

D

D'ALEMBERT

☞ ALEMBERT.

DALEMBERTIEN

Opérateur différentiel d'ordre deux :

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

où c est la célérité des ondes, étant entendu que les variables x, y et z décrivent l'espace, et la variable t le temps. Cet opérateur s'applique à des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Exemple : Si c désigne la célérité de la lumière dans le vide, alors les ondes électromagnétiques dans le vide suivent l'équation $\square f = 0$, où f représente l'une des quantités φ, A_x, A_y ou A_z (potentiel scalaire et composantes du potentiel vecteur). ☞ ALEMBERT.

DARBOUX *Gaston* (1842–1917)
(Mathématicien français)

Théorème de Darboux Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors, sa dérivée f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (même si elle n'est pas continue) : l'image de tout intervalle par f' est un intervalle.

Exemple : La fonction $f : x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée, en tout point $x \neq 0$, vaut $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$, tandis que $f'(0) = 0$. Elle n'est donc pas continue mais présente une *discontinuité de deuxième espèce en 0.

DÉCOMPOSITION

Décomposition en éléments simples ☞ SIMPLE.

Décomposition en facteurs irréductibles Tout polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ se décompose, de manière unique, sous la forme d'un produit $\alpha P_1 \cdots P_k$, où $P_1, \dots, P_k$ sont des polynômes unitaires, irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$, et α un scalaire.

Décomposition en facteurs premiers Tout entier naturel $n \in \mathbb{Z}$ non nul se décompose de manière unique sous la forme $n = \varepsilon \cdot p_1^{m_1} \cdots p_q^{m_q}$, où q est un entier naturel, $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, $p_1, \dots, p_q$ des entiers premiers distincts et $m_1, \dots, m_q$ des entiers naturels non nuls.

Décomposition matricielle Synonyme de factorisation. Certaines décompositions de matrices sont devenues des exercices d'orax ou des morceaux de problèmes très classiques. Ci-après, voir les décompositions de Cholesky, d'Iwasawa, LU, PJ_rQ , et polaire.

Décomposition de Cholesky Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Alors il existe une unique matrice T triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = {}^tT \cdot T$. ♦ Cette décomposition est un cas particulier de la décomposition LU pour une matrice symétrique définie positive.

Décomposition LU Toute matrice inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ peut se factoriser sous la forme $A = PLU$, où P est une matrice de permutation, L est une matrice triangulaire inférieure n'ayant que des 1 sur la diagonale et U une matrice triangulaire supérieure. (U = « Upper » tandis que L = « Lower ».) ♦ Dans la majorité des cas (en fait : si tous les mineurs principaux de A , c'est-à-dire les déterminants obtenus en retirant les k premières lignes et colonnes de A , sont non nuls ; ce qui revient à dire que l'on pourra,

sans permuter de lignes et de colonnes, trouver tous les pivots sur la diagonale), on peut prendre $P = I_n$, et la décomposition est alors $A = LU$.

REMARQUES : Cette décomposition se fait en utilisant la méthode d'élimination de Gauss-Jordan. On transforme, par étapes, la matrice A en une matrice triangulaire supérieure U en éliminant les termes sous la diagonale par manipulation de lignes, ce qui revient à multiplier A à gauche par une matrice triangulaire inférieure dont l'inverse est très facile à calculer. ♦ L'intérêt de la décomposition LU est qu'elle est simple à mettre en œuvre et permet ensuite très rapidement de résoudre un système linéaire de la forme $AX = B$, puisque résoudre un système triangulaire est particulièrement aisé. De plus, le calcul du déterminant d'une matrice triangulaire étant immédiat, on accède à $\det A = \det L \det U$.

Décomposition PJ_rQ Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ une matrice. Si l'on note $r = \text{rg } M$, il existe deux matrices $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $M = PJ_rQ$, où J_r est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par blocs par

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

♦ Cette décomposition n'est pas unique.

REMARQUES : En d'autres termes, si l'on définit sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par : $A \mathcal{R} B$ si et seulement si il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$, alors la classe d'équivalence de A contient J_r , où r est le rang de A ; cette classe d'équivalence est en fait l'ensemble des matrices de rang r .

Décomposition d'Iwasawa Toute matrice inversible $A \in GL_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique sous la forme $A = QR$, où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure à coefficients strictement positifs.

REMARQUES : Le résultat prouvé par Kenkichi Iwasawa est en fait plus général que celui présenté ici. ♦ Le résultat cité ici se démontre simplement : on orthonormalise, par le procédé de Gram-Schmidt, l'image de la base canonique par la matrice A , et l'on utilise le fait que la matrice de passage entre une base et son orthonormalisée est triangulaire supérieure, ainsi que la matrice inverse. On peut donc interpréter cette décomposition comme la traduction matricielle de l'algorithme de Gram-Schmidt.

Décomposition polaire ou de Cartan Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Alors il existe un unique couple (Ω, S) , où Ω est orthogonale et S symétrique définie positive, tel que $A = \Omega S$.

REMARQUES : Si $A = \Omega S$ selon cette décomposition, alors $\|A - \Omega\| = d(A ; \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ pour la distance induite par la norme $\|M\| = \sqrt{\text{tr}({}^tM M)}$. ♦ Si la matrice A n'est pas inversible, alors il existe une décomposition $A = \Omega S$, où cette fois-ci S n'est que symétrique positive, et cette décomposition n'est plus unique.

Décomposition QR Synonyme de *décomposition d'Iwasawa.

DÉFINI

Propriété relative à la stricte positivité (ou stricte négativité) de certaines quantités.

☞ POSITIF.

DÉGÉNÉRÉ

Conique dégénérée ☞ CONIQUE.

Forme bilinéaire dégénérée Forme bilinéaire qui n'est pas non dégénérée. ☞ FORME BILINÉAIRE NON DÉGÉNÉRÉE.

Quadrique dégénérée ☞ QUADRIQUE.

DEGRÉ

Degré d'un polynôme à une indéterminée Par définition, si P est le polynôme nul, on pose $\deg P = -\infty$. Dans le cas contraire, si P est de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à support fini, le degré de P est le plus grand indice k tel que $a_k \neq 0$.

REMARQUES : L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ forme un espace vectoriel, noté $\mathbb{K}_n[X]$, de dimension $n+1$, de base canonique $(1, X, \dots, X^n)$. ♦ Certains auteurs définissent le degré du polynôme nul comme égal à -1 .

Exemple : $\deg(1 + 2X - 7X^2 + 6X^5) = 5$.

Degré total d'un polynôme à plusieurs indéterminées Si l'on note génériquement $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ et si P est un polynôme non nul de la forme

$$P = \sum_k a_k X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n},$$

alors le degré total de P est le plus grand entier $k_1 + \dots + k_n$ tel que a_k soit non nul.

Exemple : Le polynôme $2XYZ^3 + 5X^2Y^2Z^2 - X^2Y$ est de degré total 6.

Degré d'une fraction rationnelle Si $F \in \mathbb{K}(X)$ est une fraction rationnelle et (P, Q) un représentant quelconque de F , alors le degré de F est l'élément de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ défini par $\deg F = \deg P - \deg Q$.

