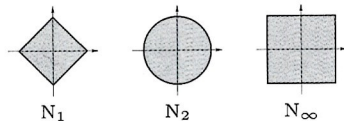


Exemple : Munissons $\mathbb{R}^2$ des trois normes usuelles définies, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par : $N_1(x, y) = |x| + |y|$, $N_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $N_\infty(x, y) = \max(|x|, |y|)$. Pour chacune de ces trois normes, les boules unité fermées ont l'allure suivante :



Les comparaisons $N_\infty \leq N_2 \leq N_1$ impliquent $\mathcal{B}_1(0; 1) \subset \mathcal{B}_2(0; 1) \subset \mathcal{B}_\infty(0; 1)$.

☞ FERMÉ.

BRANCHE INFINIE

Soient (I, f) un arc paramétré et t_0 une extrémité de I (cette extrémité peut être $+\infty$ ou $-\infty$). On dit que cet arc admet une branche infinie en t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t)\| = +\infty$.

☞ ASYMPTOTE, ASYMPTOTIQUE (DIRECTION).

Branche parabolique ☞ ASYMPTOTIQUE (DIRECTION).

C

C

Ensemble des nombres complexes. ♦ Cet ensemble peut être muni de plusieurs structures :

- Muni de l'addition et de la multiplication des complexes (☞ COMPLEXE), $\mathbb{C}$ a une structure de corps commutatif, de caractéristique nulle.
- En tant que corps, c'est également un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1. Parfois, il est utile de le considérer comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2, dont une base est $(1, i)$.
- Muni du module, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est un espace vectoriel normé complet. Les compacts de $\mathbb{C}$ sont les fermés bornés.
- $\mathbb{C}$ est *algébriquement clos* : tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{C}$ se décompose en un produit de polynômes de degré 1 (☞ THÉORÈME DE D'ALEMBERT-GAUSS).
- On ne peut pas munir $\mathbb{C}$ d'un ordre total qui soit compatible avec sa structure de corps (☞ CORPS ORDONNÉ); en d'autres termes, il n'y a pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ qui soit utilisable en analyse! (☞ RELATION D'ORDRE.)

REMARQUE : CONSTRUCTION DE $\mathbb{C}$ — Il existe plusieurs manières de « construire » le corps $\mathbb{C}$ des complexes. Par exemple (construction de Hamilton), considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et notons $1 = (1, 0)$ et $i = (0, 1)$ les vecteurs de sa base canonique. Définissons la loi interne multiplication par $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$ et la loi d'addition par $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$. Muni de ces deux opérations, $\mathbb{R}^2$, désormais noté $\mathbb{C}$, est un corps, d'élément neutre 1 pour la multiplication. L'inverse d'un élément $(a, b) \neq (0, 0)$ est $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$. Cette construction montre clairement la structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{C}$.

☞ ALEMBERT, ARGUMENT, COMPLEXE, CONJUGUÉ, MODULE, UNIMODULAIRE.

$\mathcal{C}^k$

☞ CLASSE, DIFFÉOMORPHISME.

CANONIQUE

Terme synonyme de *intrinsèque*, *naturel* ou, dans certains cas, *ne dépendant pas du choix d'une base*. Son sens précis dépend du contexte.

Base canonique de $\mathbb{K}^n$ Base $(e_1, \dots, e_n)$ définie par $e_k = (\delta_{ik})_{i=1, \dots, n}$, c'est-à-dire

$$e_k = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{1}, 0, \dots, 0).$$

REMARQUE : Les coordonnées naturelles d'un élément de $\mathbb{K}^n$ (qui est un n -uplet d'éléments de $\mathbb{K}$) sont précisément ses coordonnées dans la base canonique : raison pour laquelle on la nomme justement base canonique. C'est à ce titre que fort peu d'espaces vectoriels peuvent se prévaloir de posséder une base canonique.

Base canonique de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ Base $(E_{11}, \dots, E_{p1}, E_{12}, \dots, E_{p2}, \dots, E_{1q}, \dots, E_{pq})$ où $E_{k,\ell}$ est la matrice de coefficients $(\delta_{ik} \delta_{j\ell})_{ij}$.

$$E_{k,\ell} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow k$$

$\uparrow$
 ℓ

☞ KRONECKER.

Endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à une matrice Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. L'application linéaire $\tilde{M} : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par $\tilde{M} : X \mapsto MX$ est appelée endomorphisme canoniquement associé à M . ♦ Sa matrice représentative dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est M .

REMARQUE : Identifions les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (≡ ISOMORPHISME *CANONIQUE); on peut alors effectuer le produit Mx d'une matrice carrée par un vecteur de $\mathbb{K}^n$. L'application $x \mapsto Mx$ est alors l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M .

Injection canonique Si A est une partie d'un ensemble B , l'application $\varphi : A \rightarrow B$ définie par $\varphi : x \mapsto x$ est appelée injection canonique de A vers B . ♦ On parle également d'injection canonique d'un espace vectoriel dans son bidual. ≡ BIDUAL.

Isomorphisme canonique On parle d'isomorphisme canonique entre deux espaces E et F lorsqu'il existe un isomorphisme « naturel », qui est celui auquel tout le monde pense sans que l'on ait besoin de le préciser.

Exemple : Les espaces $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ sont canoniquement isomorphes, l'isomorphisme canonique étant

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto (x_1, \dots, x_n).$$

REMARQUE : Lorsque deux espaces sont canoniquement isomorphes, il est habituel de les identifier. ≡ ISOMORPHISME.

♦ On parle également d'isomorphisme canonique pour insister sur le fait qu'un certain isomorphisme ne dépend pas d'un choix de base.

Exemple : Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Son dual E^* étant de même dimension, il lui est isomorphe. Un isomorphisme entre E et E^* peut être construit de la manière suivante. Munissons E d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et construisons sa base duale $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$. Alors, à tout vecteur $x = \sum x_k e_k$, on peut associer la forme linéaire $\varphi_x = \sum x_k e_k^*$. L'application $\Phi : x \mapsto \varphi_x$ est un isomorphisme entre E et E^* . Malheureusement, il dépend du choix de la base $\mathcal{B}$. ♦ Munissons maintenant E d'une structure euclidienne en définissant un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$. L'espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est alors canoniquement isomorphe à E^* : à tout vecteur $x \in E$, on associe la forme linéaire $\psi_x : y \mapsto \langle x | y \rangle$. L'application $\Psi : x \mapsto \psi_x$ est un isomorphisme entre E et E^* ; il ne dépend du choix d'aucune base. (Bien sûr, il dépend du choix de la structure euclidienne choisie sur E .) ♦ Enfin, si E est de dimension finie, alors E et son bidual E^{**} sont canoniquement isomorphes, l'isomorphisme canonique étant $x \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(x))$ et ne dépendant, cette fois, d'aucun choix. ≡ BIDUAL.

Forme canonique d'un trinôme du second degré Si $a \neq 0$, un trinôme du second degré $P = aX^2 + bX + c$ se factorise sous la forme

$$P(X) = a \left(X + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant du trinôme.

Surjection canonique Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$; notons $E/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalences modulo $\mathcal{R}$. L'application $\varphi : E \rightarrow E/\mathcal{R}$ qui à tout élément x de E associe la classe d'équivalence de x est appelée surjection canonique.

Exemple : Si n est un entier naturel non nul, l'application $\pi_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui à tout entier k associe sa classe $\bar{k}$ modulo n est un morphisme de groupes surjectif, dont le noyau est $n\mathbb{Z}$.

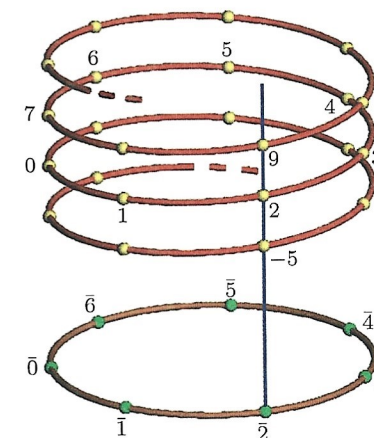


Fig. 8 — La surjection canonique $\pi_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ envoie tout entier k sur sa classe $\bar{k}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Sur cette image, on a pris $n = 7$. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est représenté sur une hélice doublement infinie; la droite bleue représente la surjection π_7 . L'ensemble des entiers dont l'image est $\bar{2}$ est l'ensemble $2 + 7\mathbb{Z}$.

CANTOR Georg (1845–1918)
(Mathématicien allemand)

« L'essence des mathématiques est dans leur liberté. »

Ensemble triadique de Cantor Ensemble des réels pouvant s'écrire sous la forme $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, où la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\{0, 2\}$. ♦ C'est une partie non dénombrable de $[0; 1]$, d'intérieur vide, dont le complémentaire dans $[0; 1]$ est dense. On peut le construire par récurrence de la manière suivante. On retranche au segment $[0; 1]$ l'intervalle ouvert $]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[$; puis, à chacun des segments restants, on retranche l'intervalle ouvert correspondant au tiers du milieu; et ainsi de suite.



Fig. 9 — Construction de l'ensemble triadique de Cantor : les sept premières itérations.

Théorème de Cantor Soit A un ensemble; alors il ne peut exister de bijection entre A et l'ensemble $\mathfrak{P}(A)$ de ses parties. ♦ En d'autres termes, $\text{Card } \mathfrak{P}(A) > \text{Card } A$.

Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein ≡ BERNSTEIN (FELIX).

CARACTÉRISTIQUE

Caractéristique d'un corps K Considérons le morphisme d'anneaux $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow K$ défini par $\varphi(k) = k1_K$, c'est-à-dire $\varphi(k) = 1_K + 1_K + \dots + 1_K$ (k fois) si $k \geq 0$, tandis que $\varphi(k) = -\varphi(-k)$ si $k \leq 0$. Si φ est injectif, on dit que le corps K est de *caractéristique nulle*. Sinon, le noyau de φ étant un idéal de $\mathbb{Z}$, il est de la forme $p\mathbb{Z}$ où p est un

entier non nul; on dit alors que K est de *caractéristique* p . ♦ Ce nombre est alors nécessairement un entier premier, car K est intègre.

REMARQUE : Si k est un entier naturel non nul, la notation $k1_K$ représente $1_K + 1_K + \dots + 1_K$ (k fois). Ainsi, on peut avoir $p1_K = 0$ bien que p soit non nul, et bien que le corps n'admette pas de diviseur de zéro : dans l'expression $p1_K$, on n'a pas affaire à un produit de deux éléments du corps (1_K est élément de K , p est un élément de $\mathbb{N}$), mais à une succession d'additions, que l'on note « multiplicativement ».

Exemples : Les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont de caractéristique nulle. ♦ Si p est un entier premier, le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est de caractéristique p .

☞ CORPS, IDÉAL, GÉNÉRATEUR, MORPHISME.

Entiers caractéristiques Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré et soit $t_0 \in I$. On appelle *premier entier caractéristique* en t_0 le plus petit entier vérifiant $\gamma^{(p)}(t_0) \neq 0$. ♦ On appelle *second entier caractéristique* en t_0 le plus petit entier $q > p$ tel que la famille $(\gamma^{(p)}(t_0), \gamma^{(q)}(t_0))$ est libre.

☞ POINT *BIRÉGULIER, POINT DE REBROUSSEMENT.

Fonction caractéristique Soit A une partie d'un ensemble E . La fonction caractéristique de A est la fonction $\chi_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, et $\chi_A(x) = 0$ sinon. ♦ Synonyme : fonction indicatrice.

Exemple : La fonction de Heaviside est la fonction caractéristique de $\mathbb{R}^+$. ☞ HEAVISIDE.

Polynôme caractéristique ☞ POLYNÔME.

Sous-espace caractéristique Soit E un espace vectoriel réel ou complexe, de dimension finie n . Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme et λ un scalaire, le sous-espace caractéristique associé est

$$F_\lambda(u) \stackrel{\text{déf.}}{=} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})^k.$$

REMARQUE : Cette union est en réalité une union finie et l'on peut se contenter de sommer pour k inférieur ou égal à la multiplicité $m(\lambda)$ de λ en tant que valeur propre de u . ♦ Le sous-espace caractéristique $F_\lambda(u)$ contient notamment le sous-espace propre $E_\lambda(u)$. Sa dimension est égale à la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique. ♦ Enfin, si E est un espace complexe (toujours de dimension finie), alors E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques de u .

☞ LEMME DE DÉCOMPOSITION DES *NOYAUX.

Propriété caractéristique Une propriété est dite *caractéristique* d'une autre, ou la *caractérise*, si elle lui est logiquement équivalente, c'est-à-dire si elle est à la fois nécessaire et suffisante.

Exemples : Une propriété caractéristique d'un compact d'un espace vectoriel normé de dimension finie est d'être à la fois fermé et borné. ♦ Une propriété caractéristique des triangles équilatéraux est d'avoir trois angles égaux. ♦ Une propriété caractéristique la diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie est que la dimension de l'espace ambiant est égale à la somme des dimensions des sous-espaces propres.

CARDINAL

La notion de cardinal a été étudiée par Cantor, en lien avec la théorie des ordinaux, pour généraliser la notion intuitive de « nombre d'éléments » dans un ensemble fini. Si E est un ensemble fini, alors le cardinal de E est l'unique entier tel que E puisse être mis en bijection avec $[1; n]$. ♦ Si E est infini, la notion de cardinal est plus délicate. Disons simplement ici que deux ensembles seront dits de même cardinal s'ils sont équipotents, c'est-à-dire s'il existe une bijection de l'un sur l'autre. Cela permet de montrer qu'il existe différents cardinaux infinis. ♦ On note $\text{Card } A$ le cardinal d'un ensemble A . ♦ Si G est un groupe fini, son cardinal est souvent noté $|G|$.

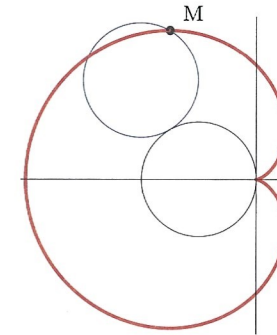
Exemple : Le cardinal de l'ensemble vide est 0. Pour tout entier naturel n non nul, $\text{Card}([1; n]) = n$. ♦ Le cardinal du groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $[1; n]$ est égal à $n!$. ♦ Le cardinal de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est noté $\aleph_0$ (aleph-zéro). ☞ ALEPH.

REMARQUE : Cantor montra que, pour tout ensemble A fini ou infini, le cardinal de l'ensemble $\mathfrak{P}(A)$ des parties de A est strictement supérieur au cardinal de A . En itérant le processus, on prouve donc qu'il existe une infinité de cardinaux infinis distincts.

☞ ALEPH, DÉNOMBRABLE, ÉQUIPOTENTS.

CARDIOÏDE

Courbe d'équation polaire $\rho = 2a(1 - \cos \theta)$. C'est une courbe à un point de rebroussement, engendrée par un point M d'un cercle de rayon a roulant sans glissement sur un autre cercle de même rayon, et passant par l'origine. Sa longueur est $16a$ et son aire $6\pi a^2$. ♦ C'est un cas particulier d'épicycloïde, famille de courbes engendrées par un point d'un cercle roulant sur un autre cercle.



