

Recherche d'extrema locaux Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction numérique dérivable définie sur un intervalle I , et si elle admet un extremum local en un point a intérieur à I , alors $f'(a) = 0$.

REMARQUE : Attention, ce n'est qu'une condition nécessaire, et non suffisante. De plus, la condition « a est intérieur à I » est cruciale. Sur la figure ci-dessous, deux points « trompeurs » sont représentés.

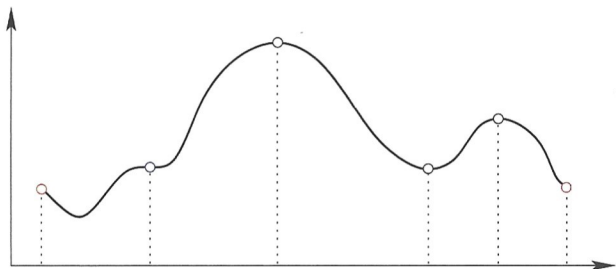


Fig. 39 — En rouge, deux extrema locaux en lesquels f' ne s'annule pas ; en bleu, un point en lequel la dérivée $f'(b)$ s'annule, mais qui n'est pas un extremum local.

Recherche d'extrema locaux d'une fonction de plusieurs variables Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et si $a = (a_1, \dots, a_n)$ est un point de U en lequel f admet un extremum local, alors a est un point critique, c'est-à-dire que le gradient de f s'annule en a , ou encore :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0.$$

REMARQUE : Comme dans le cas d'une fonction de la variable réelle, on a une condition nécessaire, mais non suffisante. Par exemple, un point critique peut être un point « col », et n'être pas un extremum local. $\clubsuit$ COL.

Théorème des extrema liés $\clubsuit$ LIÉS.

F

FACTORISATION

Factoriser une expression, c'est la mettre sous la forme d'un produit de deux expressions ou plus, permettant de simplifier le problème. Outre les factorisations élémentaires, du type $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, valable dans un anneau commutatif, il existe un certain nombre de factorisations classiques concernant les matrices : on écrit une matrice M sous la forme $M = AB$, où A et B sont des matrices présentant des propriétés intéressantes.

Factorisation matricielle $\clubsuit$ DÉCOMPOSITION.

Factorisation d'endomorphisme Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E , une factorisation de u est une décomposition de la forme $u = a \circ b$, où a et b sont des endomorphismes ayant des propriétés spécifiées.

Exemples : *Factorisation à gauche / à droite.* Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient u et v des endomorphismes. Si $\text{Ker } u \subset \text{Ker } v$, alors il existe un endomorphisme $a \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v = a \circ u$; la réciproque est immédiate. $\clubsuit$ De même, si $\text{Im } u \subset \text{Im } v$, alors il existe un endomorphisme $b \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u = v \circ b$; la réciproque est immédiate.

FAISCEAU DE DROITES

Ensemble des droites passant par un point donné (le point pouvant être « à l'infini » ; dans ce cas, c'est une famille de droites parallèles). $\clubsuit$ Improprement, on parlera d'un faisceau de droites pour indiquer un nombre fini de telles droites. Ainsi, une conique du genre hyperbole, mais dégénérée, d'équation réduite $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$, est-elle la réunion de deux droites.

$\clubsuit$ CONIQUE DÉGÉNÉRÉE.

FAMILLE

Soient I et E deux ensembles. Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est une application $\varphi : I \rightarrow E$; l'image d'un élément i de I par φ est noté x_i . $\clubsuit$ Les éléments i de I sont appelés *indices* et on dit que la famille est *indexée* par I .

Exemple : Une famille indexée par $\mathbb{N}$ est une suite d'éléments de E .

Famille génératrice $\clubsuit$ GÉNÉRATRICE.

Famille libre $\clubsuit$ LIBRE.

Famille liée $\clubsuit$ LIÉE.

Famille de projecteurs $\clubsuit$ PROJECTEUR.

FERMAT Pierre Simon de (1601–1665)

(Mathématicien français)

Équation de Pell-Fermat Équation diophantienne de la forme $y^2 - ax^2 = 1$ ou $y^2 - ax^2 = -1$, où a est un entier, et dont on recherche les couples (x, y) de solutions entières.

Grand théorème de Fermat Désormais appelé *théorème de Fermat-Wiles*, après avoir été la *conjecture de Fermat* depuis que Fermat, en 1640, affirma que, si n est un entier supérieur ou égal à 3, l'équation diophantienne $x^n + y^n = z^n$ n'admet aucune solution entière (en demandant bien sûr que x, y et z soient non nuls).

