

B

BAIRE *René Louis* (1874–1932)
(Mathématicien français)

Théorème de Baire Tout espace vectoriel normé complet vérifie la propriété suivante : l'intersection de toute famille dénombrable $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts denses est dense.

REMARQUES : Le théorème de Baire est d'une très grande importance dans de nombreux domaines des mathématiques, et notamment de l'analyse fonctionnelle. En réalité, son énoncé est plus général que celui donné ici. Il s'applique notamment aux espaces métriques complets. ♦ Par passage au complémentaire, on en déduit que : la réunion d'une famille dénombrable $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide. ♦ Les espaces topologiques séparés dans lesquels toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense sont appelés espaces de Baire, et jouissent de propriétés remarquables (théorèmes de Baire-Banach, de Banach-Steinhaus), qui généralisent certaines propriétés vérifiées dans les espaces vectoriels normés de dimension finie.

Exemple : Pour tout rationnel x , l'ensemble $\{x\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, d'intérieur vide. La réunion de tous les $\{x\}$, pour x parcourant l'ensemble dénombrable $\mathbb{Q}$, est égale à $\mathbb{Q}$, qui est donc d'intérieur vide.

BANACH *Stefan* (1892–1945)
(Mathématicien polonais)

Espace de Banach Espace vectoriel normé complet.

✎ ALGÈBRE DE BANACH, ESPACE DE *HILBERT, THÉORÈME DU POINT *FIXE.

Paradoxe de Banach-Tarski ✎ PARADOXE.

BARYCENTRE

Barycentre de n points d'un espace affine Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Soient $(A_1, \dots, A_n)$ des points de $\mathcal{E}$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ des scalaires tels que leur somme $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ soit *non nulle*. Le barycentre G des points *pondérés* $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ est l'unique point de $\mathcal{E}$ vérifiant

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{GA}_k = \mathbf{0}.$$

♦ On peut le définir, à partir de l'origine ou d'un point quelconque Ω de $\mathcal{E}$, par la relation

$$\Omega G = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n \alpha_k \Omega A_k.$$

REMARQUES : Le barycentre est parfois appelé (en physique notamment) centre de masse, ou centre de gravité. ♦ C'est également le point du plan qui minimise la fonction

$$M \mapsto \sum_{k=1}^n \alpha_k \|\mathbf{MA}_k\|^2.$$

✎ ISOBARYCENTRE, TRIANGLE.

BASE

Famille libre et génératrice d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

REMARQUES : Si E est de dimension finie, toutes les bases de E sont de cardinal $n = \dim E$. ♦ Si E est de dimension finie, alors il admet des bases. ♦ En dimension infinie, c'est plus délicat. L'axiome du choix nous permet de prouver que, dans tout espace vectoriel, une base existe ; cependant, il n'est pas toujours possible d'exhiber explicitement une telle base.

♦ Une base, telle que définie ici, est parfois appelée *base algébrique*. Une notion plus lâche de base permet de s'affranchir de la difficulté de ne pas connaître explicitement de base dans certains espaces vectoriels normés de dimension infinie (✎ BASE *HILBERTIENNE).

Exemple : L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ admet $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ comme base. ♦ L'espace $\mathbb{R}[X]$ admet $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ comme base. ♦ L'espace ℓ^2 des séries de carré sommable (✎ ℓ^2) admet des bases, mais aucune n'est connue explicitement. On sait en revanche qu'une base de ℓ^2 est non dénombrable (et donc énorme!).

✎ BASE *CANONIQUE, BASE *ORTHOGONALE, BASE *ORTHONORMÉE.

Base antéduale Si E est un espace vectoriel de dimension finie n et E^* son dual, à toute base $\mathcal{B}^*$ de E^* on peut associer une unique base $\mathcal{B}$ de E dont $\mathcal{B}^*$ est la base duale. La base $\mathcal{B}$ est appelée *antéduale* de la base $\mathcal{B}^*$.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et posons $E = \mathbb{R}_n[X]$. Définissons sur E les formes linéaires $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ par : $\varphi_k : P \mapsto P(k)$. Alors, la famille $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* , dont la base antéduale est la famille $(L_0, \dots, L_n)$ des polynômes élémentaires de *Lagrange associée à la famille $(0, 1, \dots, n)$.