Exemple : La fraction rationnelle $\frac{7X^2 - 5X + 1}{2X^5 + X^2 + 7}$ est de degré -3 .

DEMI-DROITE

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine, A un point de $\mathcal{E}$ et u un vecteur non nul. La demi-droite d'origine A et de vecteur directeur u est l'ensemble $\{A + tu ; t \in \mathbb{R}^+\}$.

DEMI-TOUR

Dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3, un demi-tour autour d'une droite Δ est une rotation affine d'axe Δ et d'angle π . C'est donc une symétrie orthogonale par rapport à Δ .

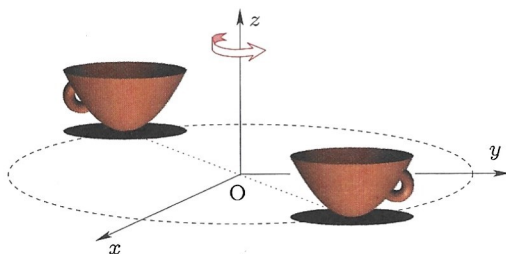


Fig. 29 — Effet d'un demi-tour d'axe Oz sur une tasse à café, composée d'un morceau de paraboléide de révolution, d'un disque et d'un tore.

DÉNOMBRABLE

Un ensemble A est dit dénombrable s'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$. En d'autres termes, on a pu *numéroter* tous les éléments de A par des entiers, c'est-à-dire écrire $A = \{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$, en notant (plus commodément) $a_n = \varphi(n)$. ♦ Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. ♦ Parfois, on emploie *dénombrable* pour indiquer *fini* ou *dénombrable*.

REMARQUE : Si A est un ensemble et D un ensemble dénombrable, et s'il existe une injection $\varphi : A \rightarrow D$, alors A est dénombrable. ♦ De même, s'il existe une surjection $\psi : D \rightarrow A$ et si D est dénombrable, alors A est dénombrable.

Exemples : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}^p, \dots$ sont dénombrables. ♦ En revanche, $[0; 1], \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \dots$ ne le sont pas. ♦ L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, celui des nombres transcendants ne l'est pas.

☞ CARDINAL, ÉQUIPOTENTS.

DENSITÉ

Partie dense d'un espace vectoriel normé Une partie D d'un espace vectoriel normé E est dite dense si tout point de E lui est adhérent, c'est-à-dire si $\overline{D} = E$. ♦ En d'autres termes, pour tout $x \in E$, il existe une suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D qui converge vers x . (☞ SÉQUENTIEL.)

Exemples : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. ♦ $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ♦ L'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. ♦ L'espace des fonctions polynomiales est dense dans l'espace des fonctions continues sur un segment, à valeurs dans $\mathbb{C}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (☞ WEIERSTRASS.).

Raisonnement par densité Si f est une application continue sur un espace vectoriel normé E et si elle est nulle sur une partie D dense de E , alors elle est nulle sur E tout entier.

Exemple : Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notons χ_M son polynôme caractéristique. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, pour toute matrice A inversible,

$$\chi_{AB}(X) = \det(AB - XI_n) = \det(A \cdot (B - XA^{-1})) = \det((B - XA^{-1}) \cdot A) = \chi_{BA}(X).$$

L'application $\varphi : A \mapsto \chi_{AB} - \chi_{BA}$ étant continue et $GL_n(\mathbb{C})$ étant dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la formule est vraie pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

☞ LEMME DE RIEMANN-LEBESGUE.

Densité de probabilité Fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, positive, continue sauf peut-être en un nombre fini de points, intégrable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. ♦ Soit X une variable aléatoire admettant une fonction de répartition F_X continue sur $\mathbb{R}$. S'il existe une densité de probabilité f telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

alors f est appelée densité de probabilité de la variable X . ♦ Le point de vue réciproque est le suivant : si F continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini $x_1, \dots, x_n$ de points, si sa dérivée $f = F'$ est continue sauf peut-être en $x_1, \dots, x_n$, alors f est appelée densité de X . Elle peut être arbitrairement prolongée sur $\mathbb{R}$, par exemple en posant $f(x_1) = \dots = f(x_n) = 0$.

REMARQUE : Si une variable aléatoire X admet une densité de probabilité f , alors pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, on a

$$P[X \in I] = \int_I f(t) dt.$$

Densité conjointe On dit que le couple de variables aléatoires (X, Y) admet une densité s'il existe une fonction $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on ait

$$F(x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} P[X \leq x \text{ et } Y \leq y] = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \mu(s, t) dt ds.$$

On dit alors que μ est la densité (conjointe) du couple (X, Y) . ♦ On admet que cette densité est, *essentiellement*, unique (on peut la modifier sur une partie négligeable de $\mathbb{R}^2$) et est donnée par

$$\mu(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y).$$

REMARQUE : Si D est une partie mesurable du plan et si (X, Y) admet une densité μ , alors

$$P[(X, Y) \in D] = \iint_D \mu(x, y) dx dy.$$

Densité marginale Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant une densité $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$. La densité marginale de X est la densité f_X de la seule variable aléatoire X ; elle est définie pour presque tout x et reliée à la densité conjointe par

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x, t) dt$$

Variable à densité Variable admettant une densité de probabilité. $\Leftrightarrow$ VARIABLE.

DÉPLACEMENT

Isométrie positive de l'espace affine $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire isométrie dont l'application linéaire associée est une rotation.

$\Leftrightarrow$ DEMI-TOUR, ROTATION.

DÉRANGEMENT

Si E est un ensemble fini, un dérangement de E est une permutation de E sans point fixe, c'est-à-dire une permutation σ telle que $\sigma(x) \neq x$ pour tout $x \in E$.

REMARQUE : Si l'on note $d_0 = 1$ et d_n le cardinal de l'ensemble des dérangements de $[1; n]$, alors $d_{n+1} = n[d_n + d_{n-1}]$ pour tout $n \geq 1$. On a de plus

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k \quad d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \quad \text{et} \quad d_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n!}{e}.$$

DÉRIVABLE

Dérivabilité en un point Soit $f : I \rightarrow F$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé F . On dit que f est dérivable en un point $a \in I$ si la fonction θ définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\theta(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie en a . Cette limite est appelée *vecteur dérivé de f en a* , et noté $f'(a)$. $\blacklozenge$ Si $F = \mathbb{R}$, on parle plutôt de *nombre dérivé en a* . $\blacklozenge$ Par construction, f est dérivable en a si et seulement si

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o_{h \rightarrow 0}(h).$$

$\Leftrightarrow$ DIFFÉRENTIABLE, TAYLOR.

Dérivabilité sur l'ensemble de définition On dit que $f : I \rightarrow F$ est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I .

Dérivabilité sur une partie Soit A une partie de I . On dit que f est dérivable sur A si la restriction $f|_A$ de f à A est dérivable en tout point de A .

Exemple : La fonction $f : x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$ dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, mais pas en 0. En revanche, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, puisque sa restriction à $\mathbb{R}^+$ est la fonction $\text{Id}_{\mathbb{R}^+}$, qui est dérivable en tout point (même en 0).