REMARQUE : Pierre de Fermat avait noté, dans son exemplaire de l'*Arithmétique* de Diofant, qu'il avait trouvé « une merveilleuse démonstration » de cette propriété, mais que la marge du livre était trop étroite pour qu'il pût l'y consigner. Pendant trois siècles et demi,

de très nombreux mathématiciens, tant amateurs que professionnels, se passionnèrent pour la question. Des progrès remarquables furent menés au cours des ans, des cas particuliers furent démontrés, mais il fallut attendre l'été 1993 pour qu'Andrew WILES présente au monde mathématique une démonstration complète du théorème. La nouvelle eut un énorme retentissement. (Il restait une petite erreur dans le raisonnement, que Wiles corrigea; la version achevée de la démonstration date donc de 1995.) En réalité, Wiles a démontré un résultat mathématique beaucoup plus général et plus important, appelé « conjecture de Shimura-Taniyama-Weil », dont on savait, depuis quelques années, qu'une de ses conséquences serait le théorème de Fermat.

Nombres de Fermat Nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$.

REMARQUE : Tout nombre premier de la forme $2^k + 1$ est un nombre de Fermat, mais la réciproque est fautive. Si les nombres F_0 à F_4 sont premiers, Euler montra que le nombre F_5 est composé : 4 294 967 297 est divisible par 641. Aucun autre nombre de Fermat premier n'est connu à ce jour. $\Leftrightarrow$ CONSTRUCTIBLE.

Petit théorème de Fermat Soit p un entier premier. Pour tout entier naturel a , on a : $a^p \equiv a \pmod{p}$.

FERMÉ

Une partie A d'un espace vectoriel normé E est dite fermée dans E si son complémentaire dans E est ouvert.

Caractérisation séquentielle des fermés A est fermée si et seulement si, pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A et convergente dans E , la limite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans A .

Autres caractérisations des fermés Soit A une partie de E , alors il y a équivalence entre :

- A est fermée ;
- $A = \overline{A}$;
- A est l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue.

♦ Si A est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , alors A est fermée.

Exemples : Dans l'espace E des fonctions bornées sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé F , et muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, le sous-espace vectoriel des fonctions continues sur I est un fermé de E . En d'autres termes, si une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues converge uniformément vers une fonction f , alors f est continue. ♦ $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \text{GL}_n(\mathbb{K})$ est l'image réciproque de $\{0\}$ par la fonction $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, qui est continue. C'est donc un fermé, et $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est donc ouvert.

Fermé relatif $\Leftrightarrow$ TOPOLOGIE RELATIVE.

$\Leftrightarrow$ ADHÉRENCE, COMPACT, OUVERT, TOPOLOGIE RELATIVE.

FERMÉE

Forme différentielle fermée Forme différentielle $\omega = \sum_{i=1}^n P_i dx_i$ définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout $(i, j) \in [1; n]^2$:

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}.$$

♦ Toute forme exacte est fermée (théorème de Schwarz), mais la réciproque n'est vraie que sur certains ouverts, en particulier les ouverts étoilés.

$\Leftrightarrow$ EXACTE, FORME DIFFÉRENTIELLE, POINCARÉ, SCHWARZ.

FERMETURE

Synonyme d'adhérence.

FINI

Se dit généralement d'une grandeur définie, *a priori*, dans $\overline{\mathbb{R}}$, mais qui est en réalité dans $\mathbb{R}$.

Exemples : Partie de $\mathbb{R}^2$ de diamètre fini. ♦ Série entière de rayon fini. ♦ Solution d'une équation différentielle à durée de vie finie. ♦ Intervalle de longueur finie.

Variable aléatoire finie Variable aléatoire X dont l'image $X(\Omega)$ est un ensemble fini.

Corps fini $\Leftrightarrow$ CORPS.

Dimension finie $\Leftrightarrow$ DIMENSION.

Ensemble fini Ensemble E qui n'est pas en bijection avec une de ses parties strictes. ♦ Le cardinal d'un ensemble fini est un entier naturel, c'est le nombre d'éléments de cet ensemble.

Groupe fini $\Leftrightarrow$ GROUPE.

Groupe de type fini $\Leftrightarrow$ TYPE.

Méthode des éléments finis $\Leftrightarrow$ MÉTHODE.

Théorème des accroissements finis $\Leftrightarrow$ ACCROISSEMENTS.

FIXE

Point fixe d'une application $f : E \rightarrow E$ Élément x vérifiant $f(x) = x$.

REMARQUE : Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'un espace vectoriel normé E , définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, si elle converge vers une limite ℓ , et si f est continue en ℓ , alors ℓ est un point fixe de f .

$\Leftrightarrow$ ATTRACTIF, BANACH, CONTRACTION, STABLE.

