dénombrable et donc strictement inclus dans $\mathbb{C}$. Cela prouve également qu'il existe des nombres réels transcendants (non algébriques).

☞ CLOS.

Courbe algébrique Courbe du plan définie par une équation implicite de la forme $P(x, y) = 0$, où P est un polynôme à deux variables.

Exemple : Un cercle, une ellipse, sont des courbes algébriques.

Équation algébrique Équation de la forme $P(x) = 0$, où P est un polynôme à une indéterminée, ou bien de la forme $Q(x_1, \dots, x_n) = 0$, où Q est un polynôme à n indéterminées.

☞ ÉQUATION *DIOPHANTINNE, FERMAT.

Nombre algébrique Nombre (réel ou complexe) racine d'un polynôme à coefficients entiers.

Exemple : Les nombres i , $\sqrt{p}$ pour p entier, $\cos(\pi/5) = (-1 + \sqrt{5})/4$ sont algébriques. Au contraire, π et e ne sont pas algébriques : ils sont *transcendants*.

Corps algébriquement clos ☞ CLOS.

ALGORITHME

Succession finie de règles et d'opérations à appliquer, mécaniquement et dans un ordre déterminé, à un ensemble fini de données, afin d'arriver, au bout d'un nombre fini d'étapes, à un résultat. ♦ Si les règles à appliquer peuvent comprendre des tests, dont le résultat détermine la suite des événements, l'algorithme lui-même *ne dépend pas* des données que l'on utilise. Un algorithme est donc programmable, de manière univoque, sur un ordinateur.

Algorithme d'Euclide ☞ EUCLIDE.

Algorithme du pivot de Gauss ☞ PIVOT.

ALTERNÉ

Application multilinéaire alternée Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Soit p un entier naturel non nul. Soit $f : E^p \rightarrow F$ une application multilinéaire. Elle est dite *alternée* si pour tout couple $i, j \in [1; p]$ tel que $i \neq j$ et pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, on a

$$x_i = x_j \implies f(x_1, \dots, x_p) = 0.$$

♦ Lorsque l'on travaille dans les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cette propriété est équivalente à la suivante (appelée *antisymétrie*) : pour tout couple $i, j \in [1; p]$ avec $i < j$, on a

$$f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p).$$

♦ Enfin, cette dernière propriété s'énonce également ainsi : pour tout permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}),$$

où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ .

Exemple : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , muni d'une base $\mathcal{B}$. L'application « déterminant » qui à un n -uplet de vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ associe $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est une forme n -linéaire alternée.

REMARQUE : Le caractère alterné d'une forme multilinéaire implique toujours son caractère antisymétrique ; la réciproque n'est vraie que si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique différente de 2.

Groupe alterné Si n est un entier non nul, le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ est le groupe des permutations paires de $[1; n]$. C'est donc le noyau de la signature, qui est un morphisme de groupes. ♦ Si $n \geq 2$, le cardinal de $\mathfrak{A}_n$ est $n!/2$.

Exemple : $\mathfrak{A}_3 = \{\text{Id}, (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3), (3, 2, 1)\}$

☞ PERMUTATION, SIGNATURE.

Série alternée Une série réelle $\sum u_n$ est dite alternée si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et u_{n+1} sont de signes contraires : $u_n u_{n+1} \leq 0$. Notamment, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de signe constant, la suite de terme général $(-1)^n a_n$ est alternée.

☞ CRITÈRE DES SÉRIES ALTERNÉES.

ANALYTIQUE

Fonction analytique Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est dite analytique si, en tout point $w \in U$, elle admet un développement en série entière centré en w .

REMARQUE : Ainsi, en chaque point $w \in \mathbb{C}$, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de complexes et un rayon r_0 tel que, pour tout $z \in \mathcal{B}(w; r_0)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w)^n.$$

Les coefficients a_n et le rayon r_0 dépendent de w . Une telle fonction est, d'après la théorie générale des séries entières, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on obtient ses dérivées successives par dérivation terme à terme. ♦ On peut montrer, à l'aide de l'analyse complexe, que si une fonction f est développable en série entière centrée en un point z_0 et égale à ce développement sur un voisinage ouvert Ω de z_0 , alors f est analytique sur Ω .

Exemple : La fonction exponentielle est analytique sur $\mathbb{C}$. Si a est un complexe fixé, on peut écrire, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z = e^a \cdot e^{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!} (z - a)^n.$$

☞ CONFORME, ENTIÈRE.

ANGLE

Angle et mesure d'angle Plutôt que d'angle (orienté), on préfère généralement parler de mesure d'angle. Il existe plusieurs constructions possibles d'un objet qui s'appellerait angle et dont une *mesure* est un réel (défini modulo 2π). ♦ Si l'on tient à définir la notion d'angle, une possibilité est de définir un angle comme un complexe unimodulaire, ou bien comme une classe d'équivalence de réels pour la relation d'équivalence $x \sim y \iff (y - x \in 2\pi\mathbb{Z})$, ou encore tout simplement comme un élément du groupe $\text{SO}(2)$ des rotations du plan. Ces trois méthodes sont équivalentes car les trois ensembles : $\mathbb{U}$, $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\text{SO}(2)$ sont munis d'une structure de groupe commutatif et isomorphes entre eux.

Angle d'une rotation du plan Soit r une rotation vectorielle du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire un automorphisme orthogonal de déterminant $+1$: $R \in \text{SO}(2)$. Alors il existe un réel θ tel que, dans toute base orthonormée directe de E, la matrice de r soit égale à

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

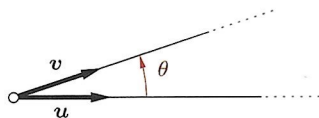
Tout réel θ' tel que la matrice de r soit $R(\theta')$ est tel que $\theta' - \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Le réel θ est une mesure de l'angle de la rotation.

