

DOUBLE

Racine double Racine d'ordre 2.

Intégrale double ⇨ CHANGEMENT DE VARIABLE, FUBINI, INTÉGRALE, JACOBIEN.

Théorème de la double limite ⇨ LIMITE.

DROITE

Droite d'Euler ⇨ TRIANGLE.

Droite de régression linéaire ⇨ RÉGRESSION.

Droite vectorielle Espace ou sous-espace vectoriel de dimension 1.

DUAL

Dual d'un espace vectoriel E Espace vectoriel E^* des formes linéaires sur E.

REMARQUE : Si E est de dimension finie, E^* est de même dimension que E, et ces deux espaces sont donc isomorphes.

Base duale ⇨ BASE.

DUHAMEL Jean-Marie Constant (1797-1872)
(Mathématicien et physicien français)

Règle de Raabe-Duhamel Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs. On suppose que u_{n+1}/u_n admet le développement limité

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si $\beta > 1$, alors la série $\sum u_n$ converge. Si $\beta < 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge. ♦ Cette règle permet donc d'affiner celle de d'Alembert.

Exemple : La série $\sum \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$ diverge car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

REMARQUE : Si $\beta = 1$, on ne peut en général pas conclure. Si toutefois l'on peut affiner le développement sous la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + v_n,$$

où la série $\sum v_n$ converge absolument, alors la série $\sum u_n$ diverge.

DUNFORD Nelson (1906-1986)
(Mathématicien américain)

Décomposition de Dunford Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie, et u un endomorphisme de E. Alors, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tel que : $u = d + n$, d est diagonalisable, n est nilpotent et $dn = nd$. ♦ Cette décomposition est également appelée *décomposition $d+n$* ou *décomposition de Jordan-Chevalley*.

REMARQUE : Les endomorphismes d et n peuvent s'exprimer comme des polynômes en u . ♦ Ce théorème s'étend à un espace vectoriel réel, pour peu que le polynôme minimal de u soit scindé. ♦ La partie diagonalisable de u s'exprime simplement en décomposant l'espace ambiant E comme la somme directe des sous-espaces vectoriels caractéristiques de u : la restriction de d à chaque sous-espace $F_\lambda(u)$ est l'homothétie de rapport λ . En d'autres termes, si l'on note p_λ le projecteur sur le sous-espace caractéristique $F_\lambda(u)$ parallèlement aux autres sous-espaces, alors $d = \sum_\lambda \lambda p_\lambda$.

E

E

La lettre « e » désigne un nombre que l'on peut définir (de façon équivalente) comme :

- la base de la fonction logarithme népérien : c'est donc l'unique réel dont le logarithme vaut 1 ;
- la valeur de la fonction exponentielle en 1, c'est-à-dire la somme

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

⇨ EXPONENTIELLE, LOGARITHME.

ÉCART-TYPE

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 ; son écart-type est la racine carrée de sa variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. ♦ L'écart-type mesure la dispersion des valeurs prises par X autour de la valeur moyenne. Il s'exprime dans les mêmes unités que X (si X a la dimension d'une longueur, alors $\sigma(X)$ a la dimension d'une longueur).

REMARQUE : Si X admet un écart-type nul, alors X est presque sûrement égale à sa valeur moyenne $m = E(X)$.

⇨ CORRÉLATION, RÉDUITE.

ÉCHANTILLON

Une suite $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi qu'une variable aléatoire X s'appelle un n -échantillon de X.

⇨ ESTIMATEUR.

ÉGALITÉ

⇨ ACCROISSEMENTS FINIS, LAGRANGE, MOYENNE, PARSEVAL, PARALLÉLOGRAMME.

ÉLÉMENTAIRE

Fonctions symétriques élémentaires ⇨ SYMÉTRIQUE.

Opérations élémentaires Considérons une matrice $M \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ et un vecteur colonne $B \in \mathcal{M}_{p,1}(K)$ ou, de manière équivalente, un système linéaire à p lignes et q inconnues, représenté matriciellement par l'équation $MX = B$. Notons symboliquement L_i la i -ième ligne du système (avec son second membre). Alors, les opérations suivantes transforment le système $\mathcal{S}$ en un système $\mathcal{S}'$ équivalent : elles ne changent donc ni le rang du système, ni l'ensemble de ses solutions.

- *transvections élémentaires* $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $j \neq i$;
- *dilatation élémentaire* $L_i \leftarrow \lambda L_i$, $\lambda \neq 0$;
- *transposition* $L_i \leftrightarrow L_j$.

Du point de vue matriciel, ces opérations reviennent à multiplier à gauche la matrice A par une matrice élémentaire :

- *matrice de transvection* $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$;
- *matrice de dilatation* $D_i(\lambda) = \text{diag}(1, \dots, \lambda, \dots, 1)$;

– matrice de transposition $S_{ij} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow i\text{-ième ligne} \\ \leftarrow j\text{-ième ligne} \end{array}$$

REMARQUE : La matrice représentative de chaque opération est obtenue en effectuant cette opération à la matrice identité.

♦ Chacune de ces opérations est inversible et

$$T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda) \quad D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1}) \quad S_{ij}^{-1} = S_{ij}.$$

♦ Les opérations élémentaires du même type sur les colonnes sont obtenues par transposition : elles reviennent à multiplier à droite la matrice M par respectivement

$$T_{ji}(\lambda), \quad D_i(\lambda) \quad \text{et} \quad S_{ij}.$$

REMARQUE : Les opérations sur les colonnes ne changent pas le rang, ni l'image, mais changent en revanche l'ensemble des solutions (les nouvelles inconnues du système correspondant sont des combinaisons linéaires des anciennes inconnues. Elles sont donc utilisables pour déterminer le rang et l'image d'une application linéaire, mais pas son noyau.

☞ PIVOT, RANG, TRANSVECTION.

ELLIPSE

Conique à centre dont l'équation, dans un repère orthonormé porté par chacun de ses axes (qui sont orthogonaux), est de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si $0 < b \leq a$, la longueur a est appelée *demi grand axe* tandis que b est le *demi petit axe*. ♦ Une ellipse admet deux foyers F et F', d'abscisses $-c$ et $+c$, où $b^2 + c^2 = a^2$. L'ellipse est alors le lieu des points M du plan vérifiant $MF + MF' = 2a$ (définition *bifocale*).

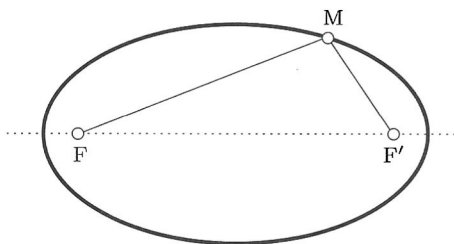


Fig. 34 — Définition bifocale de l'ellipse.