DÉRIVÉ

Polynôme dérivé Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, son polynôme dérivé est, par définition,

$$P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k.$$

REMARQUE : Bien évidemment, lorsque l'on travaille dans le corps des réels, une fonction polynomiale P est dérivable et admet pour dérivée la fonction polynomiale P' .

$\Leftrightarrow$ MULTIPLICITÉ.

DÉRIVÉE

Dérivée en un point Soit $f : I \rightarrow F$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé F . On suppose que f est dérivable en un point $a \in I$; alors sa dérivée en a est

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Dérivée à gauche/à droite Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I tel que $I \cap]a; +\infty[\neq \emptyset$. Une fonction f définie sur I et à valeurs dans un espace vectoriel normé F est dérivable à droite en a si la fonction θ_d définie sur $I \cap]a; +\infty[$ par

$$\theta_d(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie à droite en a . Cette limite est appelée *nombre (ou vecteur) dérivé à droite de f en a* et noté $f'_d(a)$. $\blacklozenge$ On définit de même la dérivée à gauche grâce à la fonction θ_g définie sur $I \cap]-\infty; a[$.

REMARQUE : Si a est un point intérieur à I , une fonction $f : I \rightarrow F$ est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche en a , elle est dérivable à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Fonction dérivée Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . L'application f' qui à a associe $f'(a)$ est la dérivée de f .

Dérivée logarithmique Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs non nulles et dérivable. La dérivée de $\ln|f|$, appelée dérivée logarithmique de f , est f'/f .

REMARQUES : Si l'on note $D\ell$ l'application dérivée logarithmique, on a les règles de calcul suivantes : $D\ell(fg) = D\ell(f) + D\ell(g)$ et $D\ell(f/g) = D\ell(f) - D\ell(g)$. $\blacklozenge$ De même, pour tout α réel, on a $D\ell(|f|^\alpha) = \alpha D\ell(f)$. $\blacklozenge$ La dérivée logarithmique est utile pour calculer, au premier ordre, des erreurs relatives.

Dérivée partielle Soit $f : \Omega \rightarrow F$ une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé F . Soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$ et soit $i \in [1; n]$. La dérivée partielle de f par rapport à la variable x_i est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}.$$

$\blacklozenge$ On la note également $D_i f(\mathbf{a})$, ou $\partial_i f(\mathbf{a})$. $\blacklozenge$ Elle est égale à la dérivée selon le i -ième vecteur $\mathbf{e}_i$ de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

REMARQUE : Lorsque l'espace de départ est $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, il est d'usage de noter x, y et z les coordonnées et de noter

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

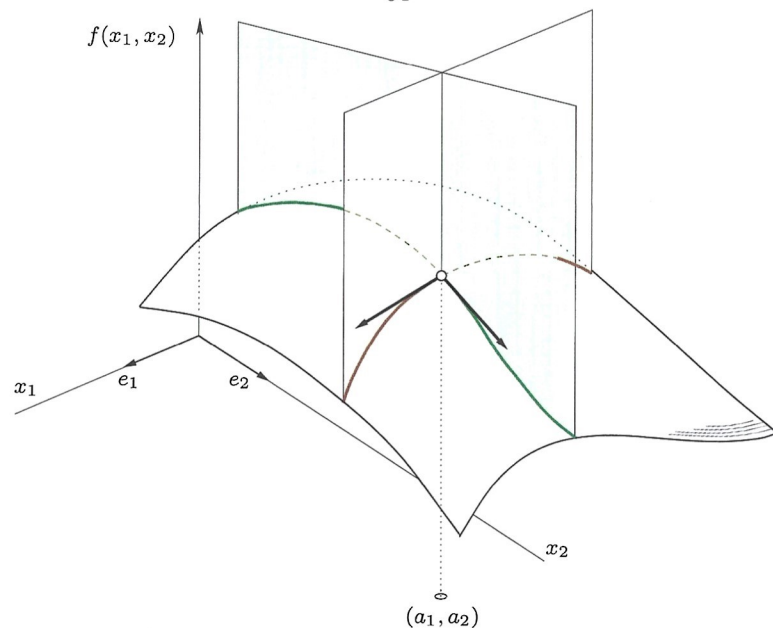


Fig. 30 — Dérivées partielles d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en un point (a_1, a_2) . On fait apparaître les fonctions auxiliaires $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$ (en brun) et $x_2 \mapsto f(a_1, x_2)$ (en vert). Les dérivées de ces fonctions sont, par définition, les dérivées $\partial f / \partial x_1$ et $\partial f / \partial x_2$ au point (a_1, a_2) .

Dérivée selon un vecteur Soit $f : E \rightarrow F$ une application définie sur un ouvert U d'un espace vectoriel normé E et à valeurs dans un espace vectoriel normé F . Soient $a \in U$ et $v \in E$. On dit que f est dérivable en a selon v si l'application $\varphi_v : t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0, c'est-à-dire si la limite

$$D_v f(a) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_v(t) - \varphi_v(0)}{t} = \varphi'_v(0)$$

existe. On l'appelle alors dérivée de f en a selon v . ♦ Si f est différentiable en a , alors f admet une dérivée en a selon tout vecteur v ; on a dans ce cas, pour tout vecteur v de E , la relation $D_v f(a) = df(a)(v)$.

☞ DIFFÉRENTIELLE.

Dérivée d'un prolongement Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $]a; b[$. On suppose que f' admet une limite finie en a ; alors f admet également une limite finie ℓ en a et le prolongement $\hat{f}$ de f sur $[a; b]$ est dérivable; de plus, $\hat{f}'(a) = \ell$. ♦ Notamment, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a; b[$, alors $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$.

Dérivée de la bijection réciproque Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection strictement monotone. On suppose que f est dérivable sur I et que la dérivée de f ne s'annule en aucun point de I . Alors la bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est dérivable sur J et

$$\forall x \in J \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

c'est-à-dire que $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

REMARQUE : Dans le langage des physiciens, si l'on note par exemple $t = f(x)$ et $x = f^{-1}(t)$, cette dernière relation s'écrit sympathiquement

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{dt/dx},$$

les points en lesquels les fonctions sont évaluées étant sous-entendus.

☞ DIFFÉOMORPHISME, TAYLOR.

Dérivation sous le signe somme ☞ LEIBNIZ.

DÉTERMINANT

Déterminant de n vecteurs relativement à une base Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . L'unique forme n -linéaire alternée φ vérifiant $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$ est appelée déterminant dans la base $\mathcal{B}$ et notée $\det_{\mathcal{B}}$.

REMARQUES : Une famille de n vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est non nul. ♦ Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases, alors $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \cdot \det_{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_n)$.

☞ PRODUIT MIXTE.

Déterminant dans une base orthonormée directe Soit E un espace vectoriel euclidien orienté. La forme déterminant dans une base $\mathcal{B}$ orthonormée directe est indépendante du choix de la base (si $\mathcal{C}$ est également orthonormée directe, $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{C}}$). On note Det (avec une majuscule) la forme déterminant dans une base orthonormée directe.