Angle orienté entre deux vecteurs du plan Dans le plan euclidien orienté $E = \mathbb{R}^2$, une mesure de l'angle orienté $(\widehat{u, v})$ entre deux vecteurs u et v non nuls est un réel θ tel qu'une rotation d'angle θ envoie $u/\|u\|$ sur $v/\|v\|$. On note $(\widehat{u, v}) \equiv \theta \pmod{2\pi}$, et on a

$$\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \cos \theta \quad \text{et} \quad \frac{\text{Det}(u, v)}{\|u\| \|v\|} = \sin \theta.$$

REMARQUE : Le mesure d'un angle orienté vérifie $(\widehat{u, v}) = -(\widehat{v, u})$ et la relation de Chasles $(\widehat{u, v}) + (\widehat{v, w}) = (\widehat{u, w})$.

Angle orienté de deux demi-droites Si D et D' sont deux demi-droites du plan euclidien orienté, dirigées respectivement par des vecteurs u et v non nuls, une mesure de l'angle orienté entre D et D' est une mesure θ de l'angle $\widehat{u, v}$. On note $(\widehat{D, D'}) \equiv \theta \pmod{2\pi}$. ♦ Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux demi-droites affines du plan affine euclidien orienté $\mathcal{E}$, une mesure de leur angle est une mesure de l'angle entre les droites vectorielles D et D' associées.



Angle non orienté de deux droites Soient D et D' deux droites vectorielles, de vecteurs directeurs normés u et v , une mesure de l'angle non orienté entre ces droites est un réel θ vérifiant $|u \cdot v| = \cos \theta$. On peut toujours choisir un tel réel dans $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Angle (non orienté) entre deux vecteurs de l'espace Si u et v sont deux vecteurs non nuls de l'espace vectoriel euclidien $E = \mathbb{R}^3$, il existe une rotation envoyant $u/\|u\|$ sur $v/\|v\|$. Notons θ une mesure de son angle. Alors, toute rotation d'angle θ' envoyant $u/\|u\|$ sur $v/\|v\|$ vérifie $|\theta'| \equiv |\theta| \pmod{2\pi}$. Le réel θ est une mesure de l'angle non orienté entre les vecteurs. ♦ Dit autrement, une mesure de l'angle des deux vecteurs est tout réel θ vérifiant $u \cdot v = \cos \theta \|u\| \|v\|$.

REMARQUE : On peut toujours trouver une mesure de l'angle non orienté entre deux vecteurs sous la forme d'un réel de $[0; \pi]$, et si θ est une mesure de cet angle, alors $-\theta$ en est également une. En effet, si vous dessinez deux vecteurs sur un plan (une feuille de papier), vous verrez le couple selon une certaine orientation si vous regardez d'un côté de la feuille, mais avec l'orientation inverse si vous regardez de l'autre côté, par transparence.

ANNEAU

Triplet $(A, +, \times)$ où A est un ensemble, muni de deux lois de composition interne $+$ et $\times$, telles que :

- $(A, +)$ est un groupe abélien additif, dont le neutre est noté 0_A ;
- $\times$ est associative et admet un élément neutre 1_A ;
- $\times$ est distributive à gauche et à droite par rapport à $+$, c'est-à-dire que, pour tous $x, y, z \in A$:

$$(x + y) \times z = x \times z + y \times z \quad \text{et} \quad z \times (x + y) = z \times x + z \times y.$$

Exemples : L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, muni de l'addition et de la multiplication usuelle, est un anneau. L'ensemble $E = \mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans le corps commutatif $\mathbb{K}$ est un anneau.

REMARQUE : *A priori*, les éléments non nuls de A n'ont aucune raison d'être symétrisables pour la loi « $\times$ » (on dit aussi : inversibles). ♦ GROUPE DES INVERSIBLES, INVERSIBLE, IDÉAL.

Anneau commutatif Anneau $(A, +, \times)$ dont la loi $\times$ est commutative.

Exemple : Soit X un ensemble. Alors $(\mathfrak{P}(X), \cup, \cap)$ est un anneau commutatif. Son élément neutre pour la loi multiplicative « $\cap$ » est X .

Anneau intègre Anneau A différent de $\{0\}$, commutatif, et sans diviseur de *zéro :

$$\forall (a, b) \in A \quad (ab = 0) \implies a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0.$$

REMARQUE : Si A est un anneau intègre, c'est alors un sous-anneau d'un corps $\mathbb{K}$, appelé corps des fractions de A , formé des éléments de la forme a/b , avec $a, b \in A$ et $b \neq 0$. Le corps $\mathbb{K}$ est unique, à un isomorphisme près. (♦ FRACTION *RATIONNELLE)

Exemples : L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un anneau intègre. ♦ $\mathbb{Z}$ est un anneau intègre. Le corps des fractions de $\mathbb{Z}$ est appelé corps des rationnels et noté $\mathbb{Q}$.

Anneau produit Si A et B sont deux anneaux, on peut munir le *produit cartésien $A \times B$ d'une structure d'anneau, les lois $+$ et $\times$ étant définies par

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{et} \quad (a, b) \times (a', b') = (aa', bb').$$

Le zéro de cet anneau est $(0_A, 0_B)$ et son unité $(1_A, 1_B)$.

Anneau euclidien Anneau muni d'une division euclidienne. Un tel anneau est principal.

Exemple : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}[X]$ sont euclidiens.

♦ DIVISION *EUCLIDIENNE.