CARTÉSIEN

☞ COORDONNÉES CARTÉSIENNES, PRODUIT CARTÉSIEN.

CAUCHY *Augustin-Louis* (1789–1857)

(Mathématicien français)

Suite de Cauchy On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ vérifie le *critère de Cauchy* ou, plus simplement, est une suite de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \quad p, q \geq N \implies \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon.$$

REMARQUES : Toute suite de Cauchy est bornée. ♦ Toute suite convergente est de Cauchy. ♦ Toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence est convergente et sa limite est cette valeur d'adhérence. ♦ Dans un espace vectoriel normé complet ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et les espaces vectoriels normés de dimension finie notamment), toute suite de Cauchy est convergente.

Suite de Cauchy uniforme Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un même ensemble A et à valeurs dans un espace vectoriel normé F . On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \quad (p, q \geq N) \implies \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon.$$

REMARQUE : Si F est un espace vectoriel normé complet (par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément si et seulement si elle est uniformément de Cauchy sur A .

Produit de Cauchy de deux séries numériques Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de nombres complexes. Leur produit de Cauchy est la série $\sum w_n$ de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p v_q.$$

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, leur produit de Cauchy $\sum w_n$ l'est également et

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right).$$

☞ CONVOLUTION.

Produit de Cauchy de deux séries entières Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, de rayons respectifs R_a et R_b . On appelle produit de Cauchy de ces séries entières, ou bien *série entière produit*, la série entière $\sum c_n z^n$ où l'on a défini

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Le rayon R_c de la série produit est au moins égal au plus petit des deux rayons des séries que l'on multiplie. De plus, pour tout complexe z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right).$$

Problème de Cauchy Toute équation différentielle peut se ramener à une équation différentielle du premier ordre $F(x, x', t) = 0$. Un problème de Cauchy est la donnée de cette équation différentielle, assortie d'une condition initiale $x(t_0) = x_0$. ♦ Dans le cas d'une équation différentielle scalaire d'ordre n

$$a_n x^{(n)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = b,$$

la condition initiale prend la forme

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \quad \dots \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1},$$

où $x_0, \dots, x_{n-1}$ sont des scalaires.

Règle de Cauchy Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la suite de terme général $u_n^{1/n}$ admet une limite ℓ . Si $0 \leq \ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge. Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge. Dans le cas $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

☞ ALEMBERT.

Loi de Cauchy Une variable aléatoire X suit la loi de Cauchy de paramètres (a, m) avec $a > 0$ si elle admet une densité égale à

$$f(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + (x - m)^2}.$$

REMARQUE : Une telle variable aléatoire n'admet ni espérance, ni variance. La somme de variables aléatoires de Cauchy est encore une variable aléatoire de Cauchy. La suite des moyennes empiriques d'une variable aléatoire de Cauchy fournit donc un contre-exemple au théorème central limite.

CAUCHY-LIPSCHITZ

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soient $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \rightarrow E$ des applications continues. Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$, l'équation différentielle linéaire du premier ordre $x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$ admet une et une seule solution φ vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = x_0$.

☞ ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU 1^{ER} ORDRE.

Théorème de Cauchy-Lipschitz non linéaire On considère une équation différentielle $x' = F(t, x)$, où F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Pour tout $m_0 = (t_0, x_0) \in U$, il existe une unique solution maximale vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$. ♦ Son intervalle de définition est ouvert. ♦ Toute solution du même problème de Cauchy est une restriction de cette solution maximale.

☞ SOLUTION MAXIMALE.

CAUCHY-SCHWARZ (INÉGALITÉ DE)

Soit E un espace préhilbertien (réel ou complexe). Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\| \cdot \|$ sa norme associée. Alors, pour tous vecteurs u et v de E , on a l'inégalité

$$| \langle u, v \rangle | \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Il n'y a égalité que si la famille (u, v) est liée. ♦ Cette inégalité prend des formes variées selon l'espace et le produit scalaire, et fournit notamment des inégalités sur des sommes et des intégrales. Ci-après, nous en listons quelques-unes parmi les plus utiles.

Sous forme géométrique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz stipule que, si a et b sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique,

$$|a \cdot b| = \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

Sous forme de séries, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des séries numériques de carré sommable (c'est-à-dire que $\sum |u_n|^2$ et $\sum |v_n|^2$ convergent), alors $\sum u_n v_n$ converge absolument et

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n v_n| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^2}.$$

Sous forme intégrale, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, si f et g sont des fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs réelles ou complexes, telles que $|f|^2$ et $|g|^2$ soient intégrables sur I , alors fg est intégrable et

$$\left| \int_I fg \right| \leq \int_I |fg| \leq \sqrt{\int_I |f|^2} \sqrt{\int_I |g|^2}.$$

Sous forme probabiliste, Si X et Y sont des variables aléatoires réelles admettant une variance (un moment d'ordre 2), alors XY admet une espérance et

$$|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)} \sqrt{E(Y^2)}.$$

♦ En considérant les variables centrées $X' = X - E(X)$ et $Y' = Y - E(Y)$, cela prouve notamment que le couple (X, Y) admet une covariance, et que

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}.$$

♦ Enfin, en définissant Y comme la variable aléatoire constante égale à 1, cette inégalité montre que : si X^2 admet une espérance, alors X admet une espérance et $|E(X)| \leq \sqrt{E(X^2)}$.

CAYLEY Arthur (1821–1895)
(Mathématicien anglais)

Théorème de Cayley-Hamilton Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors son polynôme caractéristique χ_A est un polynôme annulateur de A : $\chi_A(A) = 0$. ♦ De même, si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, son polynôme caractéristique est un polynôme annulateur de u . ♦ Un corollaire immédiat de ce résultat est que le polynôme minimal d'une matrice ou d'un endomorphisme divise son polynôme caractéristique.

CENTRAL LIMITE (THÉORÈME)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, admettant des moments d'ordre 2, de mêmes moyennes m et de mêmes variances σ^2 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons Y_n la n -ième moyenne : $Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ et Y_n^* la variable centrée réduite correspondante : $Y_n^* = (Y_n - m) / (\sigma/\sqrt{n})$. Si l'on note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, alors, pour tous réels $a < b$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a < Y_n^* \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx.$$

En d'autres termes, si l'on note F_n la fonction de répartition de Y_n^* , alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x)$. On dit parfois que la suite des variables centrées et réduites Y_n^* converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

REMARQUE : Ce théorème est absolument fondamental en théorie des probabilités (d'où son nom, originellement allemand, de théorème *central*, concernant une *limite* de variables aléatoires) et se retrouve aussi bien dans la théorie de la diffusion de la chaleur que dans l'étude des modèles statistiques. Il est parfois (mal) traduit en : *théorème de la limite centrée*. Il permet notamment d'estimer des erreurs commises lors de l'approximation d'une quantité par sa valeur moyenne. Il convient alors d'avoir en tête quelques valeurs numériques, rappelées sur la figure 10 ci-après.

Exemple : Supposons que l'on jette un nombre n (grand) de dés. Notons X_k la variable aléatoire donnant le résultat du k -ième tirage. Alors X_k suit une loi uniforme $\mathcal{U}([1; 6])$ et donc $E(X_k) = m = 7/2 = 3,5$ tandis que $V(X_k) = \sigma^2 = 35/12$. Notons $S_n = X_1 + \dots + X_n$ la somme des n premiers tirages et F_n sa fonction de répartition ; on a

$$F_n(x) = P[S_n \leq x] = P\left[\frac{S_n - nm}{\sqrt{n} \sigma} \leq \frac{x - nm}{\sqrt{n} \sigma}\right] \approx \Phi\left(\frac{x - nm}{\sqrt{n} \sigma}\right).$$

On peut évaluer la probabilité que S_n prenne exactement une valeur $k \in [n; 6n]$ en utilisant le théorème des accroissements finis et une légère approximation, ainsi qu'une *correction de continuité :

$$\begin{aligned} P[S_n = k] &\approx \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - nm}{\sqrt{n} \sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k - \frac{1}{2} - nm}{\sqrt{n} \sigma}\right) \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{n} \sigma} \Phi'\left(\frac{k - nm}{\sqrt{n} \sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n} \sigma} \exp\left[-\frac{1}{2n} \cdot \left(\frac{k - nm}{\sigma}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

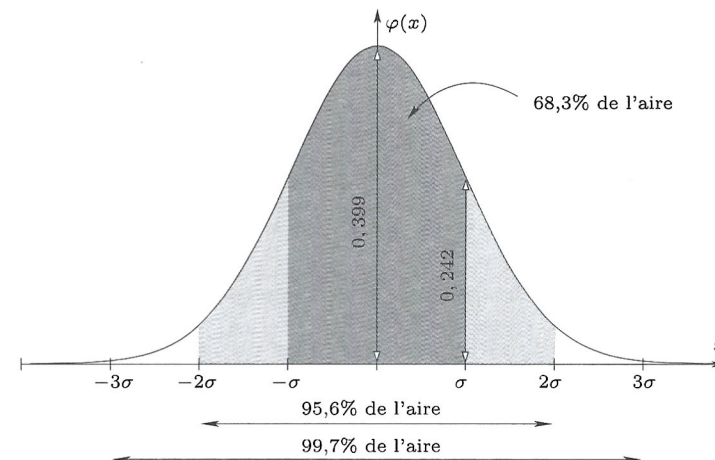


Fig. 10 — Densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Une probabilité de 50 % est affectée aux valeurs de X ne s'écartant pas de plus de $0,67\sigma$, une probabilité de 68,3 % à celles ne s'écartant pas de plus de σ (en gris foncé) et une probabilité de 95,6 % à celles de n'écartant pas plus de 2σ .

Choisissons $n = 50$ et simulons le résultat de la somme de 50 dés ; on trace maintenant dans un histogramme les résultats possibles de ces lancers. Pour avoir un résultat lisible, on effectue ce tirage un grand nombre de fois et on donne en moyenne le nombre de fois que les dés donnent chaque entier $k \in [50; 300]$. (Ce nombre est non entier, puisque c'est une moyenne ; il doit être proche de la probabilité « théorique »). On compare ensuite cet histogramme avec le tracé exact de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi n} \sigma} \exp\left[-\frac{1}{2n} \cdot \left(\frac{x - nm}{\sigma}\right)^2\right].$$

(Voir figure 11 page 54.)

✦ CONVERGENCE EN LOI, CORRECTION DE CONTINUITÉ, LOI DES *GRANDS NOMBRES.

CENTRE

Centre d'un anneau A Ensemble des éléments $a \in A$ commutant avec tous les éléments de A :

$$\mathcal{Z}(A) = \{a \in A ; \forall b \in A \quad ab = ba\}.$$

C'est un sous-anneau de A .

Exemple : Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'espace $\text{Vect}(I_n)$ des matrices scalaires.

Centre d'un groupe G Ensemble des éléments $g \in G$ commutant avec tous les éléments de G :

$$\mathcal{Z}(G) = \{g \in G ; \forall h \in G \quad gh = hg\}.$$

C'est un sous-groupe de G .

Centre d'une conique Dans le cas d'une hyperbole ou d'une ellipse, centre de symétrie de la conique. Il est caractérisé par l'annulation du gradient de la fonction F avec les notations usuelles des coniques.

✦ CONIQUE.

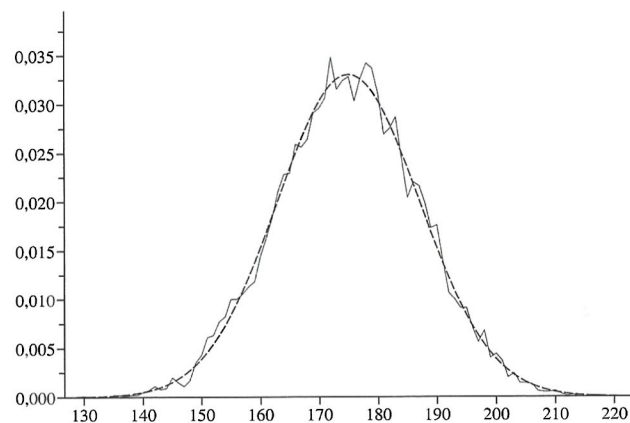


Fig. 11 — Simulation de la somme de 50 dés, moyennés sur 10 000 tirages, et comparaison avec la densité de la loi normale approchée (en pontillés).

Centre d'une quadrique Dans le cas d'un hyperboloïde ou d'un ellipsoïde, centre de symétrie de la quadrique. Il est caractérisé par l'annulation du gradient de la fonction F avec les notations usuelles des quadriques.

☞ QUADRIQUE.

CENTRÉE

Une variable aléatoire est dite centrée si elle admet une espérance nulle. Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, alors $X' = X - E(X)$ est une variable centrée.

☞ RÉDUITE.

CERCLE

Cercle du plan Le cercle de centre Ω et de rayon $r \geq 0$ du plan euclidien est l'ensemble des points M vérifiant $\Omega M = r$. ♦ Un cercle est un cas particulier d'ellipse, d'excentricité nulle, de foyers F et F' confondus et égaux à Ω . L'équation cartésienne d'un tel cercle est $(x - \omega_x)^2 + (y - \omega_y)^2 = r^2$, où (ω_x, ω_y) sont les coordonnées de Ω dans un repère orthonormé quelconque.

Cercle circonscrit Soit (ABC) un triangle non plat du plan affine. Il existe un unique cercle $\mathcal{C}$ passant par les points A , B et C . Le centre Ω de ce cercle étant équidistant des trois points A , B et C , c'est le point de concours des médiatrices du triangle (voir figure 12).

☞ MÉDIATRICE, TRIANGLE.

Cercle de convergence Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon $R \in]0; +\infty[$, son cercle de convergence est le cercle $\mathcal{C}(0; R) = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = R\}$. ♦ Il est parfois nommé *cercle d'incertitude* pour rappeler que, sur ce cercle, on n'a pas forcément convergence ni divergence et que les théorèmes généraux ne s'appliquent pas.

Exemple : Notons $a_n = 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 = 0$. La série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon 1. En $z = 1$, la suite $(a_n z^n)$ est bornée mais la série diverge. En $z = -1$, la

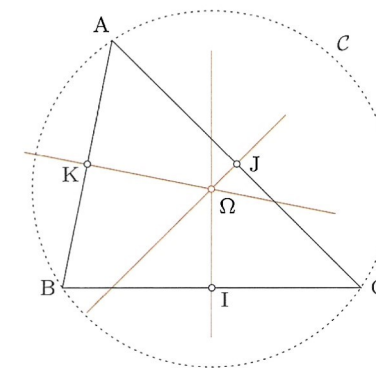


Fig. 12 — Le cercle circonscrit à un triangle a pour centre le point de concours de ses médiatrices.

série converge, mais pas absolument. ♦ En prenant $a_n = 1/n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum a_n z^n$ est encore de rayon 1 et converge absolument en tout point du cercle de rayon 1.

☞ ABEL, RAYON.

Cercle osculateur ☞ OSCULATEUR.

CHAMP DE VECTEURS

Application d'un ouvert U d'un espace vectoriel E , à valeurs dans E (ou, parfois, à valeurs dans un autre espace vectoriel F). La classe de dérivation de cette application est généralement sous-entendue.