☞ COURBURE, ORIENTATION.

Déterminant d'une matrice Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n . Son déterminant est

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k, \sigma(k)},$$

où $\mathfrak{S}_n$ est le groupe symétrique d'indice n et $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ .

♦ C'est également le déterminant, relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, des n colonnes de la matrice A .

REMARQUE : De la formule $\det(AB) = \det(A) \det(B)$, on déduit que $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$ pour toute matrice P inversible; le déterminant est donc un *invariant de similitude*.

☞ COFACTEUR, COMATRICE, MINEUR, INVARIANT DE SIMILITUDE.

Déterminant d'un endomorphisme Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n . Le déterminant de u , noté $\det u$, est le déterminant de la matrice de u relativement à n'importe quelle base de E . ♦ Pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on a $\det u = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$.

DÉVELOPPABLE

Fonction développable en série entière Soit $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$. On dit que f est développable en série entière centrée en 0 s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un réel $r > 0$ tel que $] -r; r[\subset A$ vérifiant, pour tout $x \in] -r; r[$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Dans ce cas, la formule de Mac Laurin stipule que les coefficients a_n sont reliés aux dérivées successives de f en 0 : pour tout $x \in] -r; r[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

REMARQUE : On généralise cette notion à une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et à un développement centré en un point z_0 de $\mathbb{C}$: une fonction f est développable en série entière centrée en z_0 s'il existe $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\forall z \in \mathcal{B}(z_0; r) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Fonction développable en série de Fourier Fonction égale en tout point à sa série de *Fourier.

☞ DIRICHLET.

DÉVELOPPEMENT

Développement d'un déterminant par rapport à une rangée Soit $M = (m_{ij})_{ij}$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\text{com } M = (M_{ij})_{ij}$ sa comatrice. Alors, pour tout $j \in [1; n]$, le déterminant de M se développe par rapport à la j -ième colonne :

$$\det M = \sum_{i=1}^n m_{ij} M_{ij}.$$

De même, pour tout $i \in [1; n]$, on a le développement par rapport à la i -ième ligne

$$\det M = \sum_{j=1}^n m_{ij} M_{ij}.$$

☞ COFACTEUR, COMATRICE, MINEUR.

Développement d'un réel en base décimale Tout réel positif peut s'écrire sous la forme

$$x = [x] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x et où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'entier a_n appartient à $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Si l'on impose de plus que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne soit pas stationnaire en 9, alors cette écriture est unique et s'appelle le *développement décimal propre* de x . Les coefficients a_n sont alors égaux à

$$a_n = \frac{[10^n x] - 10 [10^{n-1} x]}{10^n}.$$

Exemple : Prenons $x = \pi \approx 3,14159\dots$. Alors

$$[x] = 3 \quad a_1 = \frac{31 - 10 \cdot 3}{10} = 1 \quad a_2 = \frac{314 - 10 \cdot 31}{100} = 4 \quad \text{etc.}$$

REMARQUE : Un réel x est un rationnel si et seulement si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est ultimement périodique, c'est-à-dire s'il existe deux entiers N et T tels que, pour tout $n \geq N$, on ait $a_n = a_{n+T}$.

Développement en série entière Soit f une fonction développable en série entière. Son développement en série entière est l'écriture de f sous la forme de sa série de Mac Laurin :

$$\forall x \in]-r; +r[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

♦ Une telle écriture se généralise en centrant la série en un point z_0 et/ou en l'étendant à un ouvert du plan complexe :

$$\forall z \in \mathcal{B}(z_0; r) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Développement en série de Fourier Soit f une fonction 2π -périodique. Le développement en série de Fourier de f est l'écriture

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}),$$

où les c_n sont les coefficients de Fourier de f ; cette écriture est valable sous certaines conditions de régularité de f , données notamment par le théorème de *Dirichlet. ♦ Le développement en série de Fourier trigonométrique est l'écriture

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

avec les mêmes restrictions de validité. ♦ Parfois, ce développement désigne simplement la série de Fourier, ou sa somme, que la fonction soit ou non égale à cette somme.

☞ DIRICHLET.

DIAGONAL

Diagonale (principale) d'une matrice carrée d'ordre n Si $M = (a_{ij})_{ij}$ est une matrice carrée, sa diagonale principale est le n -uplet $(a_{11}, \dots, a_{nn})$ des coefficients dont l'indice de ligne est égal à l'indice de colonne.

Matrice diagonale Matrice carrée $M = (a_{ij})_{ij}$ dont les coefficients hors de la diagonale principale sont nuls : si $i \neq j$, alors $a_{ij} = 0$. On note parfois

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

DIAGONALISABLE

Matrice diagonalisable Une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable s'il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $P^{-1}MP = D$. ♦ Les *valeurs propres de M sont alors $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. De plus, les colonnes $C_1, \dots, C_n$ de la matrice P sont des vecteurs propres pour M .

Endomorphisme diagonalisable Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour $i = 1, \dots, n$, ce qui revient à dire que sa matrice représentative dans $\mathcal{B}$ est diagonale :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

- ♦ Les valeurs propres de M sont alors $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, et $\mathcal{B}$ est appelée *base propre* pour u .
- ♦ Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si sa matrice représentative (dans une base quelconque) est diagonalisable.

☞ SEMBLABLE, VALEUR PROPRE, VECTEUR PROPRE, BASE PROPRE, POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE, POLYNÔME MINIMAL.

DIAGONALISATION

Diagonaliser un endomorphisme, c'est trouver une base propre pour cet endomorphisme, c'est-à-dire une base dans laquelle la matrice de l'endomorphisme est diagonale. ♦ Diagonaliser une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est trouver une matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

Diagonalisation simultanée Une famille $u_1, \dots, u_p$ d'endomorphismes de E est dite simultanément diagonalisable s'il existe une base dans laquelle les matrices de tous les endomorphismes sont diagonales (*base de diagonalisation simultanée*). ♦ Une famille d'endomorphismes est simultanément diagonalisable si et seulement si :

- chaque endomorphisme est diagonalisable ;
- ils commutent deux à deux.

REMARQUE : La diagonalisation simultanée a une grande importance théorique en mécanique quantique : elle correspond à l'observation simultanée de deux grandeurs compatibles, comme la vitesse et l'énergie. Deux endomorphismes qui ne commutent pas correspondent à deux quantités qui ne sont pas simultanément observables (position et vitesse, par exemple).

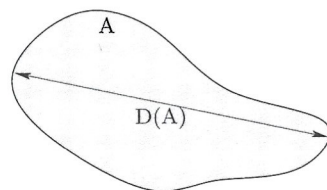
☞ BASE PROPRE, POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE, POLYNÔME MINIMAL, SEMBLABLE, VALEUR PROPRE, VECTEUR PROPRE.

DIAMÈTRE

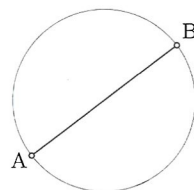
Diamètre d'une partie A bornée d'un espace vectoriel normé E Nombre défini par

$$D(A) = \sup_{x, y \in A} \|x - y\|.$$

Exemple : Si A est une boule de rayon r d'un espace vectoriel normé réel, son diamètre est égal à $2r$.