Base directe ✎ ORIENTATION.

Base duale Si E est un espace vectoriel de dimension n , muni d'une base $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$, on définit les formes linéaires e_k^* sur E par leur évaluation sur les éléments de la base $\mathcal{B}$:

$$\forall i, k \in [1; n] \quad e_k^*(e_i) = \delta_{k,i}.$$

La famille $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est alors une base du dual E^* de E , appelée *base duale* de la base $\mathcal{B}$.

REMARQUE : Si φ est une forme linéaire sur E , alors sa décomposition dans la base $\mathcal{B}^*$ est :

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \varphi(e_k) e_k^*.$$

✎ BASE ANTÉDUALE, FORMES *COORDONNÉES, FORME LINÉAIRE, KRONECKER.

Base hilbertienne ✎ HILBERTIEN.

Théorème de la base incomplète Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre. Alors il est possible de compléter cette famille en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$.

Théorème de la base trop complète Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Il est toujours possible d'extraire d'une famille génératrice $(e_1, \dots, e_q)$ une base $(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$, où $i_1, \dots, i_n$ sont des indices distincts de $[1; q]$.

Base propre Une base propre pour $u \in \mathcal{L}(E)$ est une base de E formée de vecteurs propres de u . Dans une telle base, la matrice représentative de u est diagonale.

✎ ADAPTÉE (BASE), FAMILLE LIBRE, FAMILLE GÉNÉRATRICE.

BAYES *Thomas* (1702–1761)
(Mathématicien anglais)

Formule de Bayes Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. Alors les probabilités conditionnelles $P_B(A)$ et $P_A(B)$ sont liées par

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)}.$$

♦ Cette formule se généralise ainsi : soient $(A_i)_{i \in I}$ un système complet ou quasi-complet d'événements et B un événement. On suppose que $P(A_n) > 0$ pour tout $n \in I$ et $P(B) > 0$; alors

$$\forall p \in I \quad P_B(A_p) = \frac{P(A_p) \cdot P_{A_p}(B)}{\sum_{n \in I} P(A_n) \cdot P_{A_n}(B)}.$$

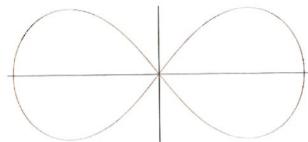
✎ PROBABILITÉ *CONDITIONNELLE, PROBABILITÉS *TOTALES.

BERNOULLI *Jacques (Jakob)* (1654–1705)
(Mathématicien suisse)

Loi de Bernoulli, Variable aléatoire de Bernoulli $\Leftrightarrow$ LOI DE BERNOULLI.

BERNOULLI *Jean 1^{er}* (1667–1748)
(Mathématicien suisse)

Lemniscate de Bernoulli Soient P et P' deux points distincts du plan, l'ensemble des points M du plan tels que $MP \cdot MP' = \frac{1}{4}PP'^2$ décrit une courbe, appelée lemniscate de Bernoulli. $\blacklozenge$ Dans un repère approprié, centré sur le milieu de PP', la lemniscate a pour équation cartésienne $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ et pour équation polaire $\rho^2 = \cos 2\theta$.



BERNSTEIN *Felix* (1878–1956)
(Mathématicien allemand)

Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors ces deux ensembles sont équipotents, c'est-à-dire que l'on peut trouver une bijection φ de E sur F.

REMARQUE : Ce résultat est immédiat pour les ensembles finis. Il fut conjecturé par Cantor dans le cas général et démontré par son élève Bernstein.