Exemples : Le gradient d'une fonction numérique $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est un champ de vecteurs à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. ♦ Une "forme différentielle est un champ de formes linéaires (c'est-à-dire que $F = E^*$). ♦ En physique, les champs électrique, magnétique, de gravitation, de vitesse (dans un fluide) sont des champs de vecteurs $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

☞ DIVERGENCE, ROTATIONNEL, LAPLACIEN, D'ALEMBERTIEN.

CHANGEMENT

Changement de paramétrage ☞ PARAMÉTRAGE.

Changement de variable Soient I et J deux ensembles. Soit $u : I \rightarrow J$ une bijection, et soit $f : J \rightarrow K$ une application définie sur J . La fonction $F : I \rightarrow K$, notée $t \mapsto F(t)$ et définie par $F = f \circ u$ est l'application déduite de $f : x \mapsto f(x)$ par le changement de variable $x = u(t)$.

Changement de variable dans une intégrale

• *Cas d'un segment* — Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et a, b deux éléments de I . Soit $\varphi : I \rightarrow J$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, pour toute fonction $f : J \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f \circ \varphi(u) \cdot \varphi'(u) du.$$

• *Cas d'un intervalle quelconque* — Afin d'éviter d'introduire des divergences artificielles, on se limite, dans le cas d'une intégrale sur un intervalle quelconque, à un changement de variable *bijectif*. Soit $f : J \rightarrow \mathbb{K}$ une application continue par morceaux

et soit $\varphi: I \rightarrow J$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Alors f est intégrable sur J si et seulement si $f \circ \varphi \cdot \varphi'$ est intégrable sur I et, dans ce cas :

$$\int_J f = \int_I f \circ \varphi \cdot |\varphi'|.$$

REMARQUE : En pratique, on peut utiliser la formule usuelle de changement de variable, sans tenir compte de la valeur absolue autour de φ' , à condition de respecter le changement des bornes dans l'intégrale, c'est-à-dire en n'oubliant pas que $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

• *Cas d'une intégrale multiple* — Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned} \varphi: \quad U &\longrightarrow V \\ (x, y) &\longmapsto (u, v) \end{aligned}$$

un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. Pour tout compact $D \subset U$, d'image $\Delta = \varphi(D) \subset V$ et pour toute fonction f continue sur Δ on a

$$\iint_{\Delta} f(u, v) \, du \, dv = \iint_D f(u(x, y), v(x, y)) \left| \frac{D(u, v)}{D(x, y)} \right| \, dx \, dy.$$

où l'on a noté $D(u, v)/D(x, y)$ le jacobien de φ .

Exemple : Un des cas les plus fréquemment rencontrés est celui du changement de variables cartésiennes $\leftrightarrow$ polaires : si l'on pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on obtient

$$\iint_{\Delta} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) \, r \, dr \, d\theta,$$

où D est l'image de Δ par le changement de variable et où le jacobien vaut

$$J = \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

CHASLES Michel (1793–1880)
(Mathématicien français)

Relation de Chasles Originellement, cette dénomination désigne la propriété $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ entre vecteurs du plan. ♦ Par extension, plusieurs relations du même type portent maintenant le même nom, notamment pour des intégrales ou des angles orientés :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f, \quad (\widehat{u, v}) + (\widehat{v, w}) \equiv (\widehat{u, w}) \quad [2\pi]$$

CHEMIN

Synonyme d'*arc paramétré.

CHINOIS

Lemme chinois Soient a et b deux entiers. Alors l'anneau $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z}$ si et seulement si a et b sont premiers entre eux.

REMARQUES : Un isomorphisme possible est l'application $(\overline{m}_a, \overline{n}_b) \mapsto \overline{mn}_{ab}$, où l'on a noté $\overline{x}_a$, $\overline{x}_b$ et $\overline{x}_{ab}$ les classes d'équivalence de x modulo a , b et ab respectivement.

Théorème des restes chinois Soient a et b deux entiers premiers entre eux et soit (u, v) un couple de Bézout associé, c'est-à-dire un couple d'entiers vérifiant $au + bv = 1$. Soient enfin p et q deux entiers. Alors le système d'équations

$$\begin{cases} x \equiv p & [a] \\ y \equiv q & [b] \end{cases}$$

admet dans $\mathbb{Z}$ les solutions $auq + bvp + kab$, pour k parcourant $\mathbb{Z}$.

REMARQUES : Ce théorème, connu depuis la haute antiquité par les mathématiciens chinois, permet de calculer au bout de combien de temps deux astres, dont les positions et les périodes de révolution sont connues, se retrouveront dans une configuration donnée. Il est une conséquence du « lemme chinois ». ♦ Il a, de nos jours, des applications en informatique, pour la représentation d'entiers possédant plus de décimales que ne l'autorise la capacité de la machine.

CHOIX

Axiome du choix Pour tout ensemble E non vide, il existe une fonction de choix sur E .

♦ Cet axiome fait partie du système axiomatique, nommé « ZFC », couramment utilisé par les mathématiciens qui, à l'instar de M. Jourdain, le font sans le savoir.

REMARQUE : Cet axiome est logiquement équivalent à d'autres propositions ; citons

- l'axiome de Zermelo : tout ensemble E peut être muni d'un bon *ordre, c'est-à-dire un ordre pour lequel toute partie non vide possède un plus petit élément.
- le produit cartésien de toute famille non vide d'ensembles non vides est non vide.
- le lemme de Zorn (non détaillé ici) ;

Il sert à démontrer certains résultats théoriques fondamentaux comme : l'existence de bases dans tous les espaces vectoriels, même de dimension infinie ; l'existence d'un supplémentaire pour tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension infinie. Les mathématiciens qui réfutent l'axiome du choix — c'est-à-dire qui le postulent faux — doivent donc se passer de tels résultats.

☞ AXIOME.

Fonction de choix Soit E un ensemble non vide. Une fonction de choix est une application $\varphi: \mathfrak{P}(E) \rightarrow E$ qui, à toute partie non vide X de E , associe un élément $\varphi(X) \in X$.

Exemple : Si $E = \mathbb{N}$, on peut construire explicitement une fonction de choix : à toute partie non vide on associe son plus petit élément (un tel élément existe bien). ♦ On ne connaît explicitement aucune fonction de choix sur $\mathbb{R}$ et l'axiomatique utilisée ne permet pas d'en construire. L'axiome du choix nous permet cependant d'en utiliser une chaque fois que le besoin s'en fait sentir (ce qui n'est finalement pas si courant que cela).

CHOLESKY André Louis (1875–1918)
(Mathématicien français)

Décomposition de Cholesky Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Alors il existe une unique matrice T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = {}^tT \cdot T$.

REMARQUE : Cette factorisation se met en œuvre en utilisant le pivot de Gauss, selon un algorithme rapide, et est utilisée lors de la résolution des systèmes linéaires.

☞ DÉCOMPOSITION.

CIRCONSCRIT

☞ CERCLE CIRCONSCRIT.

CIRCULANTE

Matrice circulante Matrice carrée de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

REMARQUE : Si l'on note $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$, alors $\det M = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$. Les nombres $P(\omega^k)$ sont les valeurs propres de M .

CIRCULATION

Circulation d'un champ de vecteur Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu par morceaux. On note $V = (V_1, \dots, V_n)$. Soit $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un arc de classe $\mathcal{C}^1$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. La circulation de V sur γ est la quantité

$$\int_{\gamma} \langle V | d\mathbf{x} \rangle = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma} V_k dx_k = \sum_{k=1}^n \int_a^b V_k(\gamma(t)) \gamma'_k(t) dt.$$

REMARQUE : Si F est de classe $\mathcal{C}^1$, puisque $\langle \text{grad } f | d\mathbf{x} \rangle = dF$, on obtient :

$$\int_{\gamma} \langle \text{grad } f | d\mathbf{x} \rangle = F(B) - F(A),$$

Les physiciens disent que le champ $\text{grad } f$ est *conservatif* ou encore : la force $\text{grad } f$ dérive d'un potentiel f , son *travail* (nom donné à la circulation d'une force) ne dépend pas du chemin suivi.

✎ ROTATIONNEL.

CLASSE

Fonction de classe $\mathcal{C}^k$ Une fonction de la variable réelle est dite de classe $\mathcal{C}^0$ si elle est continue. Elle est de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) si elle est dérivable et si sa dérivée est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. ♦ Si f est une fonction de plusieurs variables, on dit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ si elle admet des dérivées partielles d'ordre $1, \dots, k$ et que toutes ces dérivées sont continues.

Exemple : La plupart des fonctions dérivables que l'on rencontre sont de classe $\mathcal{C}^1$; un exemple classique de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, mais pas de classe $\mathcal{C}^1$, est la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$. Cette fonction est dérivable en tout point, $f'(0) = 0$ et $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ si $x \neq 0$. On constate donc que la dérivée f' n'est pas continue en 0.

✎ DARBOUX, SCHWARZ, TAYLOR.

Fonction de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux ✎ MORCEAUX.

Classe d'équivalence Soit E un ensemble, muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. On appelle classe d'équivalence d'un élément x de E l'ensemble, noté C_x ou, plus simplement, $\bar{x}$, défini par $\bar{x} = \{y \in E ; x \mathcal{R} y\}$. ♦ L'ensemble des classes d'équivalence de E forme une partition ; on la note $E/\mathcal{R}$.

Exemples : Introduisons sur $\mathbb{Z}$ la relation d'équivalence : $x \sim y \Leftrightarrow 24|(y-x)$. Alors la classe d'équivalence de 16 est l'ensemble des entiers de la forme $16 + 24k$, pour k parcourant $\mathbb{Z}$. ♦ Dans le langage de tous les jours, on identifie parfois x avec $\bar{x}$. Ainsi, dans « le samedi, je fais la grâce matinée », on a un élément particulier de $\mathbb{Z}$, tandis que dans la phrase « samedi, j'irai me promener au parc », on parle de la classe d'équivalence de 6 modulo 7. ♦ Considérons la relation d'équivalence entre matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$: M et N sont équivalentes si et seulement s'il existe $P \in \text{GL}_p(K)$ et $Q \in \text{GL}_q(K)$ telles que $M = PNQ$. La classe d'équivalence d'une matrice M est l'ensemble des matrices de même rang que M .

✎ ÉQUIVALENCE, ORIENTÉ, PARTITION.

CLOS

Corps algébriquement clos Corps K tel que tout polynôme non constant à coefficients dans K admet au moins une racine dans K . ♦ Tout corps admet une clôture algébrique.

Exemple : Le corps $\mathbb{Q}$ n'est pas algébriquement clos : le polynôme $X^2 - 2$ n'a pas de racine rationnelle. ♦ Le corps $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos : le polynôme $X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle. ♦ Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos (théorème de d'Alembert-Gauss).

✎ CLÔTURE *ALGÈBRE.

CODIMENSION

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (de dimension quelconque) et V un sous-espace vectoriel de E . Si V admet un supplémentaire de dimension finie d , alors tout supplémentaire est de dimension d et d est appelée codimension de V .

✎ HYPERPLAN.

COEFFICIENT

Coefficients binomiaux ✎ BINOMIAL.

Coefficients de Fourier ✎ FOURIER.

COFACTEUR

Étant donnée une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le cofacteur associé au coefficient m_{ij} est $(-1)^{i+j} M_{ij}$, où M_{ij} est le mineur associé à m_{ij} .

✎ COMATRICE, DÉTERMINANT, DÉVELOPPEMENT, MINEUR.

COL

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^1$. Si $a = (a_1, a_2)$ est un point critique de f , et si le déterminant de la matrice *hessienne de f est strictement négatif en a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 < 0,$$

alors a est appelé point col ou *point selle*. Il n'est ni un minimum local ni un maximum local. Les vecteurs propres de la matrice hessienne, associés à deux valeurs propres $\lambda > 0$ et $\mu < 0$, donnent les directions dans lesquelles aller pour monter ou descendre au plus vite.

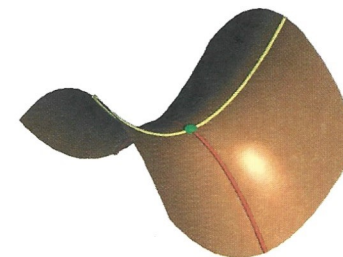


Fig. 13 — Point col. Sur le chemin jaune, le point col est un minimum ; sur le rouge, c'est un maximum. Tout personne ayant randonné en montagne connaît la situation : le col est le point le plus bas par rapport aux sommets voisins, mais le plus haut par rapport aux vallées.

COLONNE

Colonne d'une (p, q) -matrice La k -ième colonne d'une matrice M à p lignes et q colonnes est le vecteur colonne X de coefficients $x_i = m_{ik}$ pour tout $i \in [1; p]$.

Colonne propre $\Leftrightarrow$ VECTEUR PROPRE.

Vecteur colonne $\Leftrightarrow$ VECTEUR.

COMATRICE

Matrice com $M = (M_{ij})_{i,j}$ des cofacteurs d'une matrice carrée $M = (m_{ij})_{i,j}$. La comatrice vérifie la relation fondamentale :

$$M \cdot {}^t(\text{com } M) = {}^t(\text{com } M) \cdot M = (\det M) I_n.$$

REMARQUES : On note parfois $\tilde{M} = {}^t \text{com } M$ la transposée de la comatrice de M . $\blacklozenge$ Si M est une matrice inversible, cette relation permet de déduire que $M^{-1} = (1/\det M) {}^t(\text{com } M)$.

$\Leftrightarrow$ COFACTEUR, DÉTERMINANT, DÉVELOPPEMENT, MINEUR.

COMBINAISON LINÉAIRE

Soit A une partie d'un espace vectoriel E . Une combinaison linéaire des vecteurs de A est un vecteur de la forme $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, où n est un entier, $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de A et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires.

REMARQUE : Par définition, une combinaison linéaire est nécessairement une somme finie. D'ailleurs, une somme infinie n'a *a priori* pas de sens dans un espace vectoriel, si l'on n'y ajoute pas une structure supplémentaire en le munissant d'une norme (ou, à défaut, d'une topologie).

$\Leftrightarrow$ ESPACE VECTORIEL, FAMILLE LIBRE, FAMILLE GÉNÉRATRICE.

COMMENSURABLE

Un réel a est dit commensurable avec un réel $b \neq 0$ si le rapport a/b est rationnel. Contraire : incommensurable.

COMMUTANT

Commutant d'un élément x d'un groupe G C'est le sous-groupe des éléments $g \in G$ qui commutent avec x , c'est-à-dire qui vérifient $gx = xg$.

Commutant d'un endomorphisme Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le commutant de u est

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) ; u \circ v = v \circ u\}.$$

C'est une sous-algèbre de $(\mathcal{L}(E), \circ)$, qui contient notamment $\mathbb{K}[u]$ ($\Leftrightarrow$ POLYNÔME D'ENDOMORPHISME).

REMARQUE : Si u est un endomorphisme possédant n valeurs propres distinctes dans un espace de dimension n , alors $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u] = \mathbb{K}_{n-1}(u)$.

COMMUTATIF

Groupe commutatif Groupe $(G, *)$ tel que $a * b = b * a$ pour tous $a, b \in G$. On dit également groupe abélien. $\blacklozenge$ La loi d'un groupe commutatif est, le plus souvent, notée additivement.