Diamètre d'un cercle Corde maximale d'un cercle ; segment $[A; B]$ dont les extrémités sont sur le cercle, et distants de $2r$, où r est le rayon du cercle. ♦ Cette définition est compatible avec la définition générale du diamètre d'une partie d'un espace vectoriel normé, lorsque le plan est muni de sa structure euclidienne et de la norme associée.



Exemple : Soient A et B deux points du plan affine euclidien. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[A; B]$. ☞ LIGNES DE NIVEAU.

DIFFÉOMORPHISME

Difféomorphisme entre deux intervalles Soient I, J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow J$. On dit que f est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de I dans J si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

- f est une bijection de I dans J ;
- f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;
- f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J .

♦ Un $\mathcal{C}^0$ -difféomorphisme est appelé *homéomorphisme*.

Difféomorphisme entre deux ouverts Soient U et V deux ouverts de $E = \mathbb{R}^n$. Un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de U sur V est une application $\varphi : U \rightarrow V$ telle que :

- φ est bijective ;
- φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;
- φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V .

REMARQUE : Un difféomorphisme ne peut être établi qu'entre des ouverts d'un même espace vectoriel ou de deux espaces vectoriels de même dimension.

Caractérisation des difféomorphismes Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si $f : I \rightarrow J$ est bijective et de classe $\mathcal{C}^k$, alors f est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme si et seulement si sa dérivée ne s'annule pas sur I . ♦ Si $\varphi : U \rightarrow V$ est une fonction, bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ vers un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$, alors φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme si et seulement si son jacobien ne s'annule pas sur U .

☞ THÉORÈMES D'INVERSION LOCALE ET GLOBALE.

DIFFÉRENTIABLE

Soient Ω un ouvert de $E = \mathbb{R}^p$ et $f : \Omega \rightarrow F = \mathbb{R}^n$ une application. On dit que f est différentiable en un point a de Ω s'il existe une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$f(a+h) - f(a) - u(h) = o(\|h\|)$$

quand $h \rightarrow 0$. L'application u est unique : on l'appelle différentielle de f en a , ou *application linéaire tangente à f en a* , et on la note $df(a)$ ou df_a .

REMARQUES : Une fonction différentiable en a est nécessairement continue en a . ♦ Si f est différentiable en a , alors f admet une dérivée en a selon tout vecteur h ; on a de plus la formule $D_h f(a) = df(a)(h)$. ♦ Notamment, si f est différentiable en a , alors elle admet des dérivées partielles en a . ♦ Cependant, la réciproque est fautive : une fonction peut très bien ne pas être différentiable, et admettre malgré tout des dérivées partielles en tous points. Ainsi, posons et $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = xy^2/(x^2+y^6)$ si $(x,y) \neq (0,0)$. La fonction f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$, y compris en $(0,0)$. Cependant, elle n'est même pas continue en 0, puisque par exemple $f(t^3, t) = 1/2t$ diverge quand t tend vers 0, et n'est donc *a fortiori* par différentiable.

DIFFÉRENTIELLE

Différentielle en un point Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$. On suppose f différentiable en un point a de Ω . La différentielle de f en $a \in \Omega$ est l'unique forme linéaire $df(a) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$f(a+h) = f(a) + df(a).h + o(\|h\|).$$

(On note habituellement $df(a).h$ au lieu de $df(a)(h)$.) ♦ Elle est reliée aux dérivées partielles par la relation

$$df(a) : h \mapsto \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k$$

ou encore, en notant $(dx_1, \dots, dx_n)$ les formes coordonnées (c'est-à-dire la base duale de la base canonique) :

$$df(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) dx_k.$$

REMARQUES : En utilisant le gradient, on peut également écrire $df(a) \cdot h = \nabla f(a) \cdot h$.
 ♦ Parfois, on note df_a la différentielle en a , ce qui permet de noter $df_a(h)$ l'image de h par cette application.

Exemple : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La différentielle en A de l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi : M \mapsto M^2$ est $d\varphi(A) : H \mapsto AH + HA$.

☞ APPLICATION *AFFINE TANGENTE, FORME DIFFÉRENTIELLE, GRADIENT, TAYLOR.

Différentielle La différentielle de f est l'application df qui à $a \in \Omega$ associe $df(a)$. En utilisant les formes coordonnées, la différentielle de f s'écrit donc

$$df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k.$$

Différentielle d'une composée Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés de dimension finie et U un ouvert de E . Soient $f : U \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications composables de classe $\mathcal{C}^1$, alors $g \circ f$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ et sa différentielle est donnée, en tout point a de U , par

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

REMARQUE : Cela implique notamment que la jacobienne de $g \circ f$ (en un point a) est le produit des jacobienes de g (en $f(a)$) et de f (en a). Sous forme développée, cette relation donne les règles usuelles de dérivation d'une fonction composée.

Équation différentielle ☞ ÉQUATION.

Forme différentielle ☞ FORME.

DIMENSION

Dimension d'un espace vectoriel Soit E un espace vectoriel. S'il admet une base de cardinal n , alors toute base de E est de même cardinal n . On dit alors que E est de dimension finie et que sa dimension est $\dim E = n$. ♦ Si E n'admet aucune base de cardinal fini, on dit que E est de dimension infinie.

Exemple : $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie, mais $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n + 1$.

REMARQUE : Si E est de dimension finie, la dimension de E est égale au cardinal maximal d'une famille libre, et au cardinal minimal d'une famille génératrice.

☞ CODIMENSION, GRASSMANN, RANG.

Espace	Dimension
$\mathbb{K}^n$	n
$\mathbb{K}_n[X]$	$n + 1$
$\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$	pq
$\mathcal{L}(E, F)$	$\dim E \times \dim F$
$U \oplus V$	$\dim U + \dim V$
$U + V$	$\dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$
$E \times F$	$\dim E + \dim F$

TABLE 2 — Quelques formules concernant la dimension des espaces vectoriels. Les espaces U et V sont des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel.

DIOPHANTINNE

Équation diophantienne Équation algébrique à coefficients entiers dont on cherche les solutions entières.

☞ ALGÈBRE, FERMAT.

DIRAC Paul Adrien Maurice (1902–1984)
 (Physicien et mathématicien anglais)

Suite de Dirac Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues par morceaux, positives, intégrables et d'intégrale égale à 1 telles que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $]-\infty; -\varepsilon]$ et sur $[\varepsilon; +\infty[$.

♦ Synonyme : suite d'approximations de l'unité

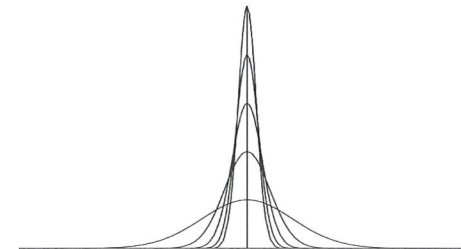
REMARQUES : Si f est une fonction bornée et continue en 0, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi_n(t) dt = f(0).$$

♦ Plus généralement, si f est continue et bornée, alors $f * \varphi_n$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite de terme général $f * \varphi_n$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}$.