♦ C'est également le lieu des points dont le rapport $e = MF/MH$ est constant, où MH est la distance de M à une droite $\mathcal{D}$ fixée, appelée *directrice* de l'ellipse, et où $0 \leq e < 1$ est l'*excentricité*. Celle-ci vérifie

$$e = \frac{c}{a} \quad b = a\sqrt{1 - e^2}.$$

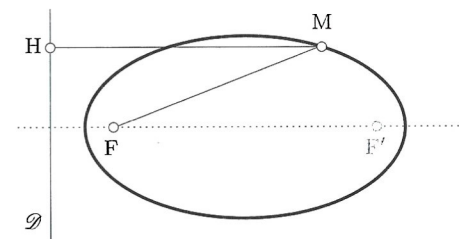


Fig. 35 — Définition de l'ellipse par sa directrice et un foyer.

♦ Elle peut être paramétrée, en coordonnées cartésiennes, par les équations

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

♦ L'ellipse admet pour équation polaire, par rapport au repère centré sur F et dirigé par FF' :

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

avec $p = a(1 - e^2)$. ☞ POLAIRE. ♦ Enfin, une ellipse est la section d'un cône de révolution avec un plan rencontrant toutes les génératrices ; c'est également la section d'un cylindre de révolution avec un plan rencontrant toutes les génératrices, mais cette dernière définition ne se généralise pas aux autres coniques.

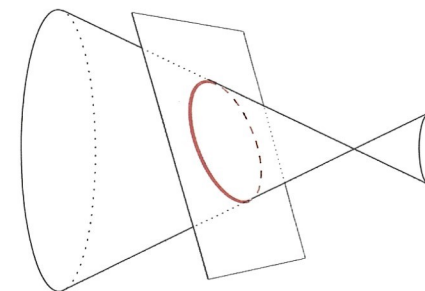


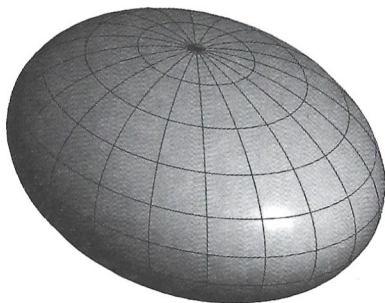
Fig. 36 — Intersection d'un cône de révolution et d'un plan : cas de l'ellipse.

☞ BIFOCAL, POLAIRE.

ELLIPSOÏDE

Quadrique à centre, d'équation dans un repère centré et dirigé selon les axes principaux (qui sont orthogonaux) de l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



♦ Un ellipsoïde est dit de révolution si deux de ses axes principaux ont même longueur ($a = b$ par exemple) ; il est alors obtenu par rotation d'une ellipse autour d'un de ses axes. On l'appelle également *sphéroïde*. Si $a = b > c$, l'ellipsoïde de révolution est dit oblat (aplatis, comme une pierre du jeu de go), si $a = b < c$, il est dit prolata (allongé, comme une cacahuète). Si $a = b = c$, c'est bien entendu une sphère.

EMBOÎTÉS

Théorème des segments emboîtés Considérons une suite $([a_n; b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ de segments emboîtés, c'est-à-dire une suite décroissante telle que $b_n - a_n \rightarrow 0$. Alors leur intersection est un singleton (en particulier, elle est non vide).

☞ SUITES *ADJACENTES.

ENDOMORPHISME

Soit E un espace vectoriel (de dimension quelconque). Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans lui-même. ♦ L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E a une structure naturelle d'espace vectoriel ; muni de la loi de composition « $\circ$ », il a une structure d'algèbre.

☞ APPLICATION LINÉAIRE, AUTOMORPHISME.

Endomorphisme induit Soient E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et V un sous-espace vectoriel de E stable par u . L'endomorphisme induit par u sur V est la restriction de u à V au départ et à l'arrivée :

$$\begin{aligned} u_V : V &\longrightarrow V, \\ x &\longmapsto u_V(x) = u(x). \end{aligned}$$

☞ RESTRICTION.

ENGENDRÉ

☞ SOUS-ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ, SOUS-GROUPE ENGENDRÉ.

ENTIÈRE

Fonction entière Fonction de la variable complexe, développable en série entière et de rayon infini.

REMARQUE : Une fonction entière est développable en série entière centrée en n'importe quel point de $\mathbb{C}$, avec toujours un rayon infini. ♦ Le théorème de Liouville assure qu'une fonction entière bornée est nécessairement constante. ☞ LIOUVILLE.

Partie entière d'un réel ☞ PARTIE ENTIÈRE.

Partie entière d'une fraction rationnelle ☞ DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLÉS.

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Équation fonctionnelle du type $\Phi(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$, où l'inconnue x est une fonction n fois dérivable. L'entier n est appelé *ordre* de l'équation différentielle.

☞ PROBLÈME DE *CAUCHY.

Équation différentielle résolue Lorsqu'il est possible d'exprimer $x^{(n)}$ en fonction de $t, x, x', \dots, x^{(n-1)}$ (on dit *résoudre* l'équation en $x^{(n)}$, tandis que trouver les solutions de l'équation se dit *intégrer* l'équation), on obtient une équation résolue, c'est-à-dire une équation de la forme

$$x^{(n)} = F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}).$$

Équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre Équation de la forme $x' = a \cdot x + b$, où l'inconnue x et le second membre b sont des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé E , et la fonction a est à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$. Dans cette écriture, il est sous-entendu que l'on s'est donné un intervalle I de E (connu ou inconnu...) et l'équation s'écrit en réalité

$$\forall t \in I \quad x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t),$$

où la notation $a(t) \cdot x(t)$ remplace celle, plus lourde, $a(t)(x(t))$. ♦ L'équation différentielle $x' = a \cdot x$ est l'*équation homogène* associée à la précédente.

REMARQUE : Une équation différentielle d'ordre n sur un espace vectoriel de dimension p peut toujours se ramener à une équation différentielle d'ordre 1 sur un espace vectoriel de dimension np . Ainsi, traiter le cas d'une équation d'ordre 1 revient en réalité à traiter le cas général.

☞ VARIATION DE LA CONSTANTE, WRONSKIEN.

Équation différentielle non linéaire du 1^{er} ordre Sous forme résolue, équation de la forme générale $x' = F(t, x)$.

REMARQUE : Le cas le plus général est celui où x, x' et t sont reliés par une équation implicite $\Phi(t, x, x') = 0$. Le théorème des fonctions *implicites permet généralement de se ramener, au moins localement, à la forme $x' = F(t, x)$.

ÉQUIPOTENTS

Deux ensembles A et B sont dits équipotents s'il existe une bijection φ de A sur B . ♦ Si A est de cardinal fini et équipotent à B , alors B est de cardinal fini et $\text{Card } B = \text{Card } A$. La relation d'équipotence traduit et généralise aux ensembles infinis l'idée d'« avoir le même nombre d'éléments ».

REMARQUE : La relation d'équipotence est une relation d'équivalence.

Exemples : Tous les ensembles dénombrables sont par définition équipotents : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \dots$ En revanche, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas équipotents.

☞ CARDINAL, DÉNOMBRABLE.