Exemples : Les groupes $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ sont abéliens. $\blacklozenge$ Le groupe $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$ n'est pas abélien dès que $n \geq 2$.

Anneau commutatif Anneau $(A, +, \times)$ tel que la loi « $\times$ » soit commutative : $a \times b = b \times a$ pour tous $a, b \in A$.

Exemple : Si A est un anneau commutatif, l'anneau $A[X]$ des polynômes sur A est commutatif. $\blacklozenge$ Si $n \geq 2$, l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutatif.

COMPACT

Compact / Partie compacte Une partie K d'un espace vectoriel normé E est dite compacte si toute suite de K possède une valeur d'adhérence appartenant à K , c'est-à-dire admet une sous-suite convergente dans K .

REMARQUES : En dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées de E (théorème de Borel-Lebesgue). $\blacklozenge$ En dimension infinie, les compacts sont tous fermés et bornés, mais des parties fermées et bornées peuvent ne pas être compactes. $\blacklozenge$ Tout fermé d'un compact est compact. $\blacklozenge$ Toute partie compacte est complète. $\blacklozenge$ L'image d'un compact par une application continue est compacte. ($\Leftrightarrow$ WEIERSTRASS.) $\blacklozenge$ On peut caractériser les compacts par une propriété topologique (et non métrique) : pour toute famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts dont la réunion est K , il existe une sous-famille finie $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ dont la réunion est K (axiome de Borel-Lebesgue). Cela permet d'étendre la notion de compact à des espaces plus vastes que les espaces vectoriels normés, comme les espaces métriques ou les espaces topologiques séparés. $\Leftrightarrow$ BOREL, MÉTRIQUE, TOPOLOGIQUE.

Exemples : Soit $[a; b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass montre que toute suite de I admet une sous-suite convergente et donc que I est un compact de $\mathbb{R}$. $\blacklozenge$ Soit E un espace vectoriel normé et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ . Alors $\{u_n ; n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est une partie compacte de E . $\blacklozenge$ On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|P\| = \max_n |a_n|$ en notant $P = \sum a_n X^n$. La boule fermée unité est à la fois fermée et bornée, mais non compacte car, par exemple, la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente.

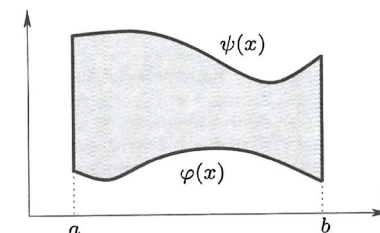
Compact élémentaire Par « élémentaire », on entend un compact A défini par une portion de plan de la forme

$$a \leq x \leq b \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$$

ou, symétriquement, de la forme

$$a \leq y \leq b \quad \varphi(y) \leq x \leq \psi(y),$$

où φ et ψ sont des fonctions continues sur $[a; b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. (L'idée est que A est un cas simple de compact connexe et simplement connexe, et que l'on paramètre facilement son contour). $\Leftrightarrow$ FUBINI, GREEN-RIEMANN.



$\Leftrightarrow$ COMPACT, CONNEXE.

COMPAGNON

Matrice compagne d'un polynôme unitaire Soit $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme unitaire ; sa matrice compagne est la matrice carrée d'ordre n

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

ou, selon la convention choisie, sa transposée.

REMARQUE : Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de la matrice A sont égaux à $\chi_A = (-1)^n P$. ♦ Les sous-espaces propres de A sont tous de dimension 1. ♦ La matrice A est diagonalisable si et seulement si le polynôme P est scindé et à racines simples.

✎ CYCLIQUE (ENDOMORPHISME).

COMPATIBLE

Conditions de compatibilité ✎ PIVOT.

Système d'équations compatibles Système admettant au moins une solution. ✎ PIVOT.

COMPARAISON

Théorème de comparaison des fonctions positives Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions continues par morceaux sur I . Si $0 \leq |f| \leq |g|$, alors l'intégrabilité de g sur I entraîne l'intégrabilité de f .

Théorème de comparaison des séries positives Soit $\sum b_n$ une série à termes positifs et convergente. Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $0 \leq a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum a_n$ converge. ♦ Le résultat reste valable si la majoration est remplacée par une domination $a_n = O(b_n)$, par une relation de négligeabilité $a_n = o(b_n)$ ou par une équivalence $a_n \sim b_n$.

REMARQUE : Ce théorème permet également d'établir la convergence d'une série absolument convergente, par comparaison avec une série positive. ♦ Il s'utilise conjointement avec l'emploi de séries étalon : séries géométriques, séries de Riemann, voire séries de Bertrand.

COMPATIBLE

✎ PIVOT.

COMPLÉMENTAIRE

Soient A un ensemble et B une partie de A . Le complémentaire de B dans A est l'ensemble, noté ${}_{A}B$ ou, si aucune ambiguïté n'est possible, $\bar{B}$ ou B^c , des éléments de A qui ne sont pas éléments de B :

$${}_{A}B = A \setminus B = \{x \in A ; x \notin B\}.$$

REMARQUES : En algèbre linéaire, on prendra bien soin de ne pas confondre complémentaire et supplémentaire. ♦ La notation $\bar{B}$, si elle est pratique en probabilités, par exemple, risque de mener à une confusion avec l'adhérence d'une partie.

COMPLÉMENTS

Formule des compléments Équation fonctionnelle vérifiée par la fonction Γ d'Euler (✎ GAMMA). Pour tout $\alpha \in]0 ; 1[$,

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}.$$

COMPLET

Espace complet Un espace vectoriel normé E est dit complet si toute suite de Cauchy à valeurs dans E converge dans E . ♦ Un tel espace s'appelle *espace de Banach*.

Exemples : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et tous les espaces vectoriels normés de dimension finie sont complets.

Partie complète Soit E un espace vectoriel normé. Une partie A de E est dite complète si toute suite de Cauchy à valeurs dans A converge dans A (c'est-à-dire que sa limite est dans A).

REMARQUES : Toute partie complète est fermée. ♦ Tout fermé d'une partie complète est complet. ♦ Notamment, si E est de dimension finie, toute partie fermée de E est complète, tout sous-espace vectoriel de E est complet.

Système complet, quasi-complet, d'événements ✎ SYSTÈME.

COMPLEXE

Tout complexe z peut s'écrire de manière unique sous la forme $z = a + ib$, avec a et b des réels, appelés *partie réelle* et *partie imaginaire* de z . On définit la somme et le produit de deux complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ par

$$z + z' = (a + a') + i(b + b') \quad \text{et} \quad z z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

Avec ces notations, le *module* de z est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et son *conjugué* $\bar{z} = a - ib$. Lorsque $z \neq 0$, un *argument* de z est un réel θ tel que $z = |z| e^{i\theta}$. Il vérifie donc

$$\cos \theta = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

✎ $\mathbb{C}$ (CORPS DES NOMBRES COMPLEXES).

COMPOSABLES

Deux applications $f : A \rightarrow B$ et $g : C \rightarrow D$ sont composables si $f(A) \subset C$. On peut alors définir leur composée $g \circ f$. ✎ COMPOSITION.

COMPOSÉ

Un entier naturel n est dit composé s'il n'est pas premier, c'est-à-dire s'il admet une factorisation $n = ab$ où a et b sont distincts de 1.

COMPOSITION

Loi de composition interne ✎ LOI.

Produit de composition de deux applications Soient A, B et C trois ensembles. Soient $f : A \rightarrow B$ une application et $g : B \rightarrow C$ une fonction définie sur une partie de B contenant au moins $f(A)$, c'est-à-dire que f et g sont composables. La *composée* de f et g , notée $g \circ f$, est l'application

$$g \circ f : A \longrightarrow C, \\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Produit de composition de deux endomorphismes Soit E un espace vectoriel et soient u et v deux endomorphismes. Alors u et v sont composables. S'il n'y a pas d'ambiguïté possible, on note uv le produit de composition $u \circ v$. Notamment, on définit $u^0 = \text{Id}_E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u^n = u \circ u^{n-1}$.

REMARQUE : Une fois muni du produit de composition et de l'addition usuelle, l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E forme l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$. Muni en plus de la multiplication par un scalaire, il forme même une algèbre. Comme dans la plupart des anneaux, il est agréable de noter la deuxième loi sous forme multiplicative — c'est-à-dire de ne pas la noter du tout ! — ce qui explique l'usage de « uv » en lieu et place de « $u \circ v$ ». De fait, du point de vue de la structure algébrique, on peut penser ce produit de composition comme

une simple multiplication (non commutative en général), ce qui permet notamment de définir des *polynômes d'endomorphismes et, dans le cas d'endomorphismes qui commutent, d'appliquer la formule du *binôme de Newton.

☞ PRODUIT MATRICIEL.

CONCATÉNATION

Soient $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_p)$ deux familles de vecteurs. On appelle concaténation de ces deux familles la famille $(b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_p)$.

CONCAVE

Une fonction numérique f est dite concave si $-f$ est une fonction convexe. ♦ Elle est dite strictement concave si $-f$ est strictement convexe.

Exemple : La fonction logarithme est strictement concave.

CONDITION INITIALE

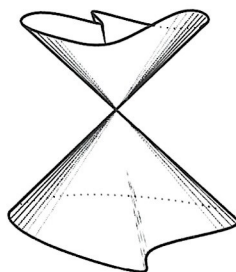
☞ PROBLÈME DE CAUCHY.

CONDITIONNELLE

☞ ESPÉRANCE CONDITIONNELLE, PROBABILITÉ CONDITIONNELLE.

CÔNE

Surface *réglée dont les génératrices passent toutes par un point S , appelé *sommet* du cône. Elle est donc invariante par toute homothétie de centre S . ♦ Dans un repère de centre S , son équation est de la forme $F_1(x, y, z) = F_2(x, y, z) = \dots = F_k(x, y, z) = 0$, où $F_1, \dots, F_k$ sont des fonctions *homogènes.



♦ Par extension, un cône est une partie d'un espace vectoriel, stable par homothétie vectorielle.

Exemple : Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E . On définit $C = \{x \in E; \varphi(x, x) = 0\}$: c'est le *cône isotrope* de la forme φ .

Cône elliptique Quadrique d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Cône de révolution Quadrique d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Ses sections à $z = C^{\text{te}}$ sont des cercles. Ses sections avec un plan vertical sont des hyperboles, ou un couple de droites concourantes. ♦ Un cône elliptique peut être envoyé sur un cône de révolution par une affinité orthogonale adéquate.

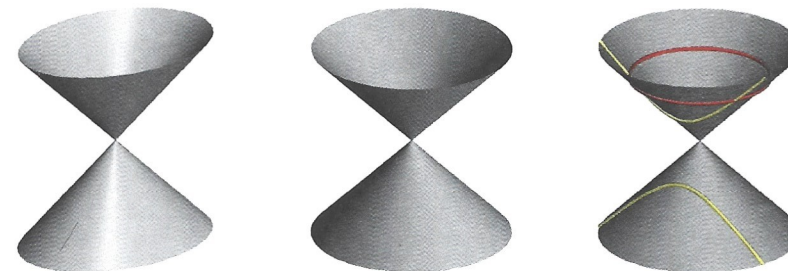


Fig. 14 — Cône elliptique (à gauche) et cônes de révolution (au milieu et à droite); une section horizontale (cercle rouge) et une section verticale (hyperbole jaune) sont représentées.

CONGRUENCE

Nombre entier congru à un autre Soient $x, y, n \in \mathbb{Z}$. On dit que x est congru à y modulo n , et on écrit $x \equiv y \pmod{n}$, si $y - x \in n\mathbb{Z}$. ♦ La relation de congruence est une relation d'équivalence et l'ensemble des classes d'équivalences modulo n est le groupe quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, qui est également un anneau.

REMARQUE : Le fait que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ait une structure de groupe vient du fait que l'addition est compatible avec la congruence :

$$(k \equiv k' \text{ et } \ell \equiv \ell') \implies k + k' \equiv \ell + \ell'.$$

Quant à la structure d'anneau, elle vient de la compatibilité du produit dans $\mathbb{Z}$ avec la relation de congruence modulo n :

$$x \equiv x' \text{ et } y \equiv y' \implies xy \equiv x'y'.$$

☞ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Nombres réels égaux modulo T Deux nombres réels sont dit égaux modulo T si leur différence est un multiple entier de T .

☞ PÉRIODIQUE.

CONIQUE

Courbe du plan $\mathbb{R}^2$ d'équation générale

$$F(x, y) = \underbrace{ax^2 + by^2 + 2cxy}_{q(x, y)} + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Selon le signe de $\Delta = ab - c^2$, la nature de la conique varie :

- si $\Delta > 0$, elle est du genre ellipse;
- si $\Delta = 0$, elle est du genre parabole;
- si $\Delta < 0$, elle est du genre hyperbole.

♦ Dans un espace euclidien, toutes les coniques propres (non dégénérées) peuvent être définies géométriquement à partir d'une droite $\mathcal{D}$, appelée *directrice* de la conique, et d'un foyer F , comme l'ensemble des points M du plan tels que le rapport $e = MF/d(M; \mathcal{D})$ soit constant. Le réel e est appelé *excentricité* :

- si $e > 1$, la conique est une hyperbole ;
- si $e = 1$, c'est une parabole ;
- si $0 < e < 1$, c'est une ellipse.

(Le cas particulier $e = 0$ correspond à un cercle, mais la construction avec une directrice n'a plus de sens).

REMARQUES : Si la conique est une hyperbole, la direction de ses asymptotes peut être déterminée en résolvant l'équation $q(x, y) = 0$. Ces deux asymptotes se rencontrent au centre de l'hyperbole, d'équation $\text{grad } F(x, y) = 0$. (☞ CENTRE.) ♦ Si c'est une parabole, la résolution de l'équation $q(x, y) = 0$ donne la direction de l'axe de la parabole. ♦ On peut donner une définition purement affine : une conique du plan affine muni d'un repère quelconque est une courbe d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. Si cette courbe est une partie compacte du plan, alors c'est une ellipse. Parmi les coniques non compactes, la parabole est connexe par arcs et l'hyperbole ne l'est pas. ♦ Les coniques ont été l'objet de l'étude du *Traité sur les coniques*, écrit par le mathématicien grec Apollonius (262–190 av. J.-C.) qui le premier en donna une description en terme d'intersection d'un cône avec un plan quelconque ; ces constructions sont données aux entrées correspondant à chaque conique (☞ ELLIPSE, HYPERBOLE, PARABOLE).

☞ BIFOCAL, CENTRE, ELLIPSE, HYPERBOLE, PARABOLE, POLAIRE.

Conique dégénérée Certaines coniques, dites *dégénérées*, ne peuvent être définies géométriquement comme précédemment.

- *Ellipse* : peut être vide (équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -c^2$) ou réduite à un point ($c = 0$) ;
- *Hyperbole* : peut être réduite à un faisceau de deux droites (équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$) ;
- *Parabole* : peut être réduite à deux droites parallèles (équation réduite $X^2 = a^2$) ou à une droite ($X^2 = 0$), ou encore être vide ($X^2 = -a^2$).