♦ La définition d'une suite de Dirac peut être étendue en abandonnant certaines hypothèses (positivité de la fonction) ou en les affaiblissant (on remplace la convergence uniforme par la condition : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f = 1$ pour tout $\varepsilon > 0$). On calcule alors $\int f \varphi_n$ pour des classes plus restreintes de fonctions f : fonctions à support compact par exemple.

Exemple : Notons $\varphi : x \mapsto e^{-\pi x^2}$ et $\varphi_n : x \mapsto n \varphi(nx)$. Alors la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Dirac.



☞ CONVOLUTION, WEIERSTRASS.

DIRECTE

Base directe ☞ ORIENTATION.

Somme directe ☞ SOMME.

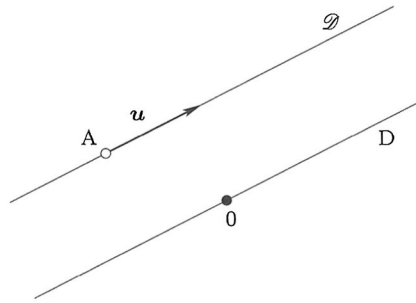
DIRECTION

Direction asymptotique ☞ ASYMPTOTIQUE.

Direction d'une droite Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, de l'espace ou d'un espace vectoriel E quelconque. Cette droite est entièrement caractérisée par la donnée de deux de ses points, A et B , distincts, ou bien d'un point A et d'un vecteur u non nul. La direction de $\mathcal{D}$ est alors la droite vectorielle

$$D = \text{Vect}(\overline{AB}) \quad \text{ou} \quad D = \text{Vect}(u).$$

On dit également que $\mathcal{D}$ est une droite affine de direction D .



Direction d'un sous-espace affine Soit $\mathcal{A}$ un sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ sur un espace vectoriel E . La direction de $\mathcal{A}$ est le sous-espace $A \subset E$ auquel $\mathcal{A}$ est attaché. ♦ Si $a \in \mathcal{A}$, alors $\mathcal{A} = a + A$.

DIRECTRICE

ELLIPSE, HYPERBOLE, SURFACE DE *RÉVOLUTION.

DIRICHLET *Peter Gustav Lejeune-* (1805-1859)
(Mathématicien allemand)

Fonction de Dirichlet Nom donné à deux fonctions distinctes. La fonction χ de Dirichlet est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\chi(x) = 1$ si x est rationnel, et $\chi(x) = 0$ sinon. C'est donc l'indicatrice de l'ensemble $\mathbb{Q}$; elle n'est continue en aucun point. ♦ La fonction η de Dirichlet, également appelée *fonction de Riemann alternée*, est définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par

$$\forall s > 0 \quad \eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}.$$

ZETA.

Noyau de Dirichlet Pour tout entier n et tout u réel, notons

$$D_n(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{-iku} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})u]}{\sin(u/2)}$$

(voir figure 31). Si f est une fonction continue par morceaux et 2π -périodique, sa n -ième somme partielle de *Fourier est alors donnée par convolution de f avec D_n :

$$S_n f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u) D_n(x - u) du.$$

Théorème de Dirichlet Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π -périodique. La série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme la fonction *régularisée* de f définie par

$$\tilde{f}(t) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-)),$$

où l'on a noté

$$f(t^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(t + h) \quad \text{et} \quad f(t^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(t - h).$$

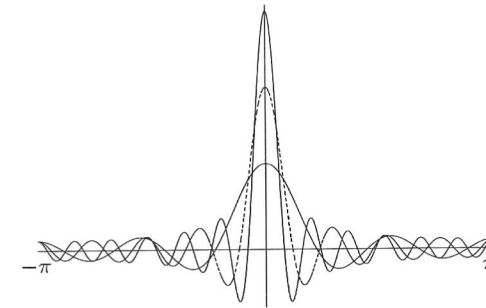


Fig. 31 — Les noyaux de Dirichlet d'indice 4, 8 et 12.

♦ En d'autres termes, en notant $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier de f , on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-)).$$

♦ En notations trigonométriques :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-)).$$

REMARQUE : Sans la condition de régularité de la dérivée, il n'est généralement pas possible de conclure à la convergence de la série de Fourier. On sait d'ailleurs qu'il existe des fonctions continues et 2π -périodiques dont la série de Fourier peut diverger en un point.

DISCONTINUITÉ

Point de discontinuité d'une fonction Point en lequel la fonction n'est pas continue.

♦ Dans le cas d'une fonction de la variable réelle, la fonction peut admettre en ce point une limite à gauche et une limite à droite. On parle alors de *discontinuité de première espèce*. Elle peut également ne pas admettre de limite à gauche ou à droite (*discontinuité de deuxième espèce*).

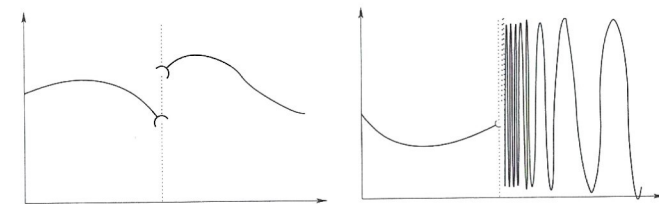


Fig. 32 — Discontinuités de 1^{re} et de 2^e espèce.

Exemples : La fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ admet en 0 une discontinuité de deuxième espèce.

♦ La fonction « signe », qui à x associe 1 si $x > 0$, 0 si $x = 0$ et -1 si $x < 0$, admet en 0 une discontinuité de première espèce.

REMARQUES : Le théorème de Darboux implique que, si f est une fonction dérivable mais non de classe $\mathcal{C}^1$, la dérivée f' ne saurait admettre de discontinuité de première espèce (elle ne vérifierait pas la propriété des valeurs intermédiaires). ♦ Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante de la variable réelle, alors ses discontinuités éventuelles sont toutes de première espèce; l'ensemble de ses points de discontinuité est alors nécessairement dénombrable.

DISCRET

Par opposition à « continu », le mot « discret » est parfois utilisé pour « dénombrable ».

♦ La *discrétisation* est le passage d'un modèle continu à un modèle discret d'un système.

Exemple : Lorsque l'on ne sait pas résoudre une équation différentielle (c'est-à-dire, dans la plupart des cas!), on peut tenter d'en obtenir une solution numérique approchée. Pour cela, on *discrétise* le temps, c'est-à-dire qu'on remplace la variable continue $t \in [a; b]$ par une variable discrète $t_1, \dots, t_n$ à valeurs dans $[a; b]$ — vérifiant par exemple $t_{k+1} - t_k = \mathcal{O}^{\frac{1}{n}}$. On cherche alors une valeur approchée des $f(t_k)$ en écrivant des relations (toujours approchées) entre ces valeurs, basées sur des approximations de type Taylor. (⚡ MÉTHODE D'EULER.) ♦ On peut également calculer une valeur approchée d'intégrale par discrétisation : méthode des trapèzes, de Simpson, etc. (⚡ SIMPSON, TRAPÈZES.)