BERNSTEIN *Sergueï Natanovitch* (1880–1968)
(Mathématicien ukrainien)

Polynômes de Bernstein Soit $f : [0; 1] \rightarrow F$ une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n -ième polynôme de Bernstein $B_n(f)$ associé à f , de degré n , par

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

REMARQUE : Si $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue, alors la suite de terme général $B_n(f)$ converge uniformément vers f sur I . Cela fournit ainsi une preuve du premier théorème d'approximation de Weierstrass. D'autres preuves, n'utilisant pas les polynômes de Bernstein, existent.

$\Leftrightarrow$ WEIERSTRASS.

BERTRAND *Joseph Louis François* (1822–1900)
(Mathématicien français)

Série de Bertrand Série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$. Une telle série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

REMARQUE : Si l'on note $\ln_k n = \ln(\ln(\ln \dots \ln n))$ (itéré k fois), alors une série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln_2 n \cdot \dots \ln_p n \cdot (\ln_{p+1} n)^\alpha}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Postulat de Bertrand Pour tout n entier, il existe un entier premier p compris entre n et $2n$. Bertrand postula ce résultat après l'avoir vérifié pour tout entier $n \leq 3\,000\,000$. Il fut démontré en 1851 par Tchebychev.

BESSEL *Friedrich Wilhelm* (1784–1846)
(Astronome et mathématicien allemand)

Fonctions de Bessel Famille de fonctions de la variable complexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction J_n est définie sur $\mathbb{C}$ par

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz \sin t} e^{-int} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - z \sin t) dt.$$

REMARQUES : $J_n(z)$ est donc le n -ième coefficient de Fourier de $t \mapsto e^{iz \sin t}$ et, d'après le théorème de Dirichlet, on a le développement

$$e^{iz \sin t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) e^{int}.$$

$\blacklozenge$ La fonction J_n est solution de l'équation différentielle $t^2 x'' + t x' + (t^2 - n^2)x = 0$.
 $\blacklozenge$ Les fonctions J_n sont utilisées en mathématiques comme en physique, notamment dans les phénomènes de diffraction à travers une pupille circulaire.

Inégalité de Bessel Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n, \dots)$ est une famille orthonormée d'un espace vectoriel préhilbertien E, alors pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^n |\langle e_k | x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Notamment, si la famille est infinie, la série de terme général $|\langle e_k | x \rangle|^2$ est convergente et sa somme est inférieure ou égale à $\|x\|^2$.

REMARQUE : Il n'y a égalité pour tout $x \in E$ que si le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{B}$ est dense dans E.

$\Leftrightarrow$ PARSEVAL.

BÉZOUT *Étienne* (1730–1783)
(Mathématicien français)

Relation de Bézout Soient a et b deux entiers. Alors il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que $au + bv = a \wedge b$. $\blacklozenge$ Soient A et B deux polynômes. Alors il existe un couple (U, V) de polynômes tel que $AU + BV = A \wedge B$.

REMARQUES : Dans les deux cas, le couple (u, v) ou (U, V) peut être déterminé au moyen de l'algorithme d'Euclide. $\blacklozenge$ Il n'y a pas de réciproque : ce n'est pas parce qu'il existe des entiers u et v tels que $au + bv = d$ que $a \wedge b = d$. Toutefois, dans le cas $d = 1$, cette réciproque est vraie ($\Leftrightarrow$ THÉORÈME DE *BÉZOUT).

$\Leftrightarrow$ EUCLIDE, PGCD.

Théorème de Bézout Les entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$. $\blacklozenge$ Les polynômes A et B de $K[X]$ sont premiers entre eux si et seulement si il existe $(U, V) \in K[X]^2$ tel que $AU + BV = 1$.

BIAIS

Soit T_n un estimateur de θ . Le biais de T_n est $E(T_n) - \theta$.

$\Leftrightarrow$ ESTIMATEUR.

BICONTINUE (BIJECTION)

Bijection φ continue, ainsi que sa réciproque φ^{-1} . Également appelée *homéomorphisme*.

☞ DIFFÉOMORPHISME.