Anneau principal Anneau intègre dans lequel tout idéal est principal, c'est-à-dire de la forme $I = xA$ pour un certain $x \in A$. ♦ Tout anneau euclidien (notamment, les anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$) est principal.

REMARQUES : La notion d'anneau principal permet de définir une arithmétique sur cet anneau et d'introduire la notion de polynôme annulateur minimal. ♦ Certains anneaux ne sont pas principaux, par exemple $\mathbb{Z}[X]$.

ANNULATEUR

♦ POLYNÔME ANNULATEUR.

ANTÉDUALE

♦ BASE ANTÉDUALE.

ANTILINÉAIRE

Synonyme de *semi-linéaire.

ANTISYMÉTRIQUE

Application multilinéaire antisymétrique ♦ ALTERNÉE.

Matrice antisymétrique Matrice carrée vérifiant ${}^tM = -M$.

Relation antisymétrique ♦ ORDRE.

APÉRY Roger (1916-1994)
(Mathématicien français)

Constante d'Apéry Nom parfois donné à $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$, dont Apéry a montré qu'il est irrationnel.

♦ ZETA.

APPLICATION

Soient A et B deux ensembles. Une application de A vers B est un sous-ensemble $\mathcal{F}$ du produit cartésien $A \times B$ vérifiant : pour tout $a \in A$, il existe un unique $b \in B$ tel que $(a, b) \in \mathcal{F}$. On note alors $b = f(a)$.

Application linéaire $\Leftrightarrow$ LINÉAIRE.

APPROXIMATIONS

Approximation d'un réel par une suite de rationnels $\Leftrightarrow$ VALEUR APPROCHÉE.

Approximation d'une fonction $\Leftrightarrow$ INTERPOLATION.

Approximation d'une intégrale $\Leftrightarrow$ SOMMES DE RIEMANN, SIMPSON, TRAPÈZES.

Approximation uniforme d'une fonction continue $\Leftrightarrow$ THÉORÈMES D'APPROXIMATION DE WEIERSTRASS, FONCTION EN ESCALIER.

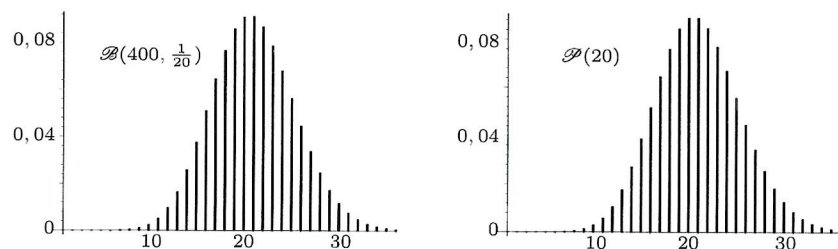
Approximations de l'unité $\Leftrightarrow$ SUITE DE DIRAC.

Approximation d'une loi Certaines lois de probabilité peuvent, en pratique, être approchées par d'autres lois plus facilement calculables : loi hypergéométrique, loi binomiale, loi de Poisson. Le tableau ci-dessous donne quelques approximations utiles ainsi que les conditions pratiques d'utilisation de ces approximations.

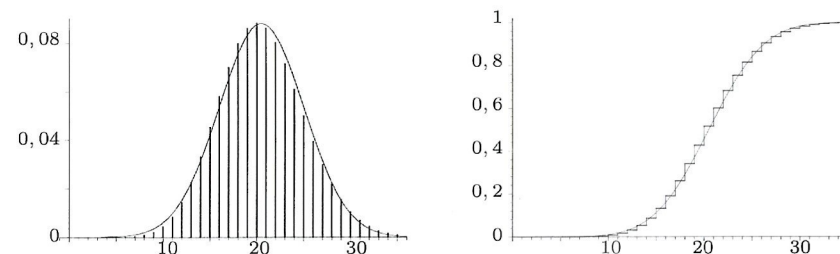
Loi et paramètre	Loi approchée	Conditions pratiques
Hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$	$\mathcal{B}(n, p)$	$N \geq 10n$
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$\mathcal{P}(np)$	$p \leq 0,1 \quad n \geq 30$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$	$\lambda \geq 15$
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$	$np \geq 15 \quad n(1-p) \geq 15$

TABLE 1 — Table des lois approchées.

Exemple : On donne ici l'histogramme d'une loi binomiale $\mathcal{B}(400, 1/20)$, tronqué aux valeurs intéressantes (pour $k \geq 36$, les valeurs de $P[X = k]$ sont extrêmement petites), puis celui d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(20)$. Les graphes sont presque indiscernables.



De même, on peut comparer une loi discrète et une loi continue qui l'approche en superposant l'histogramme d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20,5$ à la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$ (à gauche) ou en juxtaposant les fonctions de répartition de ces deux lois (à droite).



$\Leftrightarrow$ CONVERGENCE EN *LOI, CORRECTION DE CONTINUITÉ, THÉORÈME *CENTRAL LIMITE.

ARC

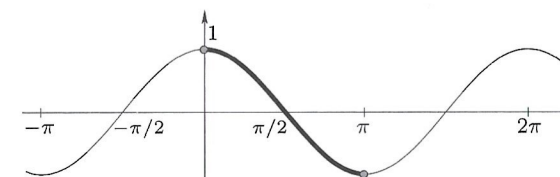
Arc paramétré Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. On appelle arc paramétré ou *chemin* de A toute application continue d'un segment (non réduit à un point) de $\mathbb{R}$ dans A. $\blacklozenge$ Si $\gamma : [a; b] \rightarrow A$ est un arc, on notera $\Gamma = \text{Im}(\gamma)$ son image « géométrique », appelée *support* du chemin. Les points $x = \gamma(a)$ et $y = \gamma(b)$ sont appelés *extrémités* de γ . $\blacklozenge$ On dit que l'arc est de classe $\mathcal{C}^k$ si l'application γ est de classe $\mathcal{C}^k$.