ÉQUIVALENCE

Classe d'équivalence Soit « $\sim$ » une relation d'équivalence sur un ensemble A . Pour tout $x \in A$, on appelle classe d'équivalence de x *modulo* la relation $\sim$ et on note $\bar{x}$ l'ensemble des éléments équivalents à x pour la relation « $\sim$ » :

$$\bar{x} = \{a \in A ; a \sim x\}.$$

♦ L'ensemble des classes d'équivalences modulo $\sim$ est noté $A/\sim$.

Exemple : Considérons, dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, la relation d'équivalence définie par : $x \sim y$ si et seulement si $2|(y-x)$. La classe de 3 est l'ensemble des entiers impairs.

✎ PARTITION, ORIENTÉ, SURJECTION *CANONIQUE.

Relation d'équivalence Une relation « $\sim$ » sur un ensemble A est appelée relation d'équivalence si elle est :

$$\begin{array}{lll} \text{réflexive} & \forall x \in A & x \sim x; \\ \text{symétrique} & \forall x, y \in A & x \sim y \Rightarrow y \sim x; \\ \text{transitive} & \forall x, y, z \in A & (x \sim y) \text{ et } (y \sim z) \Rightarrow x \sim z. \end{array}$$

Exemple : Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A et B sont semblables, et on écrit $A \sim B$, s'il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$. La relation de similitude est une relation d'équivalence.

✎ CLASSE D'ÉQUIVALENCE, PARTITION.

ÉQUIVALENTS

Fonctions équivalentes Soient f, g deux fonctions de E dans F , définies sur une partie A de E . Soit a un point adhérent à A . On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a , et on écrit $f \sim_a g$, si $f - g = o(\|f\|)$. ♦ La relation « $\sim_a$ » est une relation d'équivalence.

REMARQUE : Une caractérisation de $f \sim_a g$ est : il existe une fonction $h : A \rightarrow E$, de limite 1 en a , telle que $f = h \cdot g$ sur un voisinage de a . ♦ Si f et g sont des fonctions numériques ($F = \mathbb{K}$) et si g ne s'annule pas au voisinage de a , cette condition est équivalente à la condition $f/g \rightarrow 1$.

Exemple : Au voisinage de 0, on a $\cos x - 1 \sim_{x \rightarrow 0} x^2/2$.

✎ NÉGLIGEABLE, DOMINATION (FONCTION DOMINÉE PAR UNE AUTRE).

Normes équivalentes Deux normes N et N' sur un espace vectoriel E sont équivalentes si chacune domine l'autre, c'est-à-dire s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N \leq N' \leq \beta N$.

REMARQUES : Si N et N' sont des normes équivalentes, alors les notions de convergence d'une suite, de continuité d'une application, de parties bornées, de suites de Cauchy, de compacité et de complétude sont identiques pour une norme et pour l'autre. ♦ Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Exemples : Dans $\mathbb{R}^n$, les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes puisque $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \sqrt{n} \|\cdot\|_\infty$. ♦ Notons E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0; 1]$ et, pour toute fonction f de E , notons $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$ et $\|f\|_\infty = \sup |f|$. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes. En effet, si l'on note $f_n : x \mapsto x^n$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 au sens de la première, mais pas au sens de la seconde : $\|f_n - 0\|_1 = 1/(n+1)$ tandis que $\|f_n - 0\|_\infty = 1$.

Paramétrages équivalents Deux paramétrages γ et μ de classe $\mathcal{C}^k$ d'un arc paramétré sont $\mathcal{C}^k$ -équivalents s'il existe un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme φ tel que $\gamma = \mu \circ \varphi$. ♦ Ils sont dits *positivement équivalents* si φ est strictement croissante; l'orientation de γ et de μ sont alors les mêmes. ♦ De même, si U et V sont deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, deux paramétrages $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ d'une nappe de classe $\mathcal{C}^k$ sont $\mathcal{C}^k$ -équivalents s'il existe un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$ tel que $f = g \circ \varphi$.

Suites équivalentes Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans un espace vectoriel normé F . On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et on écrit $u_n \sim v_n$, si $u_n - v_n = o(v_n)$.

REMARQUE : On peut caractériser la relation $u_n \sim v_n$ par : il existe une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de limite 1, telle que $u_n = h_n v_n$ à partir d'un certain rang. ♦ Si les suites sont à valeurs dans $\mathbb{K}$ et si l'on suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas (au moins à partir d'un certain rang), cette condition est équivalente à la condition $u_n/v_n \rightarrow 1$.

ERREUR

Lors du calcul d'une grandeur, désigne la différence d'une quantité exacte et sa valeur approchée obtenue par une formule d'approximation.

Exemple : L'approximation de π par le rationnel 355/113 conduit à une erreur inférieure à 10^{-6} .

✎ APPROXIMATIONS.

Fonction d'erreur Désigne une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$, à un facteur additif ou multiplicatif près. ♦ Le logiciel Maple définit

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

de telle façon que $\text{erf}(0) = 0$, $\text{erf}(+\infty) = 1$ et $\text{erf}(-\infty) = -1$. ♦ La fonction d'erreur, avec cette convention, est liée à la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite : $\text{erf}(x/\sqrt{2}) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1$.

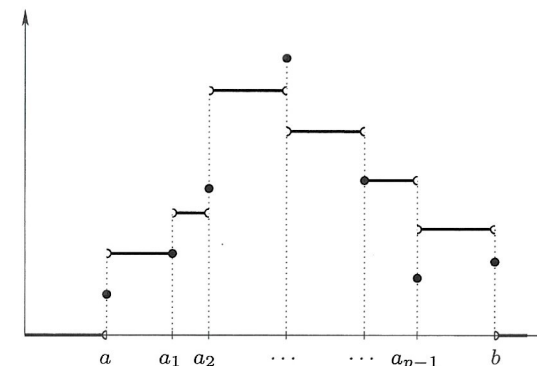
✎ INTÉGRALE DE *GAUSS, LOI NORMALE, THÉORÈME *CENTRAL-LIMITE.

ESCALIER

Fonction en escalier Une fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ est en escalier si elle est nulle en dehors d'un segment $[a; b]$, et s'il existe une subdivision $(a_0, \dots, a_p)$ de $[a; b]$ telle que φ soit constante sur chaque intervalle $]a_k; a_{k+1}[$.

REMARQUE : Toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme de fonctions en escalier. Cela permet de démontrer, par densité, des propriétés pour les fonctions continues par morceaux, en les montrant d'abord pour des fonctions en escalier.

✎ DENSITÉ.



Exemple : Si I est un intervalle borné, ou une réunion finie d'intervalles bornés, alors la fonction *caractéristique de I est une fonction en escaliers.

ESPACE

Terme général désignant un ensemble E muni d'une certaine structure. ♦ Employé absolument, il est généralement synonyme d'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ (ou d'espace affine $\mathbb{R}^3$).

☞ ESPACE *AFFINE, ESPACE *PROBABILISABLE, ESPACE VECTORIEL.

Espace de Banach Espace vectoriel normé complet.

Espace des épreuves Synonyme d'univers. ☞ ESPACE *PROBABILISABLE.