BIDUAL

Le bidual d'un espace vectoriel E est le dual E^{**} de l'espace E^* , lui-même dual de E .

REMARQUES : À tout vecteur $x \in E$, on peut associer l'application $\psi_x : E^* \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $\psi_x(\varphi) = \varphi(x)$ pour toute forme linéaire $\varphi \in E^*$. L'application $x \mapsto \psi_x$ est linéaire et injective : c'est l'*injection canonique* de E dans E^{**} . ♦ Si E est de dimension finie, alors son bidual est de même dimension que lui et l'injection canonique est une bijection : ainsi, E et son bidual sont canoniquement isomorphes.

BIENAYMÉ Irénée-Jules (1796–1876)

(Mathématicien français)

Égalité de Bienaymé Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes admettant chacune une variance, alors leur somme $X_1 + \dots + X_n$ admet une variance et

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, admettant un moment d'ordre 2. Notons $m = \mathbf{E}(X)$ l'espérance de X , σ^2 sa variance et notons $X^* = (X - m)/\sigma$ la variable centrée réduite. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbf{P}[|X - m| \geq \varepsilon] \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}, \quad \text{ou encore} \quad \mathbf{P}[|X^*| \geq \varepsilon] \leq \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

☞ LOI DES *GRANDS NOMBRES.

BIFOCAL

Une ellipse ou une hyperbole non dégénérées peuvent être définies géométriquement par la donnée de deux points F et F' , appelés *foyers*, et un paramètre $a > 0$, comme l'ensemble des points M du plan vérifiant

$$MF + MF' = 2a \quad \text{ellipse}$$

$$|MF - MF'| = 2a. \quad \text{hyperbole}$$

☞ ELLIPSE, HYPERBOLE.

BIJECTION

Soient A et B deux ensembles quelconques. Une application $f : A \rightarrow B$ est *bijjective* si elle est à la fois injective et surjective, ce qui revient à dire qu'il existe une unique application $g : B \rightarrow A$ telle que $f \circ g = \text{Id}_B$ et $g \circ f = \text{Id}_A$.

REMARQUE : Si f est une bijection de A vers B et si l'un des ensembles est fini, alors l'autre l'est également et ils sont de même cardinal.

☞ AUTOMORPHISME, ISOMORPHISME.

Théorème de la bijection monotone Soit $I = [a; b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une application continue et strictement monotone sur I . Alors f établit une bijection entre I et le segment J dont les extrémités sont $f(a)$ et $f(b)$. ♦ Ce résultat se généralise au cas où I est un intervalle quelconque. Par exemple, si $I = [a; b[$ et si f est décroissante, alors on pose $J =]f(b^-); f(a)]$, où $f(b^-)$ désigne la limite à gauche de f en b , limite qui existe nécessairement dans $\overline{\mathbb{R}}$.

I	f croissante	f décroissante
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$[f(a); f(b^-)[$	$]f(b^-); f(a)]$
$]a; b]$	$]f(a^+); f(b)]$	$]f(b); f(a^+)[$
$]a; b[$	$]f(a^+); f(b^-)[$	$]f(b^-); f(a^+)[$

REMARQUES : Ce théorème est fréquemment utilisé ainsi : pour tout y de l'intervalle J , l'équation $f(x) = y$ admet une et une seule solution dans I . ♦ Plus généralement, ce théorème est utilisé, de manière totalement implicite, chaque fois que l'on tire des conclusions de l'examen du tableau de variations d'une fonction. ♦ Remarquons enfin que la fonction f fait davantage qu'établir une bijection entre I et J , elle établit un homéomorphisme, c'est-à-dire une bijection dont la réciproque f^{-1} est elle-même continue.

BILINÉAIRE

Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Une application $B : E \times F \rightarrow G$ est dite bilinéaire si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables :

- pour tout $y \in F$, $x \mapsto B(x, y)$ est linéaire;
- pour tout $x \in E$, $y \mapsto B(x, y)$ est linéaire.