REMARQUE : Sauf cas particulier, les arcs paramétrés seront toujours ici supposés de classe au moins $\mathcal{C}^1$.

$\Leftrightarrow$ CONNEXE PAR ARCS, COURBE, ORIENTÉ, PARAMÉTRAGE ADMISSIBLE, PARAMÉTRAGE NORMAL, POINT *RÉGULIER, SIMPLE.

ARC COSINUS

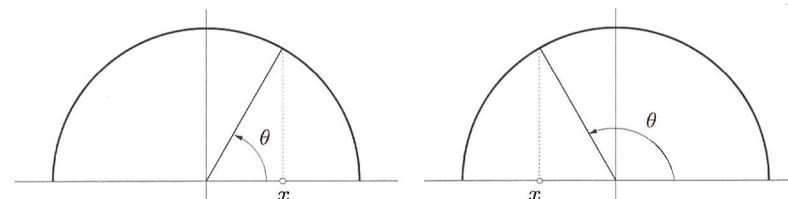
La restriction à $[0; \pi]$ de la fonction cosinus établit une bijection de $[0; \pi]$ sur $[-1; +1]$.



Sa bijection réciproque est la fonction « Arc cosinus », notée Arc cos. Elle vérifie donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1; +1] \quad & \cos(\text{Arc cos } x) = x \\ \forall \theta \in [0; \pi] \quad & \text{Arc cos}(\cos \theta) = \theta. \end{aligned}$$

On peut interpréter facilement cette fonction de manière géométrique. Si $x \in [-1; +1]$ et si $\theta = \text{Arc cos } x$, alors θ est l'angle situé « au-dessus » de x :



On obtient le graphe de la fonction Arc cos en effectuant, sur le graphe de la restriction à $[0; \pi]$ de la fonction cos (représenté dans un repère orthonormé), une symétrie par rapport à la première diagonale.

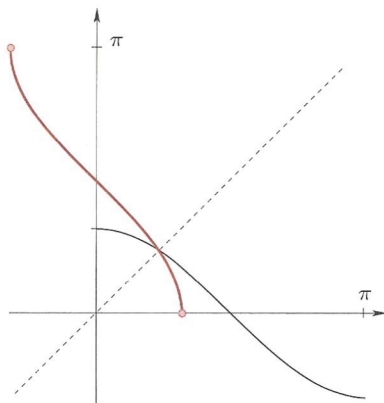


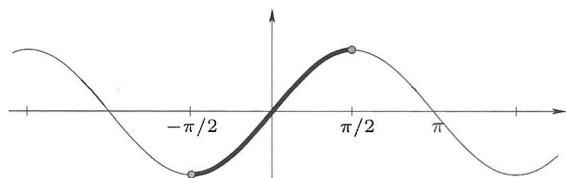
Fig. 3 — Graphes de la fonction cosinus, restreinte à $[0; \pi]$ (en noir), et de la fonction Arc cos (en rouge).

REMARQUE : La relation $\text{Arc cos}(\cos \theta) = \theta$ n'est valable que sur $[0; \pi]$. Si, par exemple, θ est dans l'intervalle $[\pi; 2\pi]$, on peut calculer $\text{Arc cos}(\cos \theta)$ par les relations

$$\text{Arc cos}(\cos \theta) = \text{Arc cos}[\cos(2\pi - \theta)] = 2\pi - \theta.$$

ARC SINUS

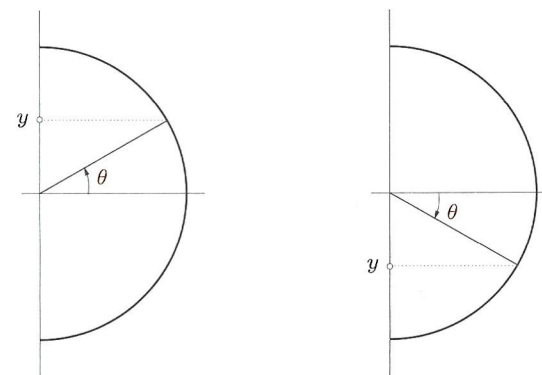
La restriction à $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction sinus établit une bijection de I sur $[-1; +1]$.



La bijection réciproque de cette restriction est appelée « Arc sinus », et notée Arc sin . Elle vérifie donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1; +1] \quad & \sin(\text{Arc sin } x) = x \\ \forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad & \text{Arc sin}(\sin \theta) = \theta. \end{aligned}$$

On peut interpréter facilement cette fonction de manière géométrique. Si $y \in [-1; +1]$ et si $\theta = \text{Arc sin } y$, alors θ est l'angle situé « à droite » de y (et $y = \sin \theta$) :



Enfin, le graphe de la fonction Arc sin est obtenu comme le symétrique de celui de la fonction sinus, convenablement restreinte, par rapport à la première bissectrice.