Espace hermitien Espace vectoriel préhilbertien complexe de dimension finie.

Espace métrique ☞ MÉTRIQUE.

Espace préhilbertien Espace vectoriel (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire.

☞ PRODUIT SCALAIRE, FORME BILINÉAIRE SYMÉTRIQUE DÉFINIE POSITIVE, HERMITIEN.

Espace probabilisable, probabilisé ☞ PROBABILISABLE, PROBABILISÉ.

Espace vectoriel Un espace vectoriel sur un corps commutatif K est un triplet $(E, +, \cdot)$, où E est un ensemble et

i) la loi « $+$ » est une loi opération interne qui fait de $(E, +)$ un groupe abélien additif, c'est-à-dire que

- a) elle est *commutative* : $u + v = v + u$;
- b) elle est *associative* : $(u + v) + w = u + (v + w)$;
- c) elle admet un *vecteur neutre*, noté 0_E ;
- d) tout vecteur $u \in E$ admet un *opposé*, noté $-u$.

ii) La loi « $\cdot$ » est *externe*, notée « $\cdot$ », et permet de multiplier un vecteur par un scalaire ; c'est donc une application de $K \times E$ dans E vérifiant les propriétés suivantes, valables pour tout $\lambda, \mu \in K$ et $x, y \in E$:

- a) $1 \cdot x = x$;
- b) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
- c) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;
- d) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$.

On note 0_E (ou 0 , s'il n'y a pas d'ambiguïté) le *vecteur zéro*, élément neutre de $(E, +)$. Les éléments de K sont les *scalaires* et ceux de E les *vecteurs*.

Exemples : Les espaces $\mathbb{K}^n$ (où n est un entier naturel non nul) sont des espaces vectoriels, de dimension finie. ♦ L'ensemble des fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un scalaire, est un espace vectoriel, de dimension infinie. ♦ L'ensemble des séries réelles convergentes en est un autre.

Espace vectoriel normé Couple (E, N) formé par un espace vectoriel E et une norme N sur E .

☞ NORME.

ESPÉRANCE

Soit X une variable aléatoire réelle. L'existence et la définition de son espérance sont définies ci-après dans deux cas importants : celui d'une variable aléatoire discrète, et celui d'une variable aléatoire à densité. Une définition plus générale suit.

Espérance d'une variable aléatoire discrète Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$; on dit qu'elle admet une espérance lorsque les séries $\sum n \mathbf{P}[Z = n]$ et $\sum n \mathbf{P}[Z = -n]$ convergent ; dans ce cas, son espérance est

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \mathbf{P}[X = n].$$

♦ Si X est une variable aléatoire discrète prenant des valeurs réelles (ou complexes) $\{x_k ; k \in \mathbb{N}\}$, alors elle admet une espérance lorsque $\sum x_k \mathbf{P}[X = x_k]$ converge absolument ; dans ce cas, son espérance est

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} x_k \mathbf{P}[X = x_k].$$

Espérance d'une variable aléatoire à densité Soit X une variable aléatoire admettant une densité f ; on dit que X admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge absolument ; dans ce cas, son espérance est

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

REMARQUE : La convergence absolue de l'intégrale, dans ce cas particulier, est équivalent au fait que les deux intégrales $\int_0^{+\infty} x f(x) dx$ et $\int_{-\infty}^0 x f(x) dx$ convergent, puisque leurs intégrandes sont de signe constant. ♦ Dans le cas d'une variable aléatoire positive à densité admettant une espérance, cette espérance vaut

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(x)) dx,$$

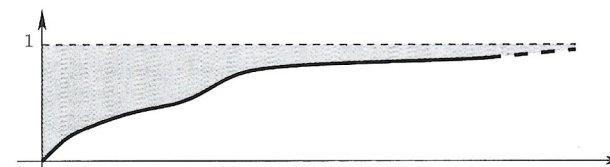
en notant F la fonction de répartition de X . Une intégration par parties permet de retrouver la formule usuelle.

☞ COVARIANCE, LOI DES *GRANDS NOMBRES, FORMULE DE *TRANSFERT.

Espérance (définition plus générale) Si X est une variable aléatoire réelle finie, prenant les valeurs $(x_1, \dots, x_n)$, alors l'espérance de X est $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{P}[X = x_k]$.

♦ Pour une variable aléatoire X positive, si l'ensemble des $\mathbf{E}(Y)$, pour Y variable aléatoire finie vérifiant $0 \leq Y \leq X$, est borné, on dit que X admet une espérance, et on note $\mathbf{E}(X)$ cette borne supérieure. ♦ Pour une variable aléatoire X réelle, on écrit $X = X^+ - X^-$, en notant $X^+ = \max(X, 0)$ et $X^- = \max(-X, 0)$. Si X^+ et X^- admettent une espérance, on dit que X admet une espérance, et on pose $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X^+) - \mathbf{E}(X^-)$.

REMARQUES : Cette définition est évidemment compatible avec les deux définitions qui précèdent, et les généralise. ♦ Une autre façon de définir l'espérance d'une variable aléatoire réelle est la suivante. Si X est une variable aléatoire positive de fonction de répartition F , alors X admet une espérance si $1 - F$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$; dans ce cas, on note $\mathbf{E} = \int_0^{+\infty} (1 - F) : c'est donc l'aire (finie!) au-dessus de la fonction de répartition sur $\mathbb{R}^+$.$



Si X est une variable aléatoire négative de fonction de répartition F , alors X admet une espérance si F est intégrable sur $\mathbb{R}^-$; dans ce cas, on note $\mathbf{E}(X) = - \int_{-\infty}^0 F$. Enfin, dans le cas général, on décompose $X = X^+ - X^-$, on dit que X admet une espérance si X^+ et $-X^-$ en admettent une, et on pose $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X^+) + \mathbf{E}(-X^-)$. ♦ Si F est la fonction de répartition de X , cette dernière admet une espérance si et seulement si les deux intégrales suivantes sont convergentes, et son espérance est alors

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F) - \int_{-\infty}^0 F.$$

♦ Enfin, une dernière définition peut être donnée en utilisant l'intégrale de Riemann-Stieltjes : en notant F la fonction de répartition de la variable aléatoire X , l'espérance de X est $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF$ lorsque cette intégrale converge absolument.

Propriétés de l'espérance L'ensemble des variables aléatoires (sur un même espace probabiliste) admettant une espérance est un espace vectoriel. L'espérance est une application linéaire : si X et Y sont des variables aléatoires admettant une espérance, alors $\lambda X + Y$ admettent également une espérance, et $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$. ♦ Si X est une variable aléatoire (presque sûrement) constante égale à m , alors $E(X) = m$. ♦ Notamment, si X admet une espérance, alors $E(E(X)) = E(X)$. ♦ Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, si X , Y et XY admettent une espérance, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$. Si elles ne sont pas indépendantes, il n'y a *a priori* pas d'égalité ; la différence $E(XY) - E(X)E(Y)$ est appelée *covariance* du couple (X, Y) .