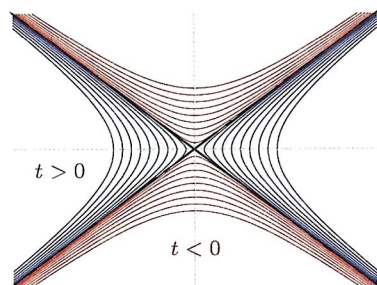


Fig. 15 — Famille d'hyperboles d'équation $X^2 - \alpha^2 Y^2 = t$, où t est un paramètre tendant vers 0. Lorsque $t = 0$, l'hyperbole est dégénérée en un faisceau de deux droites (en noir) d'équations $y = \alpha x$ et $y = -\alpha x$.

CONJUGAISON

Conjugaison complexe Application qui à un complexe z associe son * conjugué $\bar{z}$.

Conjugaison dans un groupe Soient G un groupe et g un élément de G . L'application $\varphi_g : x \mapsto gxg^{-1}$ s'appelle conjugaison par g .

Conjugaison par similitude ☞ SIMILITUDE.

CONJUGUÉ

Conjugué d'un nombre complexe z Soit z un complexe, décomposé sous la forme $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Son conjugué est $\bar{z} = a - ib$.

REMARQUES : Si $w = \bar{z}$ est le conjugué de z , alors $\bar{w} = z$: on dit que z et w sont conjugués. La conjugaison est donc une * involution. ♦ Le conjugué de $re^{i\theta}$ est $re^{-i\theta}$ si r et θ sont réels. ♦ Si $|z| = 1$, alors $\bar{z} = z^{-1}$. ♦ On a les formules $\bar{z}\bar{w} = \overline{z \cdot w}$ et $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$. ♦ Le module d'un complexe vérifie $|z|^2 = z \bar{z}$.

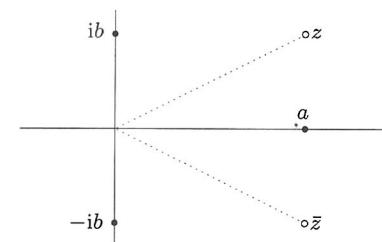


Fig. 16 — Le conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$.

CONNEXE

Partie connexe par arcs Une partie A d'un espace vectoriel normé E est dite connexe par arcs si, pour tous $x, y \in A$, il existe un chemin $\gamma : [0; 1] \rightarrow A$ d'extrémités x et y (c'est-à-dire tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$).

Exemples : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, mais $GL_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas. ♦ Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

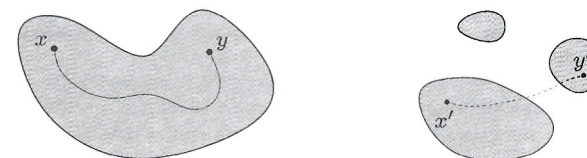


Fig. 17 — *À gauche* : une partie connexe par arcs du plan. Les deux points x et y sont reliés par un chemin continu. *À droite* : une partie non connexe par arcs. Les points x' et y' ne peuvent pas être reliés par un chemin qui reste dans A .

Partie connexe Une partie X d'un espace vectoriel normé E est dite connexe si elle ne peut pas s'écrire comme la réunion disjointe de deux ouverts relatifs non vides de X , c'est-à-dire s'il l'on ne peut pas l'écrire sous la forme

$$X = (A \cap X) \cup (B \cap X),$$

avec A et B ouverts et $A \cap X, B \cap X$ non vides.

REMARQUES : Toute partie connexe par arcs est connexe mais la réciproque n'est pas vraie ; dans $\mathbb{R}^2$, la réunion du graphe de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$, restreinte à $\mathbb{R}^+$, et de la demi-droite $\{(0, y) ; y \geq 0\}$ est connexe, mais non connexe par arc. ♦ On peut étendre cette notion à un espace topologique ou un espace métrique E ; celui-ci est dit connexe s'il ne peut pas s'écrire comme la réunion disjointe de deux ouverts non vides. Autrement dit, si les seules parties à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et E tout entier.

Partie simplement connexe Une partie X d'un espace vectoriel normé E est dite simplement connexe si elle est connexe par arcs et si tous les chemins fermés peuvent

se déformer continûment jusqu'à un chemin formé d'un seul point (on dit que toutes les boucles sont *homotopes* à zéro).

Exemple : Le département de la Drôme (ci-dessous, à gauche) est connexe, mais pas simplement connexe. Le département du Vaucluse (à droite) n'est pas connexe, mais produit des vins réputés, notamment dans la célèbre *enclave-des-Papes*, entièrement entourée par la Drôme.

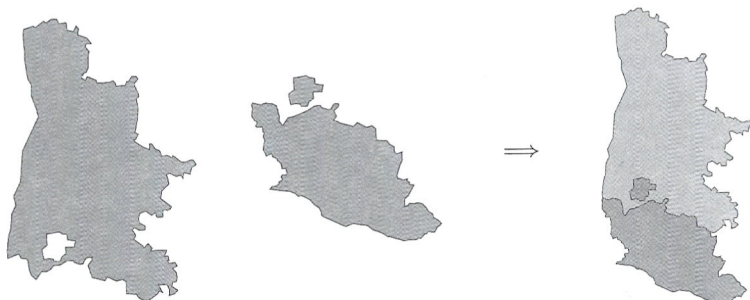


Fig. 18 — À gauche : la Drôme (connexe, mais non simplement connexe) et le Vaucluse (non connexe). À droite : la réunion de ces deux départements est connexe et simplement connexe.

CONSTRUCTIBLE

Point constructible Un des plus anciens problèmes de mathématiques que nous a légués l'Antiquité grecque est celui de la constructibilité, à la règle et au compas, d'un certain nombre de figures.

Par *règle*, on entend une règle non graduée, permettant de tracer une droite entre deux points donnés; par *compas*, on entend un compas non gradué permettant de tracer un cercle de centre donné, et dont le rayon est égal à la distance de deux points donnés du plan.

On part du plan (euclidien, le plan habituel, le seul connu des Grecs), muni de deux points; l'un, O , est l'origine, tandis que le second, I , permet de tracer un vecteur OI que l'on supposera unitaire (quitte à redéfinir la notion de distance) et, partant de là, une base orthonormée.

Partant de ces deux points, on a le droit de tracer des droites et des cercles selon la règle précisée plus haut. Les intersections de ces droites et cercles déterminent de nouveaux points, dits constructibles. On peut ensuite itérer le processus autant de fois que l'on veut. Au final, un point M est donc dit constructible s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une suite $M_0, \dots, M_n$ tels que :

- $M_0 \in \{O, I\}$;
- pour $k \in [1; n]$, M_{k+1} est construit comme l'intersection de deux droites, d'une droite et d'un cercle, ou de deux cercles, construits à partir de $M_0, \dots, M_{k-1}$;
- $M_n = M$.

REMARQUES : La théorie de la constructibilité de points du plan passe par l'étude des extensions de * corps. ♦ Les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas sont ceux dont le nombre de côté est de la forme $2^k F_{k_1} F_{k_2} \dots F_{k_n}$, où k est un entier naturel et les nombres F_{k_i} sont des nombres de * Fermat premiers, distincts deux à deux (théorème dû à Gauss). Ainsi, sont constructibles les polygones à 3, 5, 17, 257 et 65 537 côtés, mais pas à 7, 9 ou 11 côtés... Gauss donna, à l'âge de 19 ans une construction explicite du polygone à 17 côtés.

Nombre constructible Abscisse, ordonnée ou, plus généralement, affixe d'un point constructible du plan.

REMARQUE : Le nombre $\sqrt{5}$ est constructible. En revanche, $\cos(\pi/9)$ ne l'est pas. De même, le nombre $\sqrt{\pi}$ n'est pas constructible, ce qui répond, par la négative, au fameux problème de la *quadrature du cercle* : construire, à la règle et au compas, un carré ayant même aire qu'un cercle donné. La preuve de la non constructibilité de π passe par la preuve de sa transcendance, établie en 1882 par Lindemann.

CONTINUE

Fonction continue Une fonction $f : A \rightarrow F$ (où A est une partie d'un espace vectoriel normé E et F un espace vectoriel normé) est dite continue en un point $a \in A$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leq \eta \implies \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

♦ Une fonction $f : A \rightarrow F$ est dite continue sur A si elle est continue en chaque point de A . ♦ Si B est une partie de A et si $f : A \rightarrow F$ est définie sur A , on dit que f est continue sur B si la restriction $f|_B : B \rightarrow F$ est continue.

REMARQUE : La propriété « f est continue en tout point de B » implique « f est continue sur B », mais la réciproque n'est assurée que si B est un ouvert.

Exemple : La fonction partie entière, définie sur $\mathbb{R}$, est continue sur $[0; 1[$, puisque sa restriction à $[0; 1[$ est la fonction nulle; pourtant, elle n'est pas continue en 0, qui est pourtant élément de $[0; 1[$.

*** CARACTÉRISATION * SÉQUENTIELLE DE LA CONTINUITÉ.

Fonction uniformément continue Fonction $f : A \rightarrow F$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in A^2 \quad \|x - y\| \leq \eta \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

REMARQUES : Toute fonction uniformément continue est continue, mais l'inverse n'est pas vrai : la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. ♦ Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue. ♦ Sur un compact, toute fonction continue est uniformément continue (théorème de * Heine).

Fonction continue par morceaux *** MORCEAUX.

Fraction continue *** FRACTION.

Variable aléatoire continue, absolument continue *** VARIABLE ALÉATOIRE.

Caractérisation de la continuité d'une application linéaire Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors f est continue si et seulement si l'une des propriétés suivantes est réalisée :

- f est continue en 0;
- f est lipschitzienne;
- il existe un réel $k \geq 0$ tel que $\|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$ pour tout $x \in E$;
- l'image de la boule unité fermée est bornée;
- l'image de toute partie bornée est bornée.

*** NORME * SUBORDONNÉE.

Caractérisation de la continuité d'une forme linéaire Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ une application linéaire non nulle. Alors f est continue si et seulement si l'hyperplan $\text{Ker } f$ est fermé.

CONTOUR

Contour apparent d'une surface selon un vecteur u Ensemble des points réguliers de la surface dont le plan tangent est parallèle à u .

REMARQUE : Le contour apparent d'une quadrique selon une direction est toujours une courbe plane, et plus précisément une conique.

Contour apparent d'une surface selon un point M Ensemble des points réguliers de la surface dont le plan tangent est passe par le point M.

CONTRACTION

Soient E un espace vectoriel normé, A une partie de E et $f : A \rightarrow E$ une application telle que A est stable par f . On dit que f est une contraction, ou *application contractante*, s'il existe $k \in \mathbb{R}$, $0 \leq k < 1$, tel que pour tous $x, y \in A$, on ait $\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$.

☞ LIPSCHITZIENNE, POINT FIXE.

CONTRAPOSÉE

La contraposée de l'énoncé « $P \Rightarrow Q$ » est l'énoncé « $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$ ». Ces deux énoncés sont équivalents.

Exemple : Pour démontrer l'équivalence entre deux propositions P et Q , on peut donc par exemple :

- montrer « $P \Rightarrow Q$ », puis montrer « $Q \Rightarrow P$ » ;
- ou bien montrer « $P \Rightarrow Q$ », puis montrer « $(\text{non } P) \Rightarrow (\text{non } Q)$ ».

CONVERGENCE

Convergence d'une suite On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace vectoriel normé E est convergente s'il existe $\ell \in E$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Le vecteur ℓ est alors unique et appelé *limite* de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

☞ CRITÈRE DE CAUCHY, PASSAGE À LA LIMITE.

Convergence d'une série Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ ou dans un espace vectoriel normé E . Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la somme partielle d'ordre n .

On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, la *somme* de la série $\sum u_n$ est le nombre

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

☞ COMPARAISON, CRITÈRE DES SÉRIES ALTERNÉES, RESTE, SOMME PARTIELLE.

Convergence d'une intégrale Soit I un intervalle semi-ouvert, par exemple $I = [a; b[$, où b est soit un réel, soit $+\infty$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\int_I f$ converge (ou est convergente) si la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

admet une limite en b . ♦ Elle *converge absolument* si l'intégrale $\int_I |f|$ converge ; dans ce cas, on dit que la fonction f est *intégrable sur I*.

REMARQUES : Si I est un intervalle ouvert $I =]a; b[$, il convient de séparer cet intervalle en deux intervalles semi-ouverts, en choisissant arbitrairement un point $c \in]a; b[$. L'intégrale $\int_I f$ est dit convergente si et seulement si les deux intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent. La convergence de l'intégrale ne dépend évidemment pas du point c . ♦ De manière plus

générale, il convient de séparer l'intervalle I en autant de morceaux que nécessaires au moment de l'étude de l'intégrabilité d'une fonction.

Exemple : La fonction $t \mapsto (\sin t)/t$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$, mais son intégrale converge malgré tout. On peut d'ailleurs établir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi.$$

☞ INTÉGRABLE.

Convergence absolue On dit que la série (réelle ou complexe) $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge. ♦ Toute série numérique absolument convergente est convergente. ♦ On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I si la série $\sum |f_n|$ converge simplement, c'est-à-dire si $\sum f_n(x)$ converge absolument pour tout $x \in I$. ♦ On dit qu'une série $\sum u_n$ à valeurs dans un espace vectoriel normé E converge absolument si la série $\sum \|u_n\|$ converge.

REMARQUES : Un espace vectoriel normé E est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente. ♦ Si E est l'espace vectoriel des fonctions bornées sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$, la convergence absolue s'appelle plutôt convergence normale de la série de fonctions.

☞ COMPLÉTUDE.

Convergence en loi Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires. Notons F_n la fonction de répartition de X_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire, de fonction de répartition F . On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers (la loi de) X si, pour tout x réel tel que F est continue en x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x).$$

♦ Les exemples classiques de convergence en loi sont :

- approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale ;
- approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson ;
- théorème central limite.

☞ APPROXIMATIONS, CONVERGENCE EN PROBABILITÉ, THÉORÈME CENTRAL LIMITE.

Convergence en moyenne Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications continues par morceaux sur I converge en moyenne vers f continue par morceaux si, à partir d'un certain rang, $f_n - f$ est intégrable et si $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I |f_n - f| = 0$.

Exemples : Définissons sur $[0; 1]$ les fonctions $f_n : x \mapsto x^n$. Alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne vers la fonction nulle, mais ne converge pas simplement. ♦ Définissons sur $\mathbb{R}$ les fonctions $f_n : x \mapsto \exp \{-(x-n)^2\}$. Alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle, mais ne converge pas en moyenne.

Convergence en moyenne quadratique Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications continues par morceaux converge en moyenne quadratique vers f continue par morceaux sur I si $f_n - f$ est, à partir d'un certain rang, de carré intégrable sur I et si $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I |f_n - f|^2 = 0$.

Exemple : La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n : x \mapsto (1/\sqrt{n}) e^{-x/n}$, converge en moyenne quadratique vers la fonction nulle mais ne converge pas en moyenne.

Convergence normale Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un ensemble A et à valeurs dans un espace vectoriel normé E . On dit que la série $\sum f_n$ converge normalement sur A si toutes les f_n sont bornées sur A et si la série $\sum \|f_n\|_{\infty}$ est convergente, en notant $\|f_n\|_{\infty} = \sup_{x \in A} |f_n(x)|$.