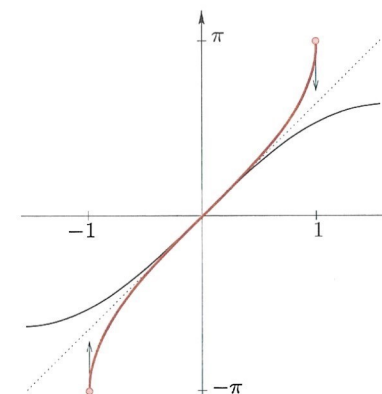
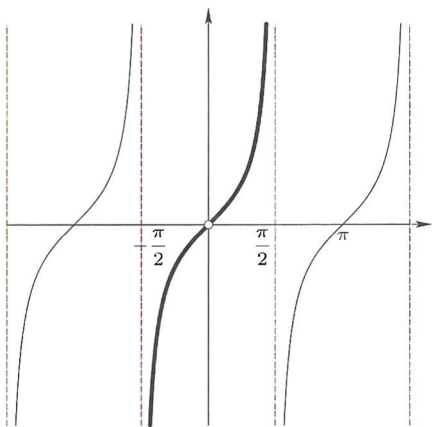


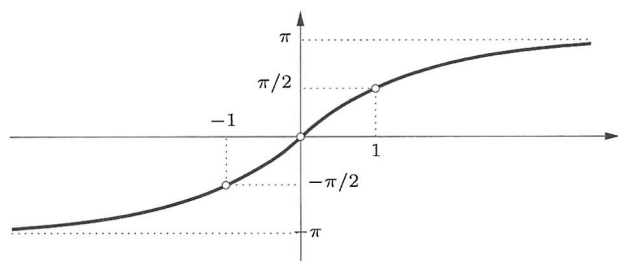
Fig. 4 — Graphes de la fonction sinus, restreinte à $[-\pi/2; \pi/2]$ (en noir), et de la fonction Arc sin (en rouge).

ARC TANGENTE

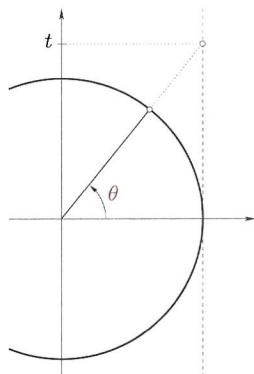
Le restriction de la fonction tangente à l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ établit une bijection sur $\mathbb{R}$.



On peut ainsi définir la fonction réciproque de cette restriction, notée Arctan , dont le graphe est :



On peut interpréter facilement cette fonction de manière géométrique. Si $t \in \mathbb{R}$ et si $\theta = \text{Arctan } t$, alors θ est l'angle dont la droite représentative coupe la tangente au cercle en $(1, 0)$ à l'ordonnée t .



ARCHIMÉDIEN

Groupe archimédien Groupe $\ast$ ordonné additif G tel que, pour tous $x > 0$ et $y \geq 0$, il existe un entier n tel que $nx \geq y$.

Exemple : Le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ est archimédien.

ARGUMENT

Soit z un nombre complexe non nul. Il existe un réel θ tel que $z = |z| e^{i\theta}$. Un tel réel est appelé *un* argument de z . Si θ est un argument de z , alors l'ensemble des arguments de z est $\{\theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. L'unique argument θ_0 de z tel que $-\pi < \theta \leq \pi$ est appelé *argument principal* de z . ♦ On note $\text{Arg } z = \theta_0$, ou bien (avec une minuscule) $\arg z \equiv \theta \pmod{2\pi}$.

✦ $\mathbb{C}$, RELÈVEMENT, UNIMODULAIRE.

ARGCH, ARGSH, ARGTH

La fonction sinus hyperbolique établit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; sa bijection réciproque est appelée argument sinus hyperbolique et notée Arg sh . ♦ La fonction cosinus hyperbolique établit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $[1; +\infty[$; sa bijection réciproque est appelée argument cosinus hyperbolique et notée Arg ch . ♦ De la même façon, la fonction tangente hyperbolique étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1; 1[$. On note Arg th sa bijection réciproque, appelée argument tangente hyperbolique. ♦ Ces fonctions s'expriment à l'aide des fonctions usuelles :

domaine	fonction	expression
$[1; +\infty[$	$\text{Arg ch } x$	$\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
$\mathbb{R}$	$\text{Arg sh } x$	$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
$] -1; 1[$	$\text{Arg th } x$	$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

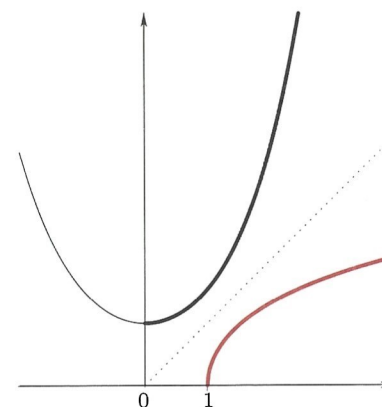


Fig. 5 — La fonction ch (en noir) et sa restriction à $\mathbb{R}^+$ (en gras). La fonction réciproque de cette restriction est la fonction Arg ch (en rouge).

ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE

Inégalité arithmético-géométrique Soient a, b deux réels. Alors

$$|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

REMARQUE : Cette inégalité très simple (elle provient du développement de l'inégalité $(|a| - |b|)^2 \geq 0$) a de nombreuses applications. Ainsi, elle permet de prouver que, si f et g sont deux fonctions de carré intégrable sur un intervalle I , alors fg est intégrable sur I ; ce résultat permet à son tour de montrer que l'espace $\mathcal{L}^2(I)$ est un espace vectoriel. ♦ De manière plus générale, si $x_1, \dots, x_n$ sont des réels positifs, alors

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n),$$

ce qui s'interprète en : la moyenne géométrique est plus petite que la moyenne arithmétique.

☞ CONVEXITÉ.

Moyenne arithmético-géométrique Si a et b sont des réels strictement positifs, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

sont adjacentes; leur limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b . Le calcul de cette moyenne fait intervenir des intégrales elliptiques.

Suite arithmético-géométrique Suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = a u_n + b$. Si $a \neq 1$, on note $\ell = b/(1-a)$ le point fixe de la transformation $x \mapsto ax+b$. Alors la suite de terme général $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a , ce qui permet de résoudre la relation et d'obtenir $u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$.