Exemples :

- Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, l'application définie sur $\mathbb{K} \times E$ par $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est bilinéaire.
- Si E est un espace préhilbertien réel, le produit scalaire $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $\varphi : (x, y) \mapsto \langle x | y \rangle$, est bilinéaire.

☞ FORME BILINÉAIRE.

BINAIRE

Relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E Partie R du produit cartésien $E \times E$. On écrit $x\mathcal{R}y$ lorsque $(x, y) \in R$. ♦ Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E peut vérifier une ou plusieurs des propriétés suivantes :

- *réflexivité* : pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$;
- *symétrie* : pour tous $x, y \in E$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$;
- *antisymétrie* : pour tous $x, y \in E$, $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$;
- *transitivité* : pour tous $x, y, z \in E$, $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Exemples : La relation $\leq$ est une relation binaire sur $\mathbb{R}$. ♦ La relation de *similitude entre matrices est une relation binaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ♦ La relation $\subset$ est une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$. ♦ La relation définie par « $a|b$ » si a divise b est une relation binaire sur $\mathbb{Z}$.

☞ ÉQUIVALENCE, ORDRE.

BINÔME DE NEWTON

Soient a et b deux réels ou, plus généralement, deux éléments d'un anneau qui commutent ($ab = ba$). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

REMARQUES : Cette relation est valable dans tout anneau commutatif mais également dans un anneau non commutatif comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque les matrices commutent, et notamment lorsque $A = I_n$. ♦ Dans le cas des réels, on a une formule valable pour une puissance négative. Si n est un entier naturel, on a, pour tout $x \in]-1; +1[$, le développement en série (convergente)

$$(1 + x)^{-n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} x^k$$

qui n'est qu'un cas particulier du développement en série entière

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k,$$

et que l'on peut réécrire sous la forme

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k,$$

en introduisant les coefficients **binomiaux généralisés* (formule du *binôme négatif*). ♦ Newton a généralisé cette formule pour tout complexe z tel que $|z| < 1$ et pour toute puissance n complexe. ♦ Elle fonctionne plus généralement dans toute algèbre normée complète (algèbre de **Banach*) : si b est inversible et si $\|a \cdot b^{-1}\| < 1$ alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a le développement (convergent)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

✎ BINOMIAL.

BINOMIAL

Coefficients binomiaux Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [0; n]$. On définit le coefficient binomial

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On prononce « k parmi n ». ♦ Si $k > n$ ou $k < 0$, on pose par définition $\binom{n}{k} = 0$. ♦ On peut également introduire des *coefficients binomiaux généralisés* : si p est un entier (positif ou négatif), voire un complexe quelconque, et si q est un entier naturel, on pose

$$\binom{p}{q} = \frac{1}{q!} \prod_{i=0}^{q-1} (p-i) = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-q+1)}{q!}.$$

Cette définition permet d'écrire la formule du binôme négatif.

REMARQUES : Le nombre $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. ♦ C'est donc également le nombre de choix possibles de k éléments distincts parmi n , étant entendu que l'on ne tient pas compte de l'ordre. ♦ Si $n \geq 0$ et $k \in [0; n]$, on a les formules et propriétés suivantes :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (\text{symétrie})$$

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (*\text{Pascal})$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (*\text{binôme de Newton})$$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad (*\text{Leibniz})$$

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} \quad (*\text{Vandermonde})$$

♦ Quant aux coefficients binomiaux généralisés, ils sont reliés à la fonction Γ d'Euler (✎ GAMMA) par

$$\binom{n}{k} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)},$$

ce qui permet de les généraliser à des valeurs complexes de n et k , à condition que ni n , ni k , ni $n-k$ ne soient entiers strictement négatifs.

Loi binomiale, variable aléatoire binomiale ✎ LOI.

BINORMAL

✎ REPÈRE DE *FRENET DANS L'ESPACE.