Convergence presque sûre Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge presque sûrement vers une variable aléatoire Y s'il existe une partie N de Ω , négligeable, telle que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = Y(\omega),$$

ou encore

$$\mathbf{P} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = Y \right] = 1.$$

REMARQUE : La convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité, qui elle-même entraîne la convergence en loi.

Convergence en probabilité Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge en probabilité vers une variable aléatoire Y si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}[|X_n - Y| \geq \varepsilon] = 0.$$

REMARQUE : La convergence en probabilité entraîne la convergence en *loi.

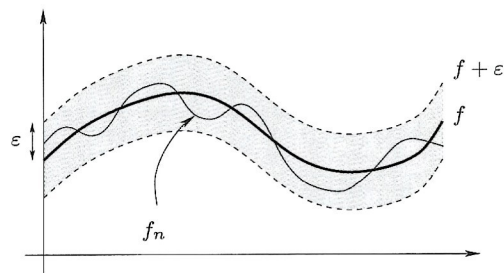
Convergence simple d'une suite de fonctions Soient A un ensemble et E un espace vectoriel normé. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications $A \rightarrow E$ et soit $f : A \rightarrow E$. On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A si, pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. On dit alors que f est la *limite simple* de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple : La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $f_n : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f_n(x) = x^n$, converge simplement vers la fonction nulle sur $[0; 1[$. La convergence n'est pas uniforme car $\|f_n - 0\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Convergence simple d'une série de fonctions Une série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur un ensemble A si la suite de ses sommes partielles converge simplement sur A , c'est-à-dire si la série $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x \in A$.

Convergence uniforme d'une suite de fonctions Soient A un ensemble et E un espace vectoriel normé. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications $f_n : A \rightarrow E$ et soit $f : A \rightarrow E$. On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si $(f_n - f)$ est bornée à partir d'un certain rang et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. ♦ Cela revient à écrire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies \sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$



REMARQUE : Un des grands intérêts de la convergence uniforme est qu'elle préserve la continuité : si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f et si f_n est continue en a pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est continue en a . Ce n'est pas le cas avec la convergence simple.

☞ THÉORÈME DE LA DOUBLE *LIMITE, NORME INFINIE.

Convergence uniforme d'une série de fonctions On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément si la suite des sommes partielles converge uniformément.

Théorème de convergence dominée ☞ DOMINÉE.

Théorème de convergence monotone ☞ MONOTONE.

CONVEXE (FONCTION)

Fonction convexe / strictement convexe Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit φ une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on dit que φ est une fonction convexe si

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad \forall \lambda \in]0; 1[\quad \varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda) \varphi(y).$$

♦ On dit qu'elle est strictement convexe si l'inégalité ci-dessus est stricte dès que $x \neq y$. ♦ Si E est un espace vectoriel normé et C une partie convexe de E , une fonction $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si elle vérifie

$$\forall (x, y) \in C^2 \quad \forall \lambda \in]0; 1[\quad \varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda) \varphi(y).$$

Exemples : La fonction exponentielle, définie sur $\mathbb{R}$, est strictement convexe. ♦ La fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$ mais pas strictement convexe. ♦ Les fonctions $x \mapsto x^n$, définies sur $\mathbb{R}^+$, sont strictement convexes pour tout $n \geq 1$. Elles sont convexes sur $\mathbb{R}$ si n est pair mais pas si n est impair. ♦ Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, l'application $x \mapsto \|x\|$ est convexe.

Caractérisation par les dérivées Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors φ est (strictement) convexe si et seulement si φ' est (strictement) croissante. ♦ Notamment, si φ est deux fois dérivable, elle est convexe si et seulement si $\varphi'' \geq 0$.

Croissance des pentes Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $x \in I$; si φ est convexe, alors la fonction $p_x : t \mapsto \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x}$, définie sur $I \setminus \{x\}$, est croissante. ♦ Réciproquement, si, pour tout $x \in I$ la fonction p_x est croissante, alors φ est convexe. ♦ On en déduit une caractérisation de la convexité par la double inégalité des pentes illustrée dans la figure suivante.

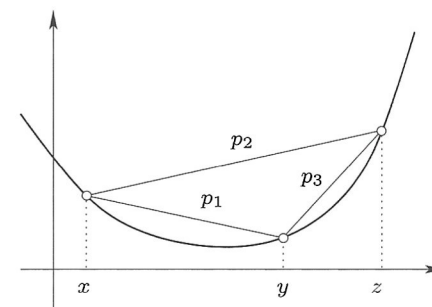


Fig. 19 — Si $x < y < z$, alors on a les inégalités des pentes $p_1 \leq p_2 \leq p_3$.

Convexité et cordes Soit φ une fonction convexe sur I . Soient A et B deux points du graphe de φ . Alors, le graphe est au-dessous de la corde (AB) entre les abscisses x_A et x_B , et au-dessus de la corde (AB) en dehors de l'intervalle $[x_A; x_B]$ (voir figure 20).

Convexité et tangentes Soit M un point du graphe d'une fonction φ convexe sur I ; on suppose de plus que φ est dérivable en x_M , ce qui signifie que son graphe admet une tangente en M . Alors le graphe de φ est partout au-dessus de la tangente en M (voir figure 21).

Autres propriétés Si I est ouvert et si $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors elle est continue sur I . ♦ Si, de plus, a est un point intérieur à I , alors φ admet en a une dérivée à gauche $\varphi'_g(a)$ et une dérivée à droite $\varphi'_d(a)$, vérifiant $\varphi'_g(a) \leq \varphi'_d(a)$. ♦ Les points en

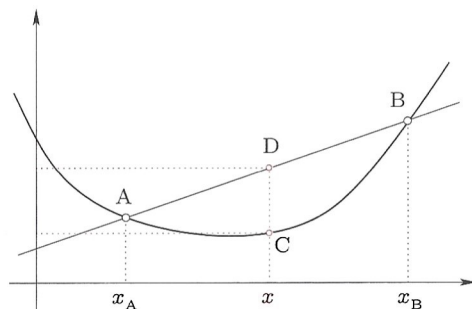


Fig. 20 — Propriété des cordes. Le graphe d'une fonction convexe est *sous* la corde AB sur $[x_A; x_B]$ et *au dessus* en dehors de cet intervalle. La première propriété est la traduction immédiate de la définition : si $x \in [x_A; x_B]$, alors il existe $\lambda \in [0; 1]$ tel que $x = \lambda x_A + (1 - \lambda)x_B$. Le point C a pour ordonnée $f(\lambda x_A + (1 - \lambda)x_B)$, tandis que le point D a pour ordonnée $\lambda f(x_A) + (1 - \lambda)f(x_B)$.

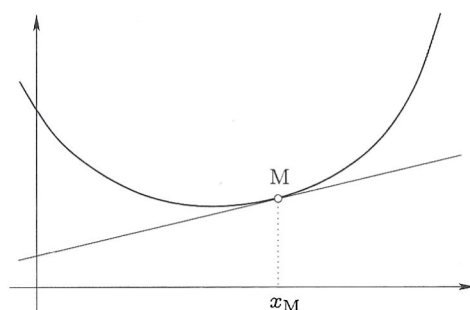


Fig. 21 — Le graphe d'une fonction convexe est toujours au dessus de ses tangentes.

lesquels cette inégalité est stricte sont au plus dénombrables. Ainsi, φ est dérivable en tout point de I , mis à part un ensemble dénombrable de points.

☞ INÉGALITÉ *ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE, INÉGALITÉS DE *JENSEN.

CONVEXE (PARTIE)

Une partie A d'un espace vectoriel E réel est convexe si, pour tous $x, y \in A$, le segment $[x; y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y; \lambda \in [0; 1]\}$ est inclus dans A .



Fig. 22 — $\hat{A}$ gauche : une partie convexe du plan. $\hat{A}$ droite : une partie non convexe. Le segment $[x; y]$ (en rouge) sort de A .

REMARQUE : Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son épigraphe, c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, y) \in I \times \mathbb{R}; y \geq f(x)\}$, est convexe.

CONVOLUTION

Convolution de deux fonctions Le produit de convolution $f * g$ de deux fonctions numériques $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ est la fonction définie par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$$

en toute valeur x telle que $t \mapsto f(t)g(x-t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. La fonction $f * g$ est appelée *convoluée* de f et de g .

REMARQUES : Si g est à support compact et si f est continue par morceaux, alors $f * g$ est bien définie. ♦ Si $f * g$ est bien défini, alors $g * f$ l'est également et $f * g = g * f$. ♦ Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ et g de classe $\mathcal{C}^\ell$, et si les produits de convolution suivants sont définis, alors $f * g$ est de classe $\mathcal{C}^{k+\ell}$ et $(f * g)' = f' * g = f * g'$. Ainsi, la convolution a un aspect « régularisant ». ♦ Cette propriété est utilisée pour approcher une fonction par une suite de fonctions plus régulières, en la convoluant avec des fonctions « piquées » mais régulières, par exemple $g_n : x \mapsto (1/n)g(x/n)$ où $g : x \mapsto e^{-\pi x^2}$ est une fonction gaussienne. Elle permet également de démontrer le premier théorème d'approximation de Weierstrass. ♦ Le produit de convolution intervient dans la résolution de nombreuses équations différentielles. Ainsi, l'équation $y'' + y = \varphi$ où φ est une fonction continue par morceaux admet pour solutions sur $\mathbb{R}^+$:

$$f(t) = A \cos t + B \sin t + \int_0^t \sin(t-s) \varphi(s) ds$$

que l'on peut voir, aux termes $A \cos t + B \sin t$ près, comme le produit de convolution des fonctions $H \sin$ et $H \varphi$, où H est la fonction de Heaviside, définie par $H(t) = 1$ si $t \geq 0$ et $H(t) = 0$ sinon. ♦ D'une manière plus générale, si f et g sont des fonctions intégrables, alors leur produit de convolution est défini presque partout et intégrable.

Exemple : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, admettant des densités respectives f et g , alors $X + Y$ est une variable aléatoire admettant pour densité le produit de convolution $f * g$.

Produit de convolution de deux suites Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques. Leur produit de convolution est la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

♦ Si les suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont indexées par $\mathbb{Z}$, alors leur produit de convolution, s'il existe, est la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de terme général

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_{n-k}.$$

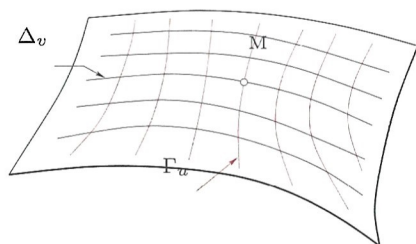
Cette formule est l'équivalent discret de la formule de convolution de deux fonctions.

☞ PRODUIT DE *CAUCHY.

COORDONNÉES

Famille finie de scalaires permettant de désigner de manière univoque un point d'un ensemble.

Coordonnées curvilignes Dans le plan, ou sur une surface $\mathcal{S}$ quelconque, supposons données deux familles de courbes $(\Gamma_u)_{u \in I}$ et $(\Delta_v)_{v \in J}$, vérifiant la propriété suivante : pour tout point $M \in \mathcal{S}$, il existe un unique couple $(u, v) \in I \times J$ tel que $\{M\} = \Gamma_u \cap \Delta_v$. Alors, (u, v) est appelé couple des coordonnées curvilignes de M (selon les deux familles de courbes).

Fig. 23 — Coordonnées curvilignes d'un point sur une surface $\mathcal{S}$.

Exemples : Dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine, la famille des cercles C_r de centre O et de rayon r , et la famille Δ_θ de demi-droites d'angle θ par rapport à la demi-droite Ox , permettent de définir les coordonnées polaires d'un point ($\Rightarrow$ COORDONNÉES POLAIRES). $\blacklozenge$ Dans le quart de plan euclidien $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0 \text{ et } y > 0\}$, considérons les familles de paraboles

$$\Gamma_u : y^2 = 2ux \quad \Delta_v : x^2 = 2vy.$$

Pour tout point $M(x_0, y_0)$ de $\mathcal{S}$, il existe un unique couple $(u, v) \in (\mathbb{R}^{++})^2$ tel que $\{M\} = \Gamma_u \cap \Delta_v$, à savoir $u = y_0^2/2x_0$ et $v = x_0^2/2y_0$, qui sont les *coordonnées paraboliques* de M.

Coordonnées cartésiennes Dans le plan affine, ou plus généralement dans un espace affine $\mathcal{E}$ muni d'un repère affine $(O, e_1, \dots, e_n)$, on dit qu'un point M a pour coordonnées cartésiennes $(x_1, \dots, x_n)$ si $\overrightarrow{OM} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. $\blacklozenge$ Les trois premières coordonnées (pour celles qui existent) sont habituellement appelées *abscisse*, *ordonnée* et *cote*, et généralement notées x , y , et z .

Coordonnées polaires Dans le plan affine orienté, muni d'un repère orthonormé (O, i, j) , tout point $M \neq O$ peut s'écrire sous la forme

$$\overrightarrow{OM} = r(\cos \theta i + \sin \theta j) \quad r > 0.$$

Le réel positif r est unique et donné par $r = \|\overrightarrow{OM}\|$; le réel θ est unique modulo 2π . Le couple (r, θ) est un couple de coordonnées polaires de M.

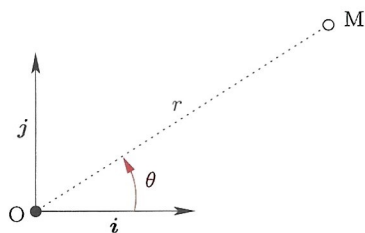


Fig. 24 — Coordonnées polaires.

Coordonnées cylindriques Dans l'espace affine muni d'un repère (O, i, j, k) orthonormé, tout point M de l'espace peut s'écrire sous la forme

$$\overrightarrow{OM} = r(\cos \theta i + \sin \theta j) + z k.$$

Le réel positif r est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM'}$, où M' est le projeté orthogonal de M sur le plan (O, i, j) . Le nombre z est la *cote* de M.

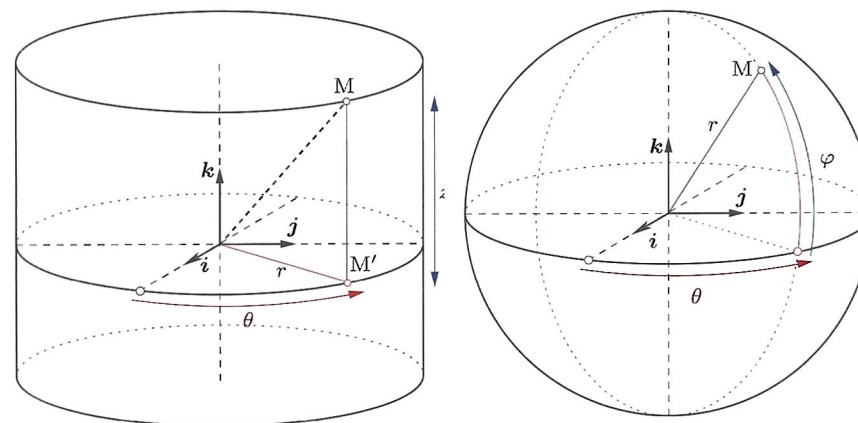


Fig. 25 — Coordonnées cylindriques et coordonnées sphériques.