ARITHMÉTIQUE

D'abord science des nombres entiers (ou des rationnels) et de leurs combinaisons par addition ou multiplication, l'arithmétique s'est rapidement étoffée pour étudier, de manière générale, la notion de divisibilité dans un anneau intègre. L'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ est parfois appelée *théorie des nombres*.

Moyenne arithmétique La moyenne arithmétique de deux nombres réels ou complexes est égale à $(x+y)/2$. ♦ Celle des n nombres $x_1, \dots, x_n$ est $\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$.

☞ GÉOMÉTRIQUE.

Suite arithmétique Suite vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + a$. On l'appelle parfois *progression arithmétique*. ♦ Elle vérifie alors $u_n = u_0 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Triangle arithmétique Synonyme de triangle de Pascal.

ASSOCIATIVITÉ

Une loi de composition $*$ sur un ensemble A est associative si, pour tous $a, b, c \in A$, on a $(a * b) * c = a * (b * c)$. Dans ce cas, on écrit librement $a * b * c$ sans préciser de règle de priorité.

ASSOCIÉ

Endomorphisme associé à une forme bilinéaire symétrique Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien. Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. L'endomorphisme associé à φ est l'unique endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant

$$\forall x, y \in E \quad \varphi(x, y) = \langle x | u(y) \rangle.$$

Cet endomorphisme est alors symétrique. Dans une base orthonormée, φ et u ont la même matrice représentative.

☞ FORME BILINÉAIRE SYMÉTRIQUE, MATRICE, RANG D'UNE FORME BILINÉAIRE SYMÉTRIQUE.

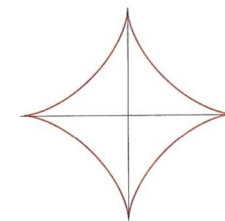
Entiers associés Deux entiers p et q sont dits associés si p divise q et q divise p . Cela revient à dire qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ tel que $p = \varepsilon q$.

Polynômes associés Dans l'anneau $\mathbb{K}[X]$, les polynômes P et Q sont dits associés si $P|Q$ et $Q|P$. ♦ Cette propriété est équivalente à : $P \mathbb{K}[X] = Q \mathbb{K}[X]$, ce qui revient à dire qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $Q = \lambda P$.

ASTROÏDE

Courbe du plan d'équation paramétrique

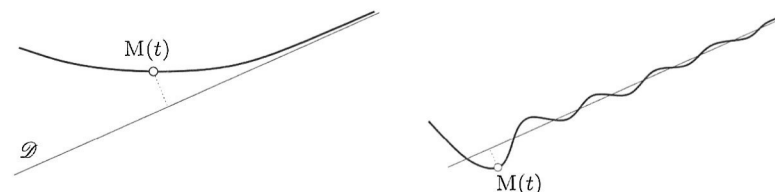
$$x(t) = \cos^3 t \quad y(t) = \sin^3(t).$$



Exemple : Le lieu des centres de courbure d'une ellipse est, à une affinité orthogonale près, une astroïde.

ASYMPTOTE

Droite asymptote à une branche infinie Soit (I, f) un arc paramétré du plan euclidien admettant une branche infinie en t_0 (t_0 est une extrémité de I , éventuellement $\pm\infty$). On dit qu'une droite $\mathcal{D}$ est asymptote à cette branche infinie si la distance du point $M(t)$ à la droite $\mathcal{D}$ tend vers 0 quand t tend vers t_0 .



ASYMPTOTIQUE

Développement asymptotique Développement d'une fonction au voisinage d'un point a , généralement l'infini, selon une certaine famille de fonctions. ♦ Les développements asymptotiques les plus fréquents, au voisinage de $+\infty$, se font selon la famille des puissances $x \mapsto 1/x^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

$$\text{Exemple : } \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ as } x \rightarrow +\infty.$$

♦ On peut encore généraliser cette notion en choisissant une famille $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies au voisinage de a , vérifiant $\varphi_{k+1} = o_a(\varphi_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Un développement asymptotique est alors un développement de la forme

$$f = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \cdots + c_n \varphi_n + o_a(\varphi_n).$$

Dans les familles fréquemment utilisées au voisinage de l'infini, citons, outre les fonctions puissances :

- les produits de puissances et de puissances de logarithmes : $x \mapsto x^k (\ln x)^\ell$;
- les puissances non entières (ex: $x \mapsto x^{n/2}$, $n \in \mathbb{Z}$);
- les exponentielles : $x \mapsto e^{\alpha x}$;
- les produits des fonctions précédentes.

De telles familles sont appelées *échelles de comparaison*.

Exemple : Au voisinage de 0,

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \frac{t}{6} + \frac{7t^3}{360} + O(t^5).$$

Ce développement a été aimablement fourni par le logiciel Maple en utilisant l'instruction : `> series(1/sin(t), t=0, 7)`

Direction asymptotique Soit (I, f) un arc paramétré du plan, admettant une branche infinie en t_0 . Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, de direction D. On dit que la branche infinie admet D pour direction asymptotique si la droite OM(t) admet D pour direction limite, c'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{OM(t)}{\|OM(t)\|} \in D.$$

(Cette direction est indépendante du choix de l'origine O du repère.)

Exemples : Une parabole d'équation $y = x^2$ admet une direction asymptotique verticale pour ses deux branches infinies. ♦ Un arc paramétré $t \mapsto (x(t), y(t))$ tel qu'il existe un réel ℓ vérifiant $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t)/x(t) = \ell$, admet pour direction asymptotique la droite D : $y = \ell x$.

Dans le cas où $t \mapsto d(M(t), \mathcal{D})$ diverge en t_0 , aucune droite n'est asymptote, et la branche infinie est appelée *branche parabolique*, par analogie avec le cas de la parabole.