BIRÉGULIER

Arc birégulier Arc γ de classe $\mathcal{C}^2$ dont tous les points sont biréguliers. (Cette notion est invariante par tout changement de paramétrage φ qui soit un $\mathcal{C}^2$ -difféomorphisme.)

REMARQUE : Si γ est birégulier alors l'angle de relèvement est un paramétrage admissible, c'est-à-dire que l'application $t \mapsto \alpha(t)$ est un $\mathcal{C}^2$ -difféomorphisme.

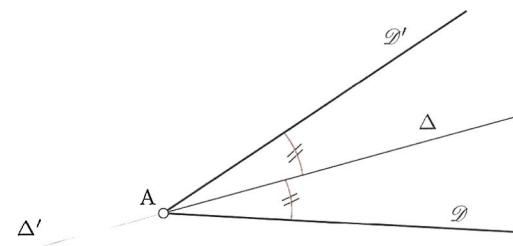
Point birégulier Point $M(t)$ d'un arc γ de classe $\mathcal{C}^2$ en lequel la famille $(\gamma'(t), \gamma''(t))$ est libre.

REMARQUE : Si $M(t)$ est un point régulier de l'arc γ , alors il est birégulier si et seulement si la courbure en $M(t)$ est non nulle.

✎ ENTIER *CARACTÉRISTIQUE, PARAMÉTRAGE, POINT D'INFLEXION, RELÈVEMENT.

BISSECTRICE

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux demi-droites du plan euclidien, de même origine A . Une bissectrice de ces demi-droites est une demi-droite Δ d'origine A telle que les angles orientés de demi-droites $(\widehat{\mathcal{D}, \Delta})$ et $(\widehat{\Delta, \mathcal{D}'})$ soient égaux. La demi-droite Δ' opposée à Δ est également une bissectrice.

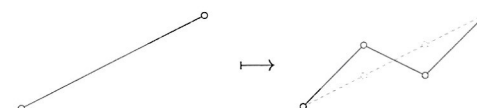


✎ TRIANGLE.

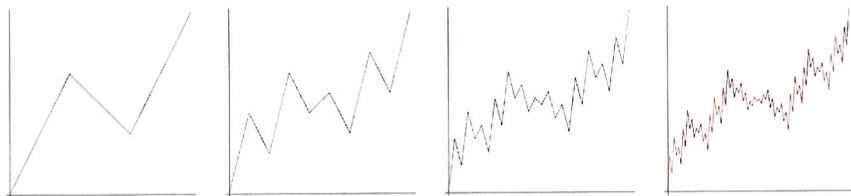
BOLZANO *Bernhard* (1781–1848)

(Mathématicien, philosophe et théologien tchèque)

Courbe de Bolzano Un des premiers exemples de fonctions continues sur $[0; 1]$ mais dérivable en aucun point a été donné par Bolzano. Cette fonction f est la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les graphes sont obtenus itérativement en brisant chaque ligne selon le schéma suivant :



On obtient, en partant de la fonction identité sur $[0; 1]$, la séquence ci-dessous.

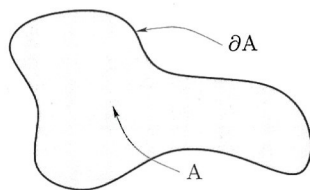


Théorème de Bolzano-Weierstrass De toute suite réelle bornée d'éléments de $\mathbb{R}$, on peut extraire une suite convergente. ♦ Ce résultat reste valable si la suite est à valeurs dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, ainsi que dans tout espace vectoriel normé de dimension finie.

☞ COMPACT, COMPLET.

BORD

Si A est un domaine du plan et délimité par un arc régulier simple et fermé γ , son bord ∂A est le support de cet arc, que l'on oriente généralement dans le sens direct.



☞ GREEN, JORDAN.

BOREL *Émile* (1871–1956)
(Mathématicien français)

Théorème de Borel Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels, il existe une application $f : [-1; +1] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que $f^{(n)}(0) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Axiome ou propriété de Borel-Lebesgue Une partie A d'un espace vectoriel normé (ou d'un espace métrique) vérifie la propriété de Borel-Lebesgue si, de tout recouvrement ouvert de A , on peut extraire un sous-recouvrement de cardinal fini.