Espérance de $\varphi(X)$, de $\psi(X, Y)$ ✎ TRANSFERT (FORMULE DE).

Espérance conditionnelle Soient Y une variable aléatoire et A un événement de probabilité non nulle. Notons P_A la probabilité conditionnée par l'événement A . Alors, l'espérance de Y conditionnée par A , notée $E_A(Y)$ ou $E(Y | A)$, est l'espérance de Y en tant que variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F}, P_A)$, lorsque celle-ci existe.

Exemples : Considérons le cas d'une variable aléatoire discrète ; son espérance conditionnelle est alors

$$E_A(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n P_A[Y = y_n].$$

♦ En particulier, si X et Y deux variables aléatoires discrètes, on note $P_{[X=x_k]}$ la probabilité conditionnée par l'événement $[X = x_k]$; l'espérance de Y conditionnée par l'événement $[X = x_k]$, si elle existe, est

$$E_{[X=x_k]}(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n P_{[X=x_k]}[Y = y_n]$$

♦ Si $(A_k)_{k \in K}$ est un système complet (ou quasi complet) d'événements, alors l'espérance de Y est liée aux espérances conditionnelles par la *formule de l'espérance totale* :

$$E(Y) = \sum_{k \in K} P(A_k) E_{A_k}(Y).$$

✎ ESPÉRANCE, PROBABILITÉ CONDITIONNELLE.

ESTIMATEUR

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Pour tout entier $n \geq 1$, une variable aléatoire T_n , fonction de $X_1, \dots, X_n$, s'appelle un estimateur d'ordre n .

✎ INTERVALLE DE CONFIANCE.

Estimateur sans biais Soit X une variable aléatoire. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X (suite d'échantillons de X). Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'estimateurs, et soit enfin θ un réel. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $E(T_n) = \theta$, on dit que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'estimateurs sans biais de θ . ♦ Si l'on n'a que la condition $\lim_{n \rightarrow \infty} E(T_n) = \theta$, alors la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'estimateurs *asymptotiquement sans biais* de θ .

Exemple : Soit X une variable aléatoire admettant une espérance $m = E(X)$. On définit $T_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$. Alors $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'estimateurs sans biais de m . La variable aléatoire T_n est appelée suite des moyennes empiriques de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Estimateur convergent Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'estimateurs, et θ un réel. Si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable constante égale à θ , on dit que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'estimateurs convergents de θ .

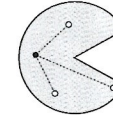
Exemple : Reprenant l'exemple précédent, si la variable aléatoire admet une variance, alors la suite des moyennes empiriques fournit une suite d'estimateurs sans biais et convergente de $E(X)$ (✎ LOI FAIBLE DES *GRANDS NOMBRES).

REMARQUE : Les inégalités de Bienaymé-Tchebychev et de Markov permettent de montrer qu'une suite d'estimateurs sans biais (ou asymptotiquement sans biais) et de variance tendant vers 0 est convergente.

ÉTOILÉ

Une partie A d'un espace vectoriel normé est dite étoilée par rapport à un point $a \in A$ si, pour tout $x \in A$, le segment $[a; x] = \{tx + (1-t)a; t \in [0; 1]\}$ est inclus dans A .

Exemple : Ci-dessous, une partie du plan, étoilée par rapport au point noir.



✎ CONNEXE, CONVEXE, POINCARÉ, SEGMENT.

ÉTRANGERS

Deux entiers sont dits étrangers s'ils sont *premiers entre eux, c'est-à-dire si leur PGCD est égal à 1.

EUCLIDE (né vers 300 av. J.-C.)

(Mathématicien grec)

Algorithme d'Euclide Originellement appelé *anthyphérèse* par Euclide, amélioré par Gauss, il est basé sur la propriété suivante : si a et b sont des entiers tels que $0 \leq b \leq a$, si la division euclidienne de a par b s'écrit $a = bq + r$, alors $a \wedge b = b \wedge r$. Ainsi, lorsque l'on veut calculer le pgcd de a et de b , il suffit de calculer celui de b et de r . Puisque r est plus petit que a et b , l'opération est plus simple. On peut alors recommencer l'opération : on effectue la division de b par r , et l'on continue jusqu'à ce qu'un reste soit nul. En pratique :

- on pose $r_0 = a$, $r_1 = b$ et $n = 1$;
- si r_n est non nul, on note r_{n+1} le reste de la division euclidienne de r_{n-1} par r_n , puis on remplace $n \leftarrow n + 1$ et on recommence.

Il existe un rang N tel que $r_N = 0$. Le pgcd de a et de b est alors $d = a \wedge b = r_{N-1}$.

♦ Cet algorithme, légèrement amélioré, permet également de déterminer un *couple de Bézout*, c'est-à-dire un couple (u, v) tel que $au + bv = d$. Pour cela, on détermine à chaque étape un couple (u_n, v_n) tel que $au_n + bv_n = r_n$.

- on pose $r_0 = a$, $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$;
- on pose $r_1 = b$, $u_1 = 0$ et $v_1 = 1$;
- pour tout rang $n \in [1; N - 1]$, on pose

$$u_{n+1} = u_{n-1} - q_n u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_{n-1} - q_n v_n,$$

- où q_n est le quotient de la division euclidienne de r_{n-1} par r_n ;
- au rang N , on a la relation $d = r_N = a u_N + b v_N$.

✎ BÉZOUT, DIVISION *EUCLIDIENNE, PGCD.

Anneau euclidien Anneau commutatif, intègre sur lequel on peut définir une division euclidienne. En pratique, il faut une application $\varphi : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ tels que, si a divise b , alors $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ et telle que, pour tout $a \in A$ et $b \in A \setminus \{0\}$, il existe un couple (q, r) d'éléments de A tels que $a = bq + r$ et $r = 0$ ou $\varphi(r) < \varphi(b)$. ♦ Tout anneau euclidien est principal.

Exemples : Si $A = \mathbb{Z}$, on pose $\varphi(a) = |a|$. ♦ Si $A = \mathbb{K}[X]$, on pose $\varphi(P) = \deg P$. ♦ Si A est l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss, on pose $\varphi(x + iy) = x^2 + y^2$.

☞ ANNEAU PRINCIPAL.

Division euclidienne Dans l'anneau $\mathbb{Z}$, effectuer la division euclidienne de a par $b \neq 0$, c'est trouver l'unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$. L'entier q est appelé *quotient*, et l'entier r *reste* de la division euclidienne de a par b . ♦ Dans l'anneau $\mathbb{K}[X]$, où $\mathbb{K}$ est un corps ou un anneau commutatif, effectuer la division euclidienne de A par $B \neq 0$, c'est trouver l'unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$. Le polynôme Q est le *quotient* et le polynôme R le *reste* de la division euclidienne de A par B . ♦ Cette notion se généralise à d'autres anneaux : les anneaux euclidiens.

☞ BEZOUT, PGCD, PPCM.

Espace euclidien Espace préhilbertien réel de dimension finie.