Propriété asymptotique Une propriété concernant une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite asymptotique lorsqu'elle ne dépend pas des premiers termes, c'est-à-dire qu'elle est vérifiée également pour toute suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant : il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $v_n = u_n$. (En d'autres termes, modifier un nombre quelconque de termes de u ne change pas cette propriété.)

Exemples : Sont asymptotiques :

- la nature convergente ou divergente d'une suite ;
- la valeur de la limite d'une suite convergente ;
- la nature convergente ou divergente d'une série.

Au contraire, la valeur de la somme d'une série n'est pas une propriété asymptotique.

ATOMIQUE

Événement atomique Dans un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$, événement de la forme $\{\omega\}$, où ω est un élément de l'univers Ω .

REMARQUE : Les événements atomiques de $\mathbb{R}$ permettent de caractériser la loi d'une variable aléatoire discrète ; en revanche, ils ne sont d'aucune utilité pour une variable aléatoire à densité, puisque tous sont négligeables.

☞ ÉVÉNEMENT, PROBABILITÉ.

ATTEINDRE

Atteindre son maximum/minimum Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble A quelconque. Si f est majorée, on dit qu'elle atteint son maximum s'il existe un élément $a \in A$ tel que

$$f(a) = \sup_{x \in A} f(x).$$

Dans ce cas, la borne supérieure est un maximum. ♦ La même définition vaut pour « minimum » et « borne inférieure ».

REMARQUES : Dire que f atteint son maximum est donc équivalent à dire que l'image de f admet un maximum. ♦ Une fonction numérique continue sur un compact atteint son maximum et son minimum sur ce compact.

☞ MAXIMUM, WEIERSTRASS (THÉORÈME DE — SUR LES COMPACTS).

ATTRACTIF

Point fixe attractif Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Un point fixe $a \in I$ est dit attractif s'il existe un voisinage V de a tel que, pour tout $x \in V$, on ait $|f(x) - a| < |x - a|$. ♦ Pour tout choix d'un élément u_0 de V, la suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ converge alors vers a .

REMARQUE : La notion de point fixe attractif est utile lorsque l'on définit des suites par récurrence. Pour cela, supposons que I est un intervalle stable par f et définissons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en choisissant une valeur u_0 dans I et en imposant la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $|f'(a)| < 1$, alors la fonction f est contractante sur un voisinage de a . Si l'on peut montrer qu'il existe un entier N tel que u_N appartient à ce voisinage, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a , et ce exponentiellement vite, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\rho \in [0; 1[$ tel que $|u_n - a| = O(\rho^n)$. ♦ Au contraire, si $|f'(a)| > 1$, le point fixe est dit *répulsif* : les éléments de la suite ont tendance à s'éloigner de a lorsqu'ils sont dans un certain voisinage de a .

Exemple : Considérons la fonction $f : x \mapsto \sin x$, définie sur le segment $I = [-\pi/2; +\pi/2]$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \pi/2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin u_n$. Il est aisé de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît et admet pour limite le point fixe $a = 0$. Celui-ci est bien attractif : pour tout $x \in I$, il existe, d'après le théorème des accroissements finis, un réel $c \in]0; x[$ tel que $|f(x) - f(0)| = |x - 0| \cdot |\cos(c)| < |x - 0|$.

Cependant, puisque $f'(0) = 1$, la convergence exponentiellement rapide de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 0 n'est pas assurée ! (C'est un exercice classique de montrer que $u_n \sim \sqrt{3/n}$.) Le point 0 est dit *faiblement attractif*.

Au contraire, si un point fixe a vérifie de plus $f'(a) = 0$, la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers a , dès qu'elle est assurée, est plus qu'exponentiellement rapide, et plus précisément en $O(e^{-2^n \alpha})$ pour une certaine valeur de α . On dit alors que la convergence vers a est *quadratique*, alors qu'elle est dite *linéaire* si $|f'(a)| < 1$ et $f'(a) \neq 0$. (Cette terminologie vient du fait que, d'une étape à l'autre, le nombre de décimales gagnées à chaque pas augmente linéairement dans le cas général, mais est doublé à chaque pas dans le cas quadratique.) ♦ Sous des conditions très générales, la méthode de Newton-Raphson pour résoudre l'équation $f(x) = 0$ est à convergence quadratique.

☞ NEWTON.

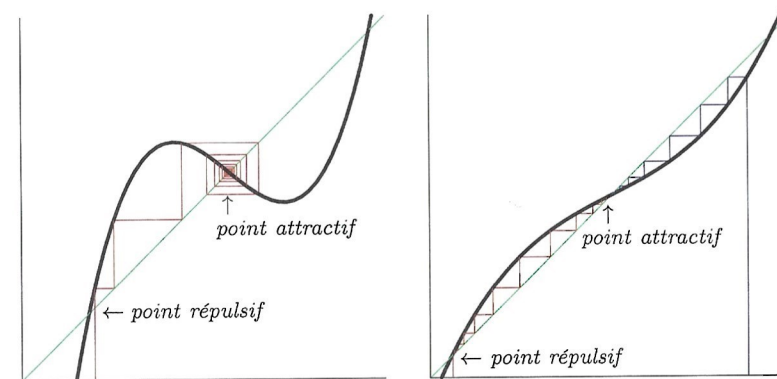


Fig. 6 — À gauche : un point fixe attractif, en un point où la fonction est localement décroissante. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oscille autour de ce point, tout en s'en rapprochant. À droite : Représentation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour deux valeurs distinctes de u_0 . Dans les deux cas, la suite s'éloigne d'un point fixe répulsif et converge vers un point fixe attractif.