REMARQUE : Dans un espace vectoriel normé, cette propriété est équivalente à la propriété de compacité. Dans un espace topologique séparé, elle définit la notion de compact et implique que toute suite à valeurs dans ce compact admet une sous-suite convergente.

☞ COMPACT, MÉTRIQUE, RECOUVREMENT, TOPOLOGIQUE.

Théorème de Borel-Lebesgue Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.

Tribu des boréliens Plus petite tribu sur $\mathbb{R}$ qui contienne tous les intervalles $] -\infty; x]$ pour x parcourant $\mathbb{R}$. ♦ Elle contient notamment tous les ouverts et tous les fermés de $\mathbb{R}$. ♦ Ses éléments sont appelés les *boréliens*.

☞ ÉVÉNEMENT, FONCTION DE RÉPARTITION, TRIBU, VARIABLE ALÉATOIRE.

BORNE

Borne supérieure Soit A une partie majorée d'un ensemble ordonné. Sa borne supérieure, si elle existe, est le plus petit de ses majorants. On la note $\sup A$. ♦ L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels possède la *propriété de la borne supérieure*, qui s'énonce ainsi : *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure*.

REMARQUES : Si A est une partie majorée de $\mathbb{R}$, alors elle admet une borne supérieure. ♦ Contrairement au plus grand élément de A (s'il existe!), la borne supérieure n'est pas forcément dans A . Ainsi, $\sup[0; 1[= 1$. ♦ Une partie de $\mathbb{Q}$ n'admet pas forcément de borne supérieure; ainsi $\{x \in \mathbb{Q} ; x^2 \leq 2\}$ n'en admet pas.

☞ MAXIMUM, MINIMUM, GRAND, PASSAGE À LA BORNE SUPÉRIEURE, PETIT.

Borne inférieure Soit A une partie minorée d'un ensemble ordonné. Sa borne inférieure, si elle existe, est le plus grand de ses minorants. On la note $\inf A$. ♦ Par symétrie, *toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure*.

BORNÉ

Partie réelle bornée Partie A de $\mathbb{R}$ minorée et majorée; en d'autres termes, c'est une partie telle que

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad |a| \leq M.$$

Partie bornée d'un espace vectoriel normé E Partie A de E telle qu'il existe un majorant à l'ensemble des normes des éléments de A :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad \|a\| \leq M.$$

Fonction bornée Fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dont l'image $f(I)$ est bornée, c'est-à-dire telle que

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad |f(x)| \leq M.$$

♦ Cette notion s'étend sans peine aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé ou dans un espace métrique.

☞ MAJORÉ.

Suite bornée Suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\{|u_n| ; n \in \mathbb{N}\}$ est borné, c'est-à-dire telle que

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M.$$

REMARQUES : On retiendra que toute suite convergente est bornée et que toute suite réelle croissante et majorée est convergente. ♦ La définition d'une suite bornée n'est qu'un cas particulier de la définition d'une fonction bornée, toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans un ensemble E étant en réalité une fonction $u : \mathbb{N} \rightarrow E$.

☞ BOLZANO-WEIERSTRASS.

BOULES

Boule ouverte Soient (E, N) un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r \geq 0$. On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble

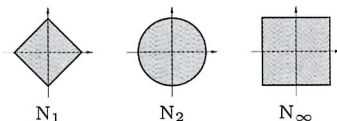
$$\mathcal{B}_N(a; r) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \{x \in E ; N(x - a) < r\}.$$

☞ OUVERT, VOISINAGE.