☞ PRODUIT SCALAIRE, PROJECTION ORTHOGONALE.

EULER Leonhard (1707-1783)

(Mathématicien suisse)

Constante d'Euler-Mascheroni Nombre γ défini comme

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

♦ Il vaut approximativement $\gamma \approx 0,57721566\dots$ ♦ On ignore encore s'il est rationnel ou non.

REMARQUE : Cette constante est reliée à la fonction ζ de Riemann et joue donc un rôle important en théorie des nombres. ☞ ZETA.

Développement eulérien du sinus Pour tout $x \in]-1; +1[$,

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right).$$

Droite d'Euler ☞ TRIANGLE.

Équation différentielle d'Euler Équation du type $\sum \alpha_i t^i x^{(i)} = 0$. On peut la résoudre, séparément sur $\mathbb{R}^{*+}$ et sur $\mathbb{R}^{*-}$:

- soit par un changement de variable $u = \ln |t|$, ce qui ramène ensuite à une équation différentielle linéaire à coefficients constants ;
- soit en cherchant une solution sous la forme d'une puissance : $y = t^\alpha$, où α peut être complexe.

Exemple : L'équation $4t^2 x'' - 8t x' + 9x = 0$ se transforme en l'équation $4y'' - 12y' + 9y = 0$ par le changement de variable $y(u) = x(e^u) = x(t)$.

Fonction d'Euler ☞ GAMMA.

Indicatrice d'Euler Fonction $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ qui, à tout entier n associe le nombre d'entiers premiers avec n :

$$\varphi(n) = \text{Card} \{k \in [0; n-1] ; k \wedge n = 1\}.$$

REMARQUES : $\varphi(n)$ représente également le nombre d'éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

♦ La fonction φ est *faiblement multiplicative* : si $m \wedge n = 1$, alors $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

♦ $\varphi(1) = 1$. Si p est premier, $\varphi(p) = p - 1$. Si n se décompose en produit de nombres

premiers sous la forme $n = \prod p_i^{m_i}$, alors $\varphi(n) = \prod (p_i - 1) p_i^{m_i - 1}$. Pour tout n entier, on a la relation $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Méthode d'Euler de résolution approchée d'une équation différentielle Méthode de recherche d'une solution approchée sur un intervalle $[a; b]$ d'un problème de Cauchy $x' = f(t, x)$, de condition initiale $x(a) = x_0$. On *discrétise* le temps sur l'intervalle $[a; b]$, en posant $t_k = a + kh$ où $h = (b - a)/n$. On approche ensuite les réels $x(t_k)$ par les approximations x_k calculées de proche en proche par $x_0 = a$ et $x_{k+1} = x_k + h f(t_k, x_k)$.

REMARQUE : On peut montrer que, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b] \times \mathbb{R}$, alors la solution ainsi calculée approche uniformément la solution réelle, proportionnellement à $1/n$ (méthode dite d'ordre 1). Ce résultat est donc médiocrement performant. Certaines méthodes permettent d'approcher la solution en $1/n^2, 1/n^3, \dots$

Relation d'Euler pour une fonction homogène Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est dite homogène de degré α si $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, \dots, x_n)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Cette propriété est équivalente à la propriété :

$$\sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = \alpha f.$$

La démonstration de cette équivalence est un grand classique des fonctions de plusieurs variables.

ÉVÉNEMENT

Dans un espace probabiliste $(\Omega, \mathcal{F})$, un événement est une partie de Ω qui est élément de la tribu $\mathcal{F}$. C'est donc une partie sur laquelle on pourra définir une probabilité.

REMARQUE : Pour des raisons techniques assez délicates, il n'est pas toujours possible de définir un événement comme une partie quelconque de l'univers Ω , lorsque ce dernier n'est pas dénombrable : il existe donc des parties de Ω qui ne peuvent pas faire partie de la tribu $\mathcal{F}$. ♦ Cependant, toute partie à laquelle on peut penser sera, en pratique, un élément de $\mathcal{F}$, et donc un événement ; les parties qui ne sont pas dans $\mathcal{F}$ sont généralement constructibles uniquement avec l'axiome du choix (ce qui est évidemment très éloigné des préoccupations d'un utilisateur de la théorie des probabilités).

☞ ESPACE *PROBABILISABLE.

Événement atomique Événement de la forme $\{\omega\}$, où ω est un élément de Ω (un tel élément est parfois appelé un *possible*).

Événements indépendants ☞ INDÉPENDANCE.

Événements incompatibles Événements A et B d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$ disjoints, c'est-à-dire tels que $A \cap B = \emptyset$.

Événement presque sûr Événement A de probabilité égale à 1.

REMARQUE : Si $\mathbf{P}(A) = 1$, alors pour tout événement B , on a $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \cap A)$. Ainsi, on peut remplacer l'univers Ω par le nouvel univers A , plus restreint, ce qui permet d'écartier des événements qui pourraient poser des problèmes lors de calculs. Par exemple, dans la modélisation d'une succession infinie de tirages à pile ou face, se placer dans l'univers privé de l'événement « suite infinie de résultats face » permet de définir une variable aléatoire qui compte le nombre de lancer avant le premier face.

Événement presque impossible Événement A tel que $\mathbf{P}(A) = 0$. ☞ NÉGLIGEABLE.

Événement réalisé On dit qu'un événement A est réalisé par l'épreuve ω si $\omega \in A$.

REMARQUE : Une épreuve peut être vue, intuitivement, comme une réalisation particulière du hasard, le choix de tous les possibles étant Ω . Ainsi, considérons le cas très simple de la modélisation d'un lancer de dé. On pose $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Le tirage effectif du dé est modélisé par le choix d'un élément ω de Ω . Considérons l'événement A correspondant à l'assertion « le résultat du dé est un nombre pair », c'est-à-dire $A = \{2, 4, 6\}$. On dit alors que A est réalisé si $\omega = 2$, $\omega = 4$ ou $\omega = 6$.

Événements liés à une variable aléatoire Si X est une variable aléatoire et si A est une partie raisonnable de $\mathbb{R}$ (un élément de la tribu des boréliens), on définit l'événement $[X \in A]$ par

$$[X \in A] = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in A\}.$$

Si x est un réel, on définit de même

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) = x\} \quad \text{et} \quad [X \leq x] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\}.$$

✎ INDÉPENDANCE.

EXACTE

Forme différentielle exacte La *forme différentielle ω est exacte s'il existe une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\omega = df$. (La fonction f est alors appelée une *primitive* de ω .)

✎ FERMÉE, FORME DIFFÉRENTIELLE, INTÉGRALE *CURVILIGNE, POINCARÉ, SCHWARZ.

EXCENTRICITÉ

✎ CONIQUE, ELLIPSE, HYPERBOLE, PARABOLE, POLAIRE.

EXHAUSTIVE

Suite exhaustive de segments Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de segments est dite exhaustive si elle est croissante (pour l'inclusion) et si sa réunion est égale à I .