Partie discrète d'un espace vectoriel normé Partie dont tous les points sont *isolés.

Exemple : $\mathbb{Z}$ est une partie discrète de $\mathbb{R}$.

Variable aléatoire discrète Variable aléatoire X dont l'image $X(\Omega)$ est un ensemble réel fini ou dénombrable.

DISCRIMINANT

Le discriminant d'un polynôme du second degré $P = aX^2 + bX + c$ est $\Delta = b^2 - 4ac$. C'est une quantité qui apparaît naturellement lors de la mise sous forme canonique de $P(X)$:

$$P(X) = a \left(X + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Si δ est une racine carrée (dans $\mathbb{C}$) de Δ , alors

$$P(X) = a(X - \lambda)(X - \mu) \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

DISJOINTS

Deux parties A et B d'un ensemble E sont disjointes si leur intersection est vide : $A \cap B = \emptyset$.

DISQUE

Disque ouvert de convergence Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $r > 0$. Le disque ouvert $\mathcal{B}(0; r)$ est appelé disque ouvert de convergence. ♦ Sur ce disque, la série entière converge absolument; elle converge normalement sur tout compact inclus dans ce disque. Notamment, la somme de la série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le disque ouvert de convergence.

⚡ CERCLE DE CONVERGENCE, RAYON, THÉORÈME RADIAL D'ABEL.

DISTANCE

Distance sur un ensemble E Application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés :

- *Séparation* : $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
- *Symétrie* : $d(x, y) = d(y, x)$;

– *Inégalité triangulaire* : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Exemple : L'application $(x, y) \mapsto |y - x| / (1 + (x - y)^2)$ définit une distance sur $\mathbb{R}$.

⚡ ESPACE *MÉTRIQUE.

Distance sur un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ Application $d : (x, y) \mapsto \|x - y\|$.

Distance entre deux parties d'un espace vectoriel normé Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé; la distance de A à B est

$$d(A; B) = \inf_{(a, b) \in A \times B} \|a - b\|.$$

Distance entre un point x et une partie A d'un espace vectoriel normé Borne inférieure des distances de x à tous les points de A :

$$d(x; A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

REMARQUE : Dans un espace vectoriel normé complet (par exemple, en dimension finie), la distance à un fermé est atteinte.

Distance entre un point et une droite Soit $\mathcal{D}$ une droite affine du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, d'équation $ax + by + c = 0$ dans un repère orthonormé (O, i, j) . Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan. Alors

$$d(M_0; \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

♦ Si $\mathcal{D}$ est définie par un point A et un vecteur directeur u , la distance de M_0 à $\mathcal{D}$ est

$$d(M_0; \mathcal{D}) = \frac{|\text{Det}(\mathbf{AM}_0, u)|}{\|u\|}.$$

Distance entre un point et un plan de l'espace Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, d'équation $ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormé (O, i, j, k) . Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point du plan. Alors

$$d(M_0; \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

♦ Si $\mathcal{P}$ est définie par un point A et un vecteur directeur u , la distance de M_0 à $\mathcal{P}$ est

$$d(M_0; \mathcal{P}) = \frac{\|\mathbf{AM}_0 \wedge u\|}{\|u\|}.$$

DIVERGENCE

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$. Notons $f = (f_x, f_y, f_z)$ ses composantes. Sa divergence est la quantité scalaire

$$\text{div } f = \nabla \cdot f = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}.$$

♦ Elle est égale à la trace de la jacobienne (et donc de la différentielle) de f .

REMARQUES : La divergence d'un champ de classe $\mathcal{C}^1$ est une quantité intrinsèque; elle peut se calculer, *via* un changement de variables, dans toute base orthonormée directe; le résultat du calcul ne dépend pas de la base orthogonale choisie pour le calcul des dérivées partielles. ♦ Une extension du théorème de Poincaré nous assure que, si f est un champ de divergence nulle sur un ouvert étoilé Ω de $\mathbb{R}^3$, alors il dérive d'un potentiel vecteur A ,

c'est-à-dire qu'il existe un champ vectoriel $\mathbf{A}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω tel que $\mathbf{f} = \text{rot } \mathbf{A}$. ♦ Ceci a une application immédiate en électromagnétisme. Une des équations de Maxwell étant $\text{div } \mathbf{B} = 0$, on en déduit que le champ magnétique dérive d'un potentiel vecteur (du moins si l'on travaille dans l'espace $\mathbb{R}^3$).

▮ GRADIENT, LAPLACIEN, NABLA, ROTATIONNEL.

DIVISEUR

Diviseur d'un entier Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que a est un diviseur de b , ou que a *divise* b , ou encore que b est un *multiple* de a , s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $na = b$. On note alors « $a|b$ ».

▮ ASSOCIÉS, DIVISION *EUCLIDIENNE, PGCD.

Diviseur d'un polynôme Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{A}[X]$, où $\mathbb{A}$ est un anneau commutatif. On dit que P est un diviseur de Q , ou que P *divise* Q , ou encore que Q est un *multiple* de P , s'il existe $T \in \mathbb{A}[X]$ tel que $TP = Q$. On note alors « $P|Q$ ».

▮ ASSOCIÉS, DIVISION *EUCLIDIENNE, PGCD.

Diviseur de zéro ▮ ZÉRO.

DIVISION

Division euclidienne ▮ EUCLIDIENNE.

DOMINANTE

Matrice à diagonale dominante sur les lignes Matrice carrée $M = (m_{ij})$ telle que, pour tout $i \in [1; n]$, on ait $|m_{ii}| > \sum_{j \neq i} |m_{ij}|$. Une telle matrice est inversible. ♦ La matrice M est diagonale dominante sur les colonnes si tM est dominante sur les lignes, pour tout $i \in [1; n]$, on a $|m_{ii}| > \sum_{j \neq i} |m_{ji}|$.

Exemple : La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ est dominante sur les lignes.

▮ HADAMARD.

DOMINATION

Domination uniforme Soient A une partie d'un espace vectoriel normé (généralement, A est un intervalle de $\mathbb{R}$) et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On dit que f est uniformément dominée par $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ si

$$\forall x \in A \quad \forall t \in I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

C'est la « version continue » de la notion de domination d'une suite de fonctions, et elle sert à montrer la continuité d'une intégrale à paramètre.

▮ LEIBNIZ.

DOMINÉE

Fonction dominée par une autre Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E , $a \in E$ adhérent à A , f une application définie sur A à valeurs dans F et φ une fonction définie sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est dominée par φ au voisinage de a s'il existe un réel M et un réel $r > 0$ tel que, pour tout x dans $\mathcal{B}(a; r) \cap A$, on ait $\|f(x)\| \leq M|\varphi(x)|$. On écrit

$$f(x) = O_{x \rightarrow a}(\varphi(x)) \quad \text{ou} \quad f = O_a(\varphi).$$

REMARQUE : Si φ ne s'annule pas au voisinage de a , cette propriété est équivalente à : f/φ est bornée au voisinage de a .