Boule fermée On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\bar{\mathcal{B}}_N(a; r) \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} \{x \in E ; N(x - a) \leq r\}.$$

Exemple : Munissons $\mathbb{R}^2$ des trois normes usuelles définies, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par : $N_1(x, y) = |x| + |y|$, $N_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $N_\infty(x, y) = \max(|x|, |y|)$. Pour chacune de ces trois normes, les boules unité fermées ont l'allure suivante :



Les comparaisons $N_\infty \leq N_2 \leq N_1$ impliquent $\mathcal{B}_1(0; 1) \subset \mathcal{B}_2(0; 1) \subset \mathcal{B}_\infty(0; 1)$.

☞ FERMÉ.

BRANCHE INFINIE

Soient (I, f) un arc paramétré et t_0 une extrémité de I (cette extrémité peut être $+\infty$ ou $-\infty$). On dit que cet arc admet une branche infinie en t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t)\| = +\infty$.

☞ ASYMPTOTE, ASYMPTOTIQUE (DIRECTION).

Branche parabolique ☞ ASYMPTOTIQUE (DIRECTION).

C

C

Ensemble des nombres complexes. ♦ Cet ensemble peut être muni de plusieurs structures :

- Muni de l'addition et de la multiplication des complexes (☞ COMPLEXE), $\mathbb{C}$ a une structure de corps commutatif, de caractéristique nulle.
- En tant que corps, c'est également un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1. Parfois, il est utile de le considérer comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2, dont une base est $(1, i)$.
- Muni du module, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est un espace vectoriel normé complet. Les compacts de $\mathbb{C}$ sont les fermés bornés.
- $\mathbb{C}$ est algébriquement clos : tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{C}$ se décompose en un produit de polynômes de degré 1 (☞ THÉORÈME DE D'ALEMBERT-GAUSS).
- On ne peut pas munir $\mathbb{C}$ d'un ordre total qui soit compatible avec sa structure de corps (☞ CORPS ORDONNÉ) ; en d'autres termes, il n'y a pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ qui soit utilisable en analyse ! (☞ RELATION D'ORDRE.)

REMARQUE : CONSTRUCTION DE $\mathbb{C}$ — Il existe plusieurs manières de « construire » le corps $\mathbb{C}$ des complexes. Par exemple (construction de Hamilton), considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et notons $1 = (1, 0)$ et $i = (0, 1)$ les vecteurs de sa base canonique. Définissons la loi interne multiplication par $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$ et la loi d'addition par $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$. Muni de ces deux opérations, $\mathbb{R}^2$, désormais noté $\mathbb{C}$, est un corps, d'élément neutre 1 pour la multiplication. L'inverse d'un élément $(a, b) \neq (0, 0)$ est $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$. Cette construction montre clairement la structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{C}$.

☞ ALEMBERT, ARGUMENT, COMPLEXE, CONJUGUÉ, MODULE, UNIMODULAIRE.

C^k

☞ CLASSE, DIFFÉOMORPHISME.

CANONIQUE

Terme synonyme de *intrinsèque*, *naturel* ou, dans certains cas, *ne dépendant pas du choix d'une base*. Son sens précis dépend du contexte.

Base canonique de $\mathbb{K}^n$ Base $(e_1, \dots, e_n)$ définie par $e_k = (\delta_{ik})_{i=1, \dots, n}$, c'est-à-dire

$$e_k = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{1}, 0, \dots, 0).$$

REMARQUE : Les coordonnées naturelles d'un élément de $\mathbb{K}^n$ (qui est un n -uplet d'éléments de $\mathbb{K}$) sont précisément ses coordonnées dans la base canonique : raison pour laquelle on la nomme justement base canonique. C'est à ce titre que fort peu d'espaces vectoriels peuvent se prévaloir de posséder une base canonique.

Base canonique de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ Base $(E_{11}, \dots, E_{p1}, E_{12}, \dots, E_{p2}, \dots, E_{1q}, \dots, E_{pq})$ où $E_{k,\ell}$ est la matrice de coefficients $(\delta_{ik} \delta_{j\ell})_{ij}$.

$$E_{k,\ell} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow k$$

$\uparrow$
 ℓ

☞ KRONECKER.