Exemple : Notons $J_n = [0; 1 - 1/n]$; alors la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite exhaustive de $[0; 1[$. ♦ Notons $K_n = [1/n; n]$; alors la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite exhaustive de $]0; +\infty[$.

EXPONENTIELLE

Exponentielle d'un nombre L'exponentielle d'un nombre z réel ou complexe peut être définie comme la somme de la série (absolument) convergente :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Elle établit une surjection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$, et ne s'annule donc jamais. ♦ Elle vérifie la propriété $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$ pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$. ♦ Elle permet de retrouver la formule d'Euler : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. ♦ De manière générale, un nombre complexe de la forme $z = a + ib$ s'envoie sur $\exp(z) = e^a e^{ib}$. ♦ La restriction de cette fonction à la droite réelle est la réciproque de la fonction logarithme. ♦ C'est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x' = x$ assortie de la condition initiale $x(0) = 1$. ♦ La fonction exponentielle réelle étant strictement convexe, on a notamment l'inégalité importante

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1 + x.$$

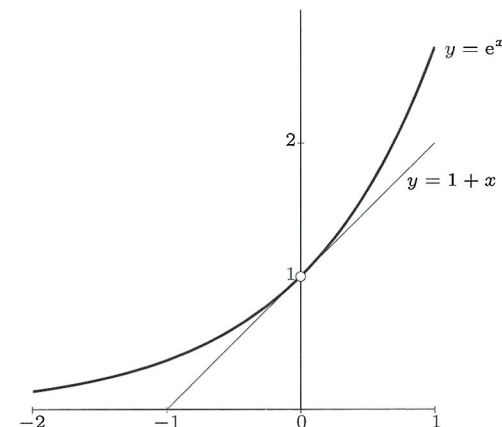


Fig. 37 — Graphe de la fonction exponentielle réelle. La tangente à la courbe en 0 est sous la courbe, par convexité.

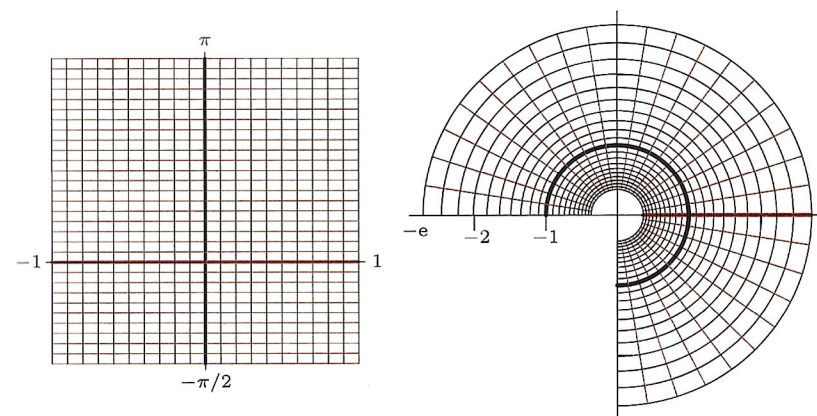


Fig. 38 — Le rectangle $[-1; +1] \times [-\pi/2; \pi]$ du plan complexe, et son image par la fonction exponentielle. Les axes sont représentés en gras (rouge et noir) sur le premier graphe, et leurs images apparaissent de même sur le second.

Exponentielle dans une algèbre de Banach Soit a un élément d'une algèbre de Banach (algèbre normée complète). Alors la série $\sum a^n/n!$ est absolument convergente, donc convergente. Sa somme est appelée exponentielle de a :

$$\exp(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

REMARQUE : La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \exp(ta)$ est l'unique solution de l'équation différentielle $y' = a \cdot y$, assortie de l'équation différentielle $y(0) = 1$. De plus, si a et b

commutent, alors $\exp(a)$ commute avec b et avec $\exp(b)$, et

$$\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b) = \exp(b) \cdot \exp(a).$$

Exemple : Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E)$, muni de la norme linéaire subordonnée $\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$, est une algèbre normée, et l'on peut poser $\exp u = \sum_{n=0}^{\infty} u^n/n!$.

■ ALGÈBRE DE BANACH, NORME D'ALGÈBRE, ESPACE COMPLET.

Exponentielle d'une matrice L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sur lequel toutes les normes sont équivalentes, peut notamment être muni d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$. Ainsi, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum A^n/n!$ est absolument convergente, donc convergente dans l'espace complet $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$. Sa somme est appelée exponentielle de A :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

REMARQUES : La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \exp(tA)$ est l'unique solution de l'équation différentielle $Y' = A \cdot Y$, assortie de la condition initiale $Y(0) = I_n$. ♦ Si A et B commutent, alors $\exp(A)$ commute avec B et avec $\exp(B)$, et

$$\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B) = \exp(B) \cdot \exp(A).$$

Si A et B ne commutent pas, on n'a pas de formule simple pour $\exp(A+B)$.

Exemple : Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\exp A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Loi exponentielle, variable aléatoire exponentielle ■ LOI.

EXPOSANT

L'expression « a exposant b », représentée graphiquement par « a^b », n'a pas de sens préétabli en soi, et peut signifier plusieurs choses ; la plupart du temps, sa signification est sous-entendue, le contexte permettant de la déterminer.

- Si a est un réel strictement positif et si b est un réel ou un complexe, a^b se lit « a puissance b », et est défini par $a^b = \exp(b \ln a)$. ♦ Si a est un complexe et si n est un entier naturel non nul, alors $a^n = a \cdot a \cdots a$ (produit de n facteurs), tandis que $a^0 = 1$.

- Si f est une fonction numérique, alors f^b est généralement l'application $x \mapsto (f(x))^b$. Cependant, $f^n(x)$ représente parfois $f \circ \cdots \circ f(x)$.

REMARQUE : L'usage est de mettre l'exposant directement après le nom de la fonction, même évaluée en un point, dans le cas des fonctions usuelles. Ainsi, $\cos^2 x$ représente $(\cos x)^2$ et non $\cos(\cos x)$, comme dans la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

- Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E , alors f^n (où n est un entier naturel non nul) représente toujours le produit de composition $f \circ f \circ \cdots \circ f$, et f^0 est l'application identité. Si f est inversible, f^{-1} représente l'inverse de f et $f^{-n} = (f^{-1})^n$.
- Dans certaines situations, afin de ne pas multiplier les indices, on peut indexer une famille d'objets en la notant avec des exposants.

Exemple : Si $E = E_1 \oplus E_2$, on peut munir E_1 d'une base $(e_1^1, e_2^1, \dots, e_{d_1}^1)$ et E_2 d'une base $(e_1^2, e_2^2, \dots, e_{d_2}^2)$.

- Divers symboles sont habituellement placés en exposant : « $*$ » pour l'adjoint, la lettre « t » pour la transposée (les Français notent tA , les Anglo-Saxons A^T). Voir la table ci-après.