Norme dominée par une autre Sur un espace vectoriel E , une norme N est dite dominée par la norme N' s'il existe $\alpha > 0$ tel que $N \leq \alpha N'$, c'est-à-dire si $N(x) \leq \alpha N'(x)$ pour tout $x \in E$. ♦ Si N' domine N , toute suite convergente de (E, N') est une suite convergente de (E, N) .

Exemple : Notons E l'espace des fonctions continues sur $[a; b]$ et à valeurs réelles. Notons $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a; b]} |f(x)|$ et $\|f\|_1 = \int_a^b |f|$. Alors $\|\cdot\|_1 \leq (b-a) \|\cdot\|_\infty$. Notamment, la convergence uniforme dans E entraîne la convergence en moyenne.

▮ NORMES *ÉQUIVALENTES.

Suite dominée par une autre Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé E et soit $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe un réel $A \in \mathbb{R}^+$ et un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|u_n\| \leq A|\alpha_n|$ pour tout $n \geq N$. ♦ On écrit alors, avec les notations de Landau,

$$u_n = O(\alpha_n) \quad \text{ou} \quad u = O(\alpha).$$

REMARQUE : Si la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas, alors $u_n = O(\alpha_n)$ si et seulement si la suite de terme général u_n/α_n est bornée.

▮ HARDY, NÉGLIGEABLE.

Suite de fonctions dominée par une fonction Une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions $I \rightarrow \mathbb{K}$ est dominée par une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ si $|f_n| \leq \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

▮ THÉORÈME DE *CONVERGENCE DOMINÉE.

Théorème de convergence dominée Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I . Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que $|f_n| \leq \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on dit que φ *domine* la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$) alors f est intégrable sur I et l'on peut permuter limite et intégrale :

$$\int_I f = \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n.$$

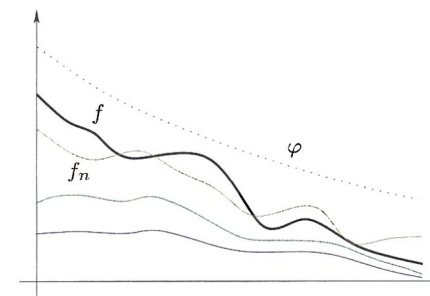


Fig. 33 — Théorème de convergence dominée. La fonction φ , intégrable, domine la suite de fonctions de terme général f_n , ainsi que sa limite f .

DOUBLE**Racine double** Racine d'ordre 2.**Intégrale double** ⇔ CHANGEMENT DE VARIABLE, FUBINI, INTÉGRALE, JACOBIEN.**Théorème de la double limite** ⇔ LIMITE.**DROITE****Droite d'Euler** ⇔ TRIANGLE.**Droite de régression linéaire** ⇔ RÉGRESSION.**Droite vectorielle** Espace ou sous-espace vectoriel de dimension 1.**DUAL****Dual d'un espace vectoriel E** Espace vectoriel E^* des formes linéaires sur E.REMARQUE : Si E est de dimension finie, E^* est de même dimension que E, et ces deux espaces sont donc isomorphes.**Base duale** ⇔ BASE.**DUHAMEL** Jean-Marie Constant (1797-1872)
(Mathématicien et physicien français)**Règle de Raabe-Duhamel** Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs. On suppose que u_{n+1}/u_n admet le développement limité

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si $\beta > 1$, alors la série $\sum u_n$ converge. Si $\beta < 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge. ♦ Cette règle permet donc d'affiner celle de d'Alembert.Exemple : La série $\sum \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$ diverge car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.REMARQUE : Si $\beta = 1$, on ne peut en général pas conclure. Si toutefois l'on peut affiner le développement sous la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + v_n,$$

où la série $\sum v_n$ converge absolument, alors la série $\sum u_n$ diverge.**DUNFORD** Nelson (1906-1986)
(Mathématicien américain)**Décomposition de Dunford** Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie, et u un endomorphisme de E. Alors, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tel que : $u = d + n$, d est diagonalisable, n est nilpotent et $dn = nd$. ♦ Cette décomposition est également appelée *décomposition $d+n$* ou *décomposition de Jordan-Chevalley*.REMARQUE : Les endomorphismes d et n peuvent s'exprimer comme des polynômes en u . ♦ Ce théorème s'étend à un espace vectoriel réel, pour peu que le polynôme minimal de u soit scindé. ♦ La partie diagonalisable de u s'exprime simplement en décomposant l'espace ambiant E comme la somme directe des sous-espaces vectoriels caractéristiques de u : la restriction de d à chaque sous-espace $F_\lambda(u)$ est l'homothétie de rapport λ . En d'autres termes, si l'on note p_λ le projecteur sur le sous-espace caractéristique $F_\lambda(u)$ parallèlement aux autres sous-espaces, alors $d = \sum_\lambda \lambda p_\lambda$.**E****E**

La lettre « e » désigne un nombre que l'on peut définir (de façon équivalente) comme :

- la base de la fonction logarithme népérien : c'est donc l'unique réel dont le logarithme vaut 1 ;
- la valeur de la fonction exponentielle en 1, c'est-à-dire la somme

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

⇔ EXPONENTIELLE, LOGARITHME.

ÉCART-TYPESoit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 ; son écart-type est la racine carrée de sa variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. ♦ L'écart-type mesure la dispersion des valeurs prises par X autour de la valeur moyenne. Il s'exprime dans les mêmes unités que X (si X a la dimension d'une longueur, alors $\sigma(X)$ a la dimension d'une longueur).REMARQUE : Si X admet un écart-type nul, alors X est presque sûrement égale à sa valeur moyenne $m = E(X)$.

⇔ CORRÉLATION, RÉDUITE.

ÉCHANTILLONUne suite $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi qu'une variable aléatoire X s'appelle un n -échantillon de X.

⇔ ESTIMATEUR.

ÉGALITÉ

⇔ ACCROISSEMENTS FINIS, LAGRANGE, MOYENNE, PARSEVAL, PARALLÉLOGRAMME.

ÉLÉMENTAIRE**Fonctions symétriques élémentaires** ⇔ SYMÉTRIQUE.**Opérations élémentaires** Considérons une matrice $M \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ et un vecteur colonne $B \in \mathcal{M}_{p,1}(K)$ ou, de manière équivalente, un système linéaire à p lignes et q inconnues, représenté matriciellement par l'équation $MX = B$. Notons symboliquement L_i la i -ième ligne du système (avec son second membre). Alors, les opérations suivantes transforment le système $\mathcal{S}$ en un système $\mathcal{S}'$ équivalent : elles ne changent donc ni le rang du système, ni l'ensemble de ses solutions.

- *transvections élémentaires* $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $j \neq i$;
- *dilatation élémentaire* $L_i \leftarrow \lambda L_i$, $\lambda \neq 0$;
- *transposition* $L_i \leftrightarrow L_j$.

Du point de vue matriciel, ces opérations reviennent à multiplier à gauche la matrice A par une matrice élémentaire :

- *matrice de transvection* $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$;
- *matrice de dilatation* $D_i(\lambda) = \text{diag}(1, \dots, \lambda, \dots, 1)$;