Théorème et méthode du point fixe Si $f : A \rightarrow A$ est une application contractante de rapport k , définie sur un fermé A d'un espace vectoriel normé complet E , alors f admet un unique point fixe a . Si l'on choisit un élément u_0 de A et que l'on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, cette suite converge alors exponentiellement vite vers a : $\|u_n - a\| = O(k^n)$.

REMARQUE : Cette méthode est importante au sens où elle permet d'accéder numériquement au point fixe dans de nombreuses situations. Citons pour mémoire le théorème de Cauchy-Lipschitz qui peut se démontrer à l'aide du théorème du point fixe; les solutions d'un problème de Cauchy particulier $y' = \Phi(f, t)$, $y(0) = a$ s'obtiennent numériquement par itération de l'application $f \mapsto g$ où $g : t \mapsto a + \int_0^t \Phi(f(u), u) du$, qui est contractante pour peu que l'on se limite à un voisinage suffisamment petit de 0 et que l'application Φ soit localement lipschitzienne en sa première variable.

$\Leftrightarrow$ CONTRACTION.

FONCTION

Synonyme d'application. ♦ Cependant, en analyse notamment, une fonction $f : A \rightarrow B$ est une application à qui on laisse la possibilité de n'être, en réalité, définie que sur une partie $A' \subset A$, appelée *domaine de définition* de f , noté $\mathcal{D}_f$. En dehors de $\mathcal{D}_f$, elle n'est pas définie.

REMARQUE : La notion est intéressante au sens où, parfois, ce qui nous intéresse, c'est ce que la fonction f fait de la variable x . C'est un point de vue où f ressemble à une « machine », que l'on nourrit avec une variable x , et qui retourne un objet $f(x)$, ou qui ne retourne rien. Ce point de vue, s'il est moins formel que celui d'une application (dont la définition est hautement formalisée), est en revanche très proche de celui qu'a un programmeur qui transcrit algorithmiquement le travail d'une fonction. Ainsi, lorsque l'on définit la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 + \sin x / 4\sqrt{x^2 - \sin x^2})$, il paraît maladroit de commencer par étudier son domaine de définition. En revanche, faire calculer à un ordinateur les différentes quantités intermédiaires et arrêter le calcul dès que le calcul de l'une d'elle est impossible (argument

négalif sous la racine, négatif ou nul dans le logarithme...) est un point de vue plus efficace, même s'il ne permet pas de déterminer le domaine.

Théorème des fonctions implicites ■■ IMPLICITE.

Fonction de répartition ■■ RÉPARTITION.

FONDAMENTAL

Théorème fondamental de l'algèbre Autre nom du théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme complexe non nul se factorise en produit de polynômes de degré 1.

■■ ALEMBERT, CLOS.

Théorème fondamental de l'analyse Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Soit c un élément de I . Alors l'application $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$F : x \mapsto \int_c^x f(t) dt$$

est dérivable sur I , et sa dérivée est égale à f .

REMARQUE : Si f n'est que continue par morceaux, alors F est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et, en tout point x en lequel f est continue, F est dérivable et de dérivée $F'(x) = f(x)$.

Théorème fondamental de la géométrie affine Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Toute application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ conservant les alignements est une application affine. (Une application conserve les alignements si et seulement si, pour tous points alignés A, B, C de $\mathcal{E}$, les points $f(A), f(B)$ et $f(C)$ sont alignés.)

FORME

Forme bilinéaire Soient E et F des espaces vectoriels réels. On appelle forme bilinéaire sur $E \times F$ toute application $\varphi : E \times F \rightarrow \mathbb{K}$ telle que φ est linéaire par rapport à chacune des variables.

■■ FORME *SESQUILINÉAIRE.

Forme bilinéaire non dégénérée Une forme bilinéaire $\varphi : E \times F \rightarrow \mathbb{K}$ est non dégénérée lorsque, pour tout $x \in E$ non nul, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est non nulle et si, pour tout $y \in F$ non nul, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est non nulle. ♦ En d'autres termes, si l'on définit

$$\gamma_x : y \mapsto \varphi(x, y) \quad \text{et} \quad \delta_y : x \mapsto \varphi(x, y),$$

les applications $x \mapsto \gamma_x$ et $y \mapsto \delta_y$, sont injectives. ♦ Si E et F sont de dimension finie, et si φ est non dégénérée, alors $\dim E = \dim F$. ♦ Toujours en dimension finie, φ est non dégénérée si et seulement si sa matrice représentative dans des bases quelconques est inversible. ♦ Une forme bilinéaire qui n'est pas non dégénérée est (évidemment) dite *dégénérée*.

Forme bilinéaire symétrique Forme bilinéaire sur un espace vectoriel