Symbole	Exemple	Signification
t	tA	transposée de la matrice A
T	A^T	idem (notation anglo-saxonne)
$\perp$	$V^\perp$	orthogonal de V
$*$	u^*	adjoint de u
$*$	E^*	dual de E
$', ''$	f', f''	dérivée, dérivée seconde de f
(n)	$f^{(n)}$	dérivée n -ième de f
-1	f^{-1}	bijection réciproque de f
$+, -$	f^+, f^-	partie positive/négative
$+, -$	$f(a^+), f(a^-)$	limite à droite/à gauche en a

TABLE 3 — Symboles mis en exposant.

EXTENSION

Extension de corps Un corps L est une extension d'un corps K si K est un sous-corps de L .

■ CORPS, CONSTRUCTIBLE, QUATERNIONS.

EXTRACTRICE

Fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante. Elle permet d'extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ d'une suite u .

EXTRAITE

Suite extraite Synonyme de *sous-suite*. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace E quelconque. On appelle suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou bien *sous-suite de* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite $(u_{\varphi(n)})_n$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, appelée *extractrice*.

REMARQUE : Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite et si $(u_{\varphi(n)})_n$ en est une suite extraite, alors une suite extraite de cette dernière est de la forme $(u_{\varphi \circ \psi(n)})_n$. Attention à l'ordre de la composition, que l'on peut retenir en remarquant que l'image de $\varphi \circ \psi$ est bien incluse dans celle de φ , ce qui est évidemment souhaitable si l'on ne garde que certains éléments d'une suite !

■ ACCUMULATION, EXTRACTRICE, SOUS-SUITE.

EXTRÉMITÉ

Extrémités d'un arc paramétré Si $\gamma : [a; b] \rightarrow F$ est un arc paramétré à valeurs dans un espace vectoriel normé F , ses extrémités sont $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$. ♦ Si l'orientation de γ est importante, on appelle $\gamma(a)$ l'*origine* et $\gamma(b)$ l'*extrémité* de γ .

Extrémités d'un intervalle Si $I = [a; b]$ ou $[a; b[$ ou $]a; b]$ ou $]a; b[$, les extrémités de I sont a et b . Cette notion se généralise au cas où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

EXTREMUM

Bien que l'Académie française recommande le pluriel *extremums*, la forme *extrema* est prépondérante chez les mathématiciens, et obligatoire dans la locution *extrema liés*.

Extremum d'une fonction à valeurs réelles Synonyme de *extremum global*. Maximum ou minimum d'une fonction.

Extremum local Minimum ou maximum local.

■ MAXIMUM, MINIMUM.

Recherche d'extrema locaux Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction numérique dérivable définie sur un intervalle I , et si elle admet un extremum local en un point a intérieur à I , alors $f'(a) = 0$.

REMARQUE : Attention, ce n'est qu'une condition nécessaire, et non suffisante. De plus, la condition « a est intérieur à I » est cruciale. Sur la figure ci-dessous, deux points « trompeurs » sont représentés.

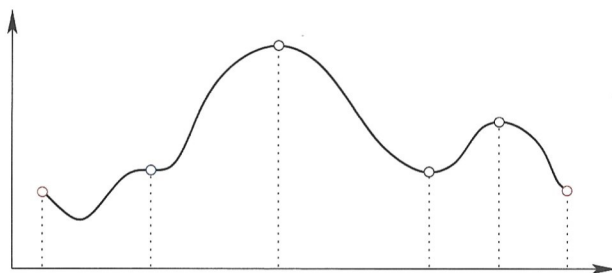


Fig. 39 — En rouge, deux extrema locaux en lesquels f' ne s'annule pas; en bleu, un point en lequel la dérivée $f'(b)$ s'annule, mais qui n'est pas un extremum local.

Recherche d'extrema locaux d'une fonction de plusieurs variables Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et si $a = (a_1, \dots, a_n)$ est un point de U en lequel f admet un extremum local, alors a est un point critique, c'est-à-dire que le gradient de f s'annule en a , ou encore :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0.$$

REMARQUE : Comme dans le cas d'une fonction de la variable réelle, on a une condition nécessaire, mais non suffisante. Par exemple, un point critique peut être un point « col », et n'être pas un extremum local. ■ COL.

Théorème des extrema liés ■ LIÉS.

F

FACTORISATION

Factoriser une expression, c'est la mettre sous la forme d'un produit de deux expressions ou plus, permettant de simplifier le problème. Outre les factorisations élémentaires, du type $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, valable dans un anneau commutatif, il existe un certain nombre de factorisations classiques concernant les matrices : on écrit une matrice M sous la forme $M = AB$, où A et B sont des matrices présentant des propriétés intéressantes.

Factorisation matricielle ■ DÉCOMPOSITION.

Factorisation d'endomorphisme Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E , une factorisation de u est une décomposition de la forme $u = a \circ b$, où a et b sont des endomorphismes ayant des propriétés spécifiées.

Exemples : *Factorisation à gauche / à droite.* Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient u et v des endomorphismes. Si $\text{Ker } u \subset \text{Ker } v$, alors il existe un endomorphisme $a \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v = a \circ u$; la réciproque est immédiate. ♦ De même, si $\text{Im } u \subset \text{Im } v$, alors il existe un endomorphisme $b \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u = v \circ b$; la réciproque est immédiate.

FAISCEAU DE DROITES

Ensemble des droites passant par un point donné (le point pouvant être « à l'infini » ; dans ce cas, c'est une famille de droites parallèles). ♦ Improprement, on parlera d'un faisceau de droites pour indiquer un nombre fini de telles droites. Ainsi, une conique du genre hyperbole, mais dégénérée, d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, est-elle la réunion de deux droites.

■ CONIQUE DÉGÉNÉRÉE.

FAMILLE

Soient I et E deux ensembles. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est une application $\varphi : I \rightarrow E$; l'image d'un élément i de I par φ est noté x_i . ♦ Les éléments i de I sont appelés *indices* et on dit que la famille est *indexée* par I .

Exemple : Une famille indexée par $\mathbb{N}$ est une suite d'éléments de E .

Famille génératrice ■ GÉNÉRATRICE.

Famille libre ■ LIBRE.

Famille liée ■ LIÉE.

Famille de projecteurs ■ PROJECTEUR.

FERMAT Pierre Simon de (1601–1665)
(Mathématicien français)

Équation de Pell-Fermat Équation diophantienne de la forme $y^2 - ax^2 = 1$ ou $y^2 - ax^2 = -1$, où a est un entier, et dont on recherche les couples (x, y) de solutions entières.

Grand théorème de Fermat Désormais appelé *théorème de Fermat-Wiles*, après avoir été la *conjecture de Fermat* depuis que Fermat, en 1640, affirma que, si n est un entier supérieur ou égal à 3, l'équation diophantienne $x^n + y^n = z^n$ n'admet aucune solution entière (en demandant bien sûr que x, y et z soient non nuls).

REMARQUE : Pierre de Fermat avait noté, dans son exemplaire de l'*Arithmétique* de Diofant, qu'il avait trouvé « une merveilleuse démonstration » de cette propriété, mais que la marge du livre était trop étroite pour qu'il pût l'y consigner. Pendant trois siècles et demi,