Coordonnées sphériques Dans l'espace affine muni d'un repère (O, i, j, k) orthonormé, tout point M de l'espace peut s'écrire sous la forme

$$\overrightarrow{OM} = r \cos \varphi (\cos \theta i + \sin \theta j) + r \sin \varphi k.$$

Le réel positif r vaut $r = \|\overrightarrow{OM}\|$. Le réel θ est défini à 2π près; quant au réel θ , il est d'usage de le choisir dans $[-\pi; +\pi]$.

REMARQUE : Les physiciens font souvent le choix de mesurer l'angle azimutal φ à partir de la « verticale », c'est-à-dire qu'ils choisissent d'utiliser l'angle $\varphi' = \pi/2 - \varphi$.

Formes linéaires coordonnées Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $k \in [1; n]$, on appelle k -ième forme linéaire coordonnée la forme φ_k définie par son action sur $\mathcal{B}$: $\varphi_k(e_k) = 1$ et $\varphi_k(e_\ell) = 0$ si $\ell \neq k$. $\blacklozenge$ Notamment, si $x \in E$ se décompose sous la forme $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, alors

$$\varphi_k(x) = x_k \text{ (} k\text{-ième coordonnée de } x \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{)}.$$

REMARQUE : La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ vérifie $\varphi_k(e_\ell) = \delta_{k,\ell}$ pour tous $k, \ell \in [1; n]$. C'est donc la **base duale* de $\mathcal{B}$. On la note parfois $(dx_1, \dots, dx_n)$, notamment dans le cadre du calcul différentiel.

Coordonnées barycentriques Dans le plan affine euclidien $\mathcal{E}$, soient A et B et C trois points non alignés. Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, il existe un unique triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ (ne dépendant pas de O) vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et tel que M est le barycentre de (A, α) , (B, β) et (C, γ) . Le triplet (α, β, γ) est le jeu des coordonnées barycentriques de M relativement à A, B et C. $\blacklozenge$ Cette construction se généralise à un espace affine de dimension n quelconque.

REMARQUES : Si les coordonnées barycentriques sont toutes positives, alors M est à l'intérieur du triangle (A, B, C) . $\blacklozenge$ Si l'on note $\mathcal{A}(PQR)$ l'aire d'un triangle (PQR) , alors

$$\frac{\alpha}{\mathcal{A}(MBC)} = \frac{\beta}{\mathcal{A}(MCA)} = \frac{\gamma}{\mathcal{A}(MAB)}.$$

CORESTRICTION

Synonyme de restriction à l'arrivée. $\Rightarrow$ RESTRICTION.

CORPS

Un corps $(K, +, \cdot)$ est un anneau non réduit à $\{0\}$, dans lequel tout élément non nul est inversible.

Exemples : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, munis de l'addition et de la multiplication usuelles, sont des corps. ♦ Si p est un entier premier, l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps. ♦ L'anneau $\mathbb{R}[X]$ permet de construire le corps des fractions rationnelles $\mathbb{R}(X)$. ✎ FRACTION *RATIONNELLE.

REMARQUES : La loi de multiplication dans un corps n'est pas forcément commutative (par exemple, dans le corps des quaternions de *Hamilton). Cependant, les corps commutatifs sont naturellement utilisés dans plusieurs domaines des maths ; ainsi, en algèbre linéaire, les théorèmes usuels de la théorie de la réduction deviennent faux si le corps de base n'est pas commutatif. *Sauf mention contraire, tous les corps utilisés dans cet ouvrage sont supposés commutatifs.* ♦ Il est à noter que (sous l'influence de l'anglais ?), le mot « corps » désigne de plus en plus souvent un corps commutatif, les corps non commutatifs étant désignés sous le nom de « corps gauches ».

✎ ANNEAU INTÈGRE, ORDONNÉ.

Corps de caractéristique 0 Corps dans lequel $k1_K \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$.

Exemple : Les corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{K}[X]$ sont de caractéristique 0.

✎ CARACTÉRISTIQUE.

Corps de caractéristique 2 Corps dans lequel $1_K + 1_K = 0$. ♦ Dans un tel corps, tout élément x , on a $x + x = 0$, ou encore $x = -x$.

Corps de caractéristique p Corps dans lequel le noyau du morphisme d'anneaux $k \mapsto k1_K$, défini de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{K}$, est égal à $p\mathbb{Z}$. L'entier p est alors nécessairement premier.

Exemple : Si p est un entier premier, alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps de caractéristique p .

✎ CARACTÉRISTIQUE.

Corps fini Corps de cardinal fini.

Exemples : Si p est un entier premier, l'unique corps fini de cardinal p est (à un isomorphisme près) le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, parfois noté $\mathbb{F}_p$.

REMARQUE : Un corps fini est nécessairement commutatif ; son cardinal est de la forme p^n , où p est un entier premier et n un entier naturel non nul. ♦ Sur un corps fini, toute fonction est polynomiale (conséquence du théorème de Lagrange).

Corps ordonné ✎ ORDONNÉ.

Sous-corps Soit K un corps. Un sous-corps de K est une partie K' de K , stable par l'addition et la multiplication, telle que $(K', +, \cdot)$ soit un corps.

Exemple : $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$, lui-même sous-corps de $\mathbb{C}$.

Extension d'un corps K Corps L tel que K soit un sous-corps de L . ♦ La dimension de L en tant que $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est appelée *degré* de l'extension et notée $[L : K]$.

Exemple : Le corps $\mathbb{C}$ est une extension de corps de $\mathbb{R}$ et possède lui-même une extension de corps, non commutative, appelé *corps des quaternions* de Hamilton et noté $\mathbb{H}$ (✎ HAMILTON).

✎ CONSTRUCTIBLE.

CORRECTION DE CONTINUITÉ

Lorsqu'une variable aléatoire discrète X , à valeurs dans $\mathbb{Z}$, d'espérance m et d'écart-type σ , est approchée en loi par une variable normale N de loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$ (✎ THÉORÈME *CENTRAL LIMITE), la probabilité $\mathbf{P}[n \leq X \leq n']$ doit être calculée, non par la probabilité approchée $\mathbf{P}[n \leq N \leq n']$, mais par

$$\mathbf{P}\left[n - \frac{1}{2} \leq X \leq n' + \frac{1}{2}\right] \approx \mathbf{P}\left[n - \frac{1}{2} \leq N \leq n' + \frac{1}{2}\right].$$

Exemple : On lance 50 fois une pièce équilibrée et l'on souhaite calculer la probabilité que le nombre de *pile* obtenus soit compris entre 20 et 30. On note X la variable aléatoire égale

au nombre de *pile*, qui suit la loi binomiale de paramètres 50 et $1/2$, ou encore, de manière approchée, la loi normale de paramètres $m = 25$ et $\sigma = \sqrt{50/4}$. La probabilité cherchée est alors

$$p = \mathbf{P}[19, 5 \leq X \leq 30, 5] \approx \Phi\left(\frac{30, 5 - 25}{\sqrt{25/2}}\right) - \Phi\left(\frac{19, 5 - 25}{\sqrt{25/2}}\right) \approx 0, 881...$$

Sans la correction de continuité, on aurait trouvé

$$p = \mathbf{P}[20 \leq X \leq 30] \approx \Phi\left(\frac{30 - 25}{\sqrt{25/2}}\right) - \Phi\left(\frac{20 - 25}{\sqrt{25/2}}\right) \approx 0, 841...$$

Un calcul exact (utilisant la loi binomiale) donne $p = 0, 8810795474...$

CORRÉLATION

Coefficient de corrélation Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant une covariance et tel que $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{V}(Y)$ existent et sont non nulles. Le coefficient de corrélation du couple est

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X) \sigma(Y)}.$$

REMARQUES : Le coefficient de corrélation, de par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, est toujours dans l'intervalle $[-1; +1]$. Il ne vaut ± 1 que si les variables aléatoires X et Y sont presque sûrement affinement liées. Plus précisément, si l'on note X^* et Y^* les variables aléatoires centrées et réduites, alors, en notant $\rho = \pm 1$ ce coefficient de corrélation, $\mathbf{P}[Y^* = \rho X^*] = 1$. ♦ Changer les unités de X et/ou de Y ne change pas $\rho(X, Y)$, qui est une quantité adimensionnée.

✎ COVARIANCE, ESPÉRANCE, RÉDUITE, RÉGRESSION.

Variables corrélées Deux variables aléatoires X et Y sont dites corrélées si le couple (X, Y) admet une covariance et si $\text{Cov}(X, Y) \neq 0$. Dans les cas contraire, elles sont *décorrélées*.

REMARQUE : Si X et Y sont corrélées, alors elles ne sont pas indépendantes. Cependant, deux variables aléatoires peuvent être non indépendantes et néanmoins décorrélées.

COSINUS

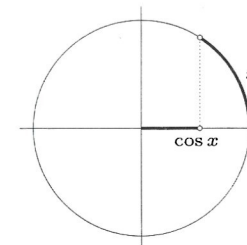
Fonction cosinus réelle La fonction cosinus, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, peut être définie de plusieurs manières équivalentes.

- *Par une série entière* : Pour tout x réel, $\cos x$ est la somme d'une série convergente :

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

- *Par une équation différentielle* : La fonction cosinus est l'unique solution de l'équation différentielle linéaire du 2^e ordre, à coefficients constants : $x'' + x = 0$, vérifiant les conditions initiales $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

- *Par la géométrie* : Originellement, le cosinus d'un nombre x était défini comme l'abscisse de la projection de l'extrémité d'un arc du cercle unité, de longueur x :



♦ Elle est reliée à la fonction exponentielle par

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

♦ Elle est 2π -périodique et vérifie :

$$\cos x = 0 \iff x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1 \iff x \in 2\pi\mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1 \iff x \in -\pi + 2\pi\mathbb{Z}.$$

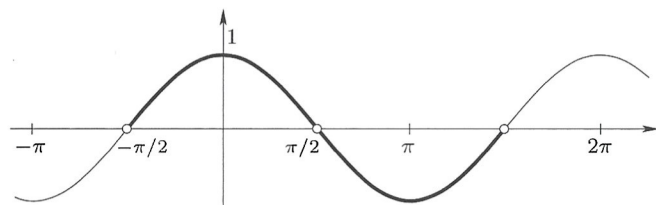


Fig. 26 — La fonction cosinus entre $-\pi$ et 2π ; en gras, la fonction cosinus restreinte à une période.

Les autres propriétés de la fonction cosinus (formules trigonométriques) sont rappelées à l'entrée « trigonométrie » page 304.

Fonction cosinus dans le plan complexe La fonction cosinus se prolonge dans plan complexe tout entier, la série entière la définissant étant de rayon infini :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

On a alors, pour tous a, b réels : $\cos(a + ib) = \cos a \operatorname{ch} b - i \sin a \operatorname{sh} b$. Enfin, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$ et $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

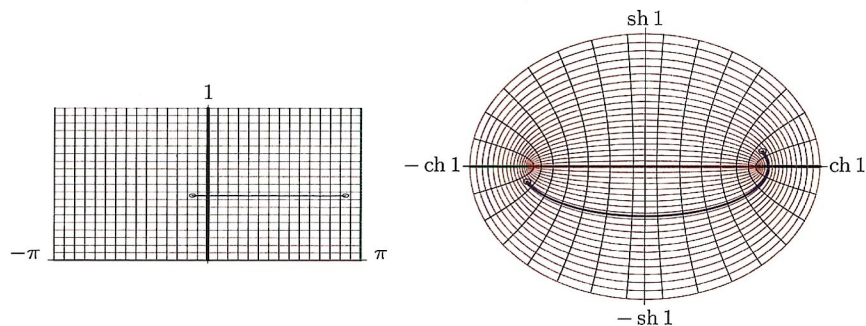


Fig. 27 — L'image du rectangle $[-\pi; \pi] \times [0; 1]$ du plan complexe par la fonction cosinus. L'image de l'axe des réels est l'intervalle réel $[-1; +1]$, représenté en rouge. L'image du demi-axe imaginaire $i\mathbb{R}^+$ (en noir) est le demi-axe réel $[1; +\infty[$. On a représenté également le demi-axe $\pi + i\mathbb{R}^+$ et son image (en vert), ainsi que deux points particuliers reliés par un chemin bleu et leurs images par la fonction cosinus.

Cosinus hyperbolique $\Leftrightarrow$ HYPERBOLIQUE.

COTANGENTE

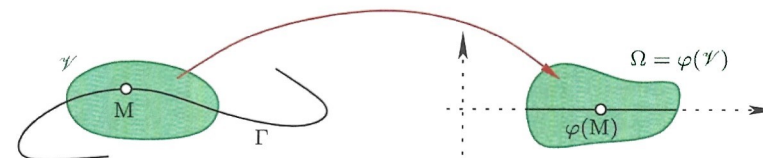
Fonction cotangente Fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ par $\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

$\Leftrightarrow$ FONCTION *TANGENTE.

Fonction cotangente hyperbolique $\Leftrightarrow$ HYPERBOLIQUE.

COURBE

Le terme « courbe » peut avoir plusieurs significations (pas forcément compatibles). Citons les deux principales. ♦ La première est celle de courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($\Leftrightarrow$ ARC PARAMÉTRÉ), objet dont l'étude est relativement simple. Cette définition regroupe cependant des objets très variés : courbes simples ($\Leftrightarrow$ ASTROÏDE, CARDIOÏDE), courbes présentant des points doubles (comme la lemniscate $\Leftrightarrow$ BERNOULLI), courbes multiples, voire même l'intérieur d'un carré (comme les courbes de Peano $\Leftrightarrow$ PEANO, LEBESGUE); elle se généralise à des dimensions plus élevées. Son inconvénient majeur est qu'elle introduit une part d'arbitraire : les propriétés d'un arc paramétré dépendent du choix de paramétrage et ne sont pas intrinsèques à la « courbe », objet géométrique, qui est l'image de l'arc. ♦ La deuxième signification, plus proche de l'intuition géométrique, est celle d'une partie Γ de $\mathbb{R}^2$ qui ressemble, localement et en chaque point, à un intervalle de $\mathbb{R}$. (Si l'on exclut la possibilité de points doubles; voir les remarques ci-après.) En termes plus précis, pour tout $M \in \Gamma$, il existe voisinage $\mathcal{V}$ de M et un homéomorphisme $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \Omega$, où Ω est un voisinage ouvert, dans $\mathbb{R}^2$, de $\varphi(M)$, tels que la restriction de φ à $\mathcal{V} \cap \Gamma$ a pour image un intervalle ouvert I .



♦ En pratique, une courbe peut être décrite au moyen de coordonnées; les trois méthodes principales sont :

- une équation de la forme $y = f(x)$ ou $y = g(x)$;
- une équation cartésienne (implicite) $F(x, y) = 0$;
- un paramétrage $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire une fonction $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$.

La première méthode est un cas particulier de chacune des deux autres; elle ne permet pas de décrire toutes les courbes (un cercle, par exemple). Cependant, dès que l'on a une certaine régularité (disons des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ au moins), si l'on considère la courbe de façon locale (on se place au voisinage d'un point), le théorème des fonctions implicites nous assure de l'équivalence des points de vue.