☞ CONTRACTANTE, POINT FIXE.

AUTOADJOINT

Endomorphisme autoadjoint Endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien qui est égal à son adjoint. ♦ Il est caractérisé par la relation suivante :

$$\forall x, y \in E \quad \langle u(x)|y \rangle = \langle x|u(y) \rangle.$$

♦ Synonyme : endomorphisme *symétrique*. ♦ La matrice représentative d'un endomorphisme dans une base orthonormée est symétrique si et seulement si cet endomorphisme est autoadjoint. ♦ Dans un espace euclidien, tout endomorphisme autoadjoint est diagonalisable dans une base orthonormée (*THÉORÈME SPECTRAL).

REMARQUE : Cette notion s'étend aux endomorphismes d'un espace hermitien E de dimension finie : un endomorphisme u d'un tel espace est autoadjoint s'il est égal à son adjoint. La matrice représentative de u dans une base orthonormée est alors égale à sa transconjugée. Il est caractérisé par la même relation : $\langle u(x)|y \rangle = \langle x|u(y) \rangle$ valable pour tous $x, y \in E$.

AUTOMORPHISME

Morphisme bijectif d'un ensemble vers lui-même. ♦ Plus spécialement, application linéaire et bijective d'un espace vectoriel E dans lui-même.

REMARQUE : Le groupe $\mathcal{G}(E)$ des automorphismes de E est stable par composition et par passage à l'inverse : si f et g sont deux automorphismes de E , alors $f \circ g$ et f^{-1} sont des automorphismes de E . Ainsi, $(\mathcal{G}(E), \circ)$ est un groupe, non abélien dès que $\dim E \geq 2$.

■ APPLICATION LINÉAIRE, ENDOMORPHISME, GROUPE LINÉAIRE.

AUTONOME

Système différentiel autonome d'ordre 1 Système d'équations différentielles scalaires d'ordre 1 et indépendantes du temps, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

où f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Tout problème de Cauchy admet alors une solution maximale définie sur un ouvert.

Exemple : **Système autonome de Lotka-Volterra**

Système différentiel autonome, non linéaire, introduit dans le but d'étudier des cycles de population de proies et de prédateurs. On note x le nombre de proies et y le nombre de prédateurs ; ces nombres sont considérés comme des réels, fonctions du temps, et évoluent selon le système

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy, \\ \dot{y} = -\ell y + bxy, \end{cases} \quad (S)$$

On peut montrer que les courbes intégrales sont fermées ; en effet, on transforme ce système en une équation (équivalente) à variables *séparables :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(bx - \ell)}{x(k - ay)} = \frac{f(x)}{g(y)}. \quad (E)$$

De l'égalité $f(x) dx = g(y) dy$ on tire, en intégrant et en notant F et G des primitives de f et g :

$$F(x) + G(y) = C^{\text{te}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F(x) = bx - \ell \ln x, \\ G(y) = ay - k \ln y. \end{cases}$$

La fonction $\Phi : (x, y) \mapsto F(x) + G(y)$ est une *intégrale première* du système, c'est-à-dire une quantité invariante dans le temps.

La coupe de cette surface d'équation $z = \Phi(x, y)$ à z constant (courbes rouge et noire sur la figure ci-après) donne les orbites de (E) — et donc de (S) — qui sont donc fermées et bornées puisque Φ diverge vers l'infini quand $\|(x, y)\|$ tend vers l'infini. Ainsi, toutes les

solutions sont périodiques (bien que l'on ne sache pas *a priori* déterminer la période de chacune).

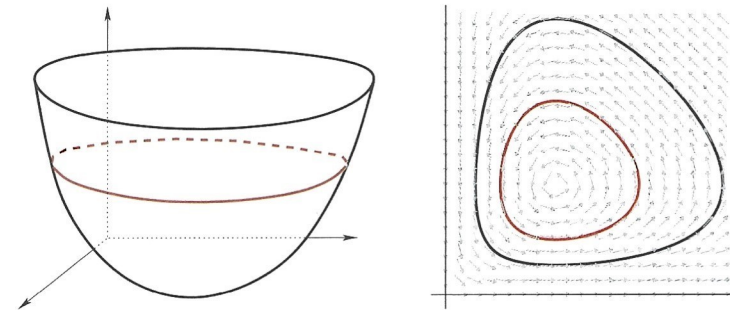


Fig. 7 — À gauche : Allure de l'intégrale première $\Phi(x, y)$. À droite : portrait de phase du système de Lotka-Volterra. Les orbites sont fermées et entièrement déterminées par la valeur de l'intégrale première Φ : ce sont des lignes de *niveau de Φ .

AUXILIAIRE

Inconnues auxiliaires ■ PIVOT.

AXIOME

Proposition dont on admet, sans démonstration, qu'elle est « vraie ». La démonstration d'un théorème requiert donc, en théorie, de fournir un raisonnement se ramenant, *in fine*, aux axiomes de la théorie.

REMARQUE : On prend soin, autant que possible, de choisir un ensemble d'axiomes non contradictoires ; il n'est hélas pas toujours facile, ni même possible, de démontrer la non contradiction d'un système axiomatique.

♦ Les mathématiques habituelles sont basées sur un système axiomatique nommé « ZFC », les deux premières lettres valant pour le système axiomatique de Zermelo et Fraenkel, auquel on adjoint l'axiome du Choix.

REMARQUE : Dans ce système, le principe de récurrence se démontre. En revanche, dans le système axiomatique de Peano, permettant de construire $\mathbb{N}$, le raisonnement par récurrence repose sur un axiome, l'*axiome d'induction*.

■ AXIOME DU *CHOIX, AXIOMATIQUE DE *PEANO.