REMARQUES : Une fonction quelconque $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ne définit pas nécessairement une « courbe » par l'équation $F(x, y) = 0$. Si F est de classe $\mathcal{C}^1$ et si son gradient ne s'annule pas en un point (x, y) tel que $F(x, y) = 0$, alors le théorème des fonctions *implicites assure que l'ensemble Γ est bien, localement, paramétrable sous la forme $y = f(x)$ ou $x = f(y)$, et donc bien une « courbe » simple au sens géométrique du terme. ♦ En un point critique de la fonction F , la courbe peut présenter un point double, comme dans la figure 28 ci-après, ou multiple — voire ne plus du tout être une « courbe » au sens intuitif du terme. ♦ De même, un arc paramétré peut avoir un aspect très différent de ce que l'on entend généralement par « courbe », témoins les courbes de Peano, qui établissent des surjections continues $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]^2$; leur graphe remplit donc entièrement un carré ($\Leftrightarrow$ PEANO, LEBESGUE).

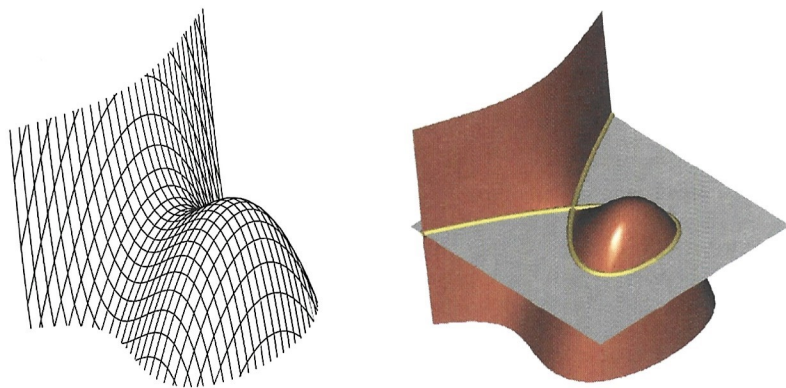


Fig. 28 — En un point critique d'une fonction $(x, y) \mapsto F(x, y)$, une courbe d'équation implicite $F(x, y) = 0$ peut présenter un point double.

☞ ARC PARAMÉTRÉ.

Courbes de niveau ☞ NIVEAU.

COURBURE

Courbure d'un arc Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc de classe $\mathcal{C}^2$, paramétré par une abscisse curviligne. Alors pour tout point $M(s)$, il existe un réel $c(s)$ tel que, en notant $(M(s), T(s), N(s))$ le repère de Frenet,

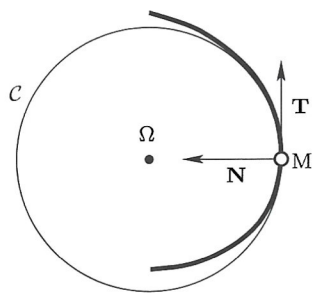
$$\frac{dT}{ds}(s) = c(s) N(s).$$

On l'appelle courbure de l'arc en $M(s)$.

REMARQUES : Si $t \mapsto \gamma(t)$ est un paramétrage quelconque, la courbure en un point $M(t)$ est donnée par $c(t) = \text{Det}(\gamma'(t), \gamma''(t)) / \|\gamma'(t)\|^3$, où Det est la forme déterminant dans une base orthonormée. ♦ Si γ est un paramétrage régulier d'un cercle, alors sa courbure est constante et égale, en valeur absolue, à l'inverse du rayon du cercle.

☞ DÉTERMINANT, FRENET, POINT D'INFLEXION, RAYON DE COURBURE.

Centre de courbure Également appelé centre du *cercle osculateur*. ♦ Il est défini par $\Omega(s) = M(s) + R(s)N(s)$, où R est le rayon de courbure et N le vecteur normal à l'arc au point $M(s)$.



☞ REPÈRE DE FRENET.

Rayon de courbure Inverse de la courbure : $R(s) = 1/c(s)$.

COVARIANCE

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Alors XY admet une espérance et le couple (X, Y) admet une covariance définie par

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

La formule de König-Huygens permet d'écrire cette quantité sous la forme

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

♦ Notamment, si X et Y sont indépendantes, leur covariance est nécessairement nulle.

REMARQUE : La réciproque est fautive : deux variables peuvent être décorrélées, c'est-à-dire vérifier $\text{Cov}(X, Y) = 0$, sans qu'elles soient indépendantes. Par exemple, le couple (X, Y) dont la loi est donnée par

$$P[X = -1, Y = 0] = P[X = 0, Y = 1] = P[X = 0, Y = -1] = P[X = 1, Y = 0] = \frac{1}{4}$$

a une covariance nulle. Pourtant, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes, puisque par exemple $P([X = 0] \cap [Y = 0]) = 0$ tandis que $P[X = 0] \cdot P[Y = 0] = \frac{1}{4}$.

☞ CORRÉLATION, KÖNIG, INDÉPENDANCE, MATRICE DES VARIANCES-COVARIANCES, MOMENT.

CRAMER *Gabriel* (1704-1752)

(Mathématicien suisse)

Système de Cramer Système de n équations à n inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

dont le déterminant Δ est non nul. Un tel système s'écrit donc sous la forme $AX = B$, où $A \in GL_n(\mathbb{K})$,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

♦ Il admet alors une solution unique $X = A^{-1}B$, donnée par les *formules de Cramer* : $x_i = \Delta_i / \Delta$, où Δ_i est le déterminant obtenu en remplaçant la i -ième colonne de Δ par la colonne B .

REMARQUE : Les formules de Cramer donnent un résultat théoriquement intéressant permettant de calculer X . Cependant, en pratique, le calcul d'un déterminant $n \times n$ est très gourmand en temps. Ainsi, pour un ordinateur, la résolution du système par **pivot de Gauss* est incomparablement plus rapide que la résolution par les formules de Cramer.

CRIBLE

Formule du crible ☞ FORMULE DE *POINCARÉ.

CRITÈRE

Critère de Cauchy ☞ CAUCHY.

Critère des séries alternées Également appelé *critère spécial des séries alternées* ou *critère de Leibniz* ou *critère d'Abel* : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une série alternée (c'est-à-dire si elle est de la forme $u_n = (-1)^n v_n$, où $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de signe constant), si $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît et tend vers 0, alors :

- la série $\sum u_n$ converge ;
- en notant $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des restes, $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et R_n est du signe de u_{n+1} ;
- en notant $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles, $|S_n| \leq |u_0|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et S_n est du signe de u_0 ;
- la somme S de la série est du signe de u_0 et vérifie $|S| \leq |u_0|$;
- enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme S est comprise entre S_n et S_{n+1} .

☞ ABEL.

CRITIQUE

Point critique Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de plusieurs variables, définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins. Un point a de Ω est appelé point critique de f si toutes les dérivées partielles premières de f s'annulent en a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0.$$

♦ Cela revient à dire que le gradient de f s'annule en a : $\nabla f(a) = 0$, ou encore que la différentielle de f en a est nulle : $df(a) = 0$.

REMARQUE : Si f admet un extremum en un point $a \in \Omega$, alors a est un point critique. La réciproque est fautive : un point *col en est un exemple classique, voir figure 13 page 59.

☞ RECHERCHE D'*EXTREMA LOCAUX.

CROISSANCES COMPARÉES

Aux notations usuelles de Landau, indiquant qu'une fonction est négligeable devant une autre, on préfère parfois les *notations de Hardy* et l'on écrit $f \ll g$ en lieu et place de $f = o(g)$, ce qui permet d'enchaîner les règles de croissances comparées, car la relation $\ll$ est transitive. ♦ Ainsi, au voisinage de $+\infty$, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et en particulier pour $a = e$, on a

$$a^n \ll n! \ll n^n.$$

♦ Si $0 < a < b$ et si $1 < \lambda < e < \mu$, on a, toujours en $+\infty$:

$$1 \ll \ln x \ll x^a \ll x^b \ll \lambda^x \ll e^x \ll \mu^x \ll x^x.$$

♦ Si $\alpha > 0$ et si $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^\alpha \ln^\beta x) = 0.$$

CROISSANT

Fonction croissante Soient $(E, \leq)$ et $(F, \preceq)$ deux ensembles ordonnés. Une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite croissante lorsque, pour tous $x, y \in E$, on a

$$x \leq y \implies f(x) \preceq f(y).$$

Cette définition permet d'englober les notions de fonctions réelles croissantes, de suites croissantes, de suites croissantes de parties d'un ensemble, etc.

Suite croissante Une suite croissante à valeurs dans un ensemble ordonné $(F, \preceq)$ est une fonction croissante de $(\mathbb{N}, \leq)$ dans $(F, \preceq)$; en pratique, si l'on note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une telle suite, elle est croissante si $u_n \preceq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Suite croissante de parties d'un ensemble Soit E un ensemble. Une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de E est dite croissante si elle est croissante dans l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(E), \subset)$, c'est-à-dire si $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

REMARQUE : Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de parties de E , alors elle admet une « limite » qui est l'union des A_n .

☞ EXHAUSTIVE.

CURVILIGNE

Abscisse curviligne Sur un arc $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, une abscisse curviligne est une fonction S de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que $S'(t) = \|\gamma'(t)\|_2$ pour tout $t \in I$. ♦ Si l'on choisit un point $M(t_0)$ comme origine, on peut définir une abscisse curviligne, d'origine t_0 , par

$$S(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(\xi)\|_2 d\xi,$$

♦ Une abscisse curviligne est un cas particulier de paramétrage admissible pour un arc régulier de classe $\mathcal{C}^1$. C'est également un paramétrage *normal* : si l'on paramètre M par $s = S(t)$, la dérivée de M par rapport à s est de norme égale à 1.

☞ FRENET, PARAMÉTRAGE NORMAL, PARAMÉTRAGE ADMISSIBLE.

Intégrale curviligne On intègre une forme différentielle $\omega : U \rightarrow E^*$ continue sur un arc paramétré γ de classe $\mathcal{C}^1$ de E par la formule

$$\int_{\gamma} \omega \stackrel{\text{déf.}}{=} \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt.$$

Cette définition étant invariante par changement de paramétrage, le résultat de l'intégrale ne dépend que de la nature géométrique de l'arc γ et pas du choix du paramétrage.

REMARQUE : Si ω est exacte et si F est une primitive de ω , alors $\int_{\gamma} \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. Notamment, le résultat de l'intégration ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des extrémités de γ .

☞ EXACTE.

CYCLE

Si E est un ensemble, un cycle de *longueur* n (ou : d'*ordre* n) est une permutation σ de E telle qu'il existe des éléments $a_1, \dots, a_n$ de E , deux à deux distincts, vérifiant $\sigma(a_k) = a_{k+1}$ pour $k = 1, \dots, n-1$, $\sigma(a_n) = a_1$, et tels que les éléments de E ne faisant pas partie de la liste $a_1, \dots, a_n$ sont invariants par σ . ♦ On note symboliquement $(a_1, \dots, a_n)$ un tel cycle.

Exemple : Le cycle $(1, 4, 3, 2)$ est la permutation qui envoie 1 sur 4, 4 sur 3, 3 sur 2 et 2 sur 1.

REMARQUES : La signature d'un cycle de longueur n est $(-1)^{n+1}$. ♦ Toute permutation se décompose comme le produit (pour la composition) de cycles de supports disjoints.

☞ PERMUTATION, TRANSPOSITION, SIGNATURE.

CYCLIQUE

Endomorphisme cyclique Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique s'il existe un vecteur $x \in E$ tel que : $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E . ♦ Dans cette base, la matrice représentative de u est la transposée d'une matrice compagnon, dont le polynôme associé est le polynôme caractéristique de u .

REMARQUES : Les endomorphismes cycliques sont le sujet de très nombreux exercices classiques. Citons les résultats suivants. ♦ Si u possède n valeurs propres distinctes, alors u est cyclique. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base propre, le vecteur $x = e_1 + \dots + e_n$ engendre une base $\mathcal{B}$ convenable. ♦ Si E est de dimension n et si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotente d'indice $n - 1$, alors u est cyclique. ♦ Si u est diagonalisable et cyclique, alors il possède n valeurs propres distinctes. ♦ Enfin, l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec un endomorphisme cyclique u est $\mathbb{K}_{n-1}[u] = \mathbb{K}[u]$.

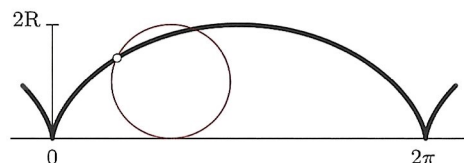
Groupe cyclique Groupe monogène fini. $\Rightarrow$ GROUPE.

CYCLOÏDE

Courbe engendrée par un point d'un cercle roulant, sans glissement, sur une droite. Dans un repère approprié, cette courbe a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t), \\ y(t) = R(1 - \cos t). \end{cases}$$

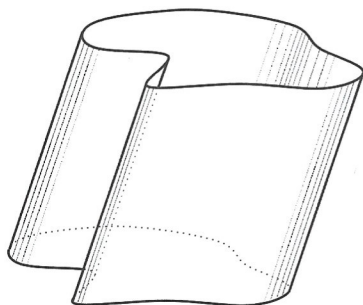
La longueur d'une arche est $8R$ et l'aire contenue sous cette arche est $3\pi R^2$.



REMARQUES : Le philosophe et mathématicien Pascal écrivit un grand traité sur la cycloïde, qui s'appelait alors *roulette*. ♦ Si le point engendrant la courbe n'est pas sur le cercle, mais à l'intérieur (resp. à l'extérieur), la cycloïde ne présente plus de point de rebroussement. ♦ Si le cercle roule à l'intérieur d'un autre cercle, on parle d'*hypocycloïde* et, s'il roule à l'extérieur, d'*épicycloïde*.

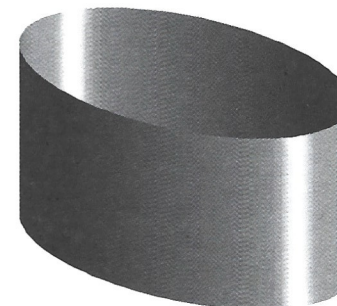
CYLINDRE

Surface réglée dont les génératrices ont une direction fixe D . ♦ Un cylindre est donc déterminé par une courbe rencontrant toutes les génératrices et par la direction D .



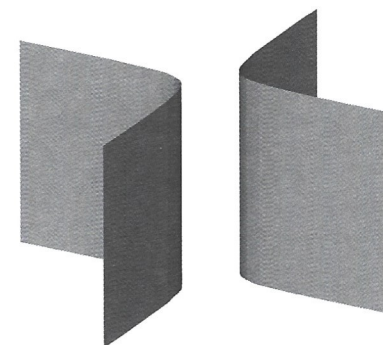
Cylindre elliptique Quadrique de rang 2 d'équation, dans un repère adéquat :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Cylindre hyperbolique Quadrique de rang 2 d'équation, dans un repère adéquat :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Cylindre parabolique Quadrique de rang 1 d'équation, dans un repère adéquat :

$$x^2 = 2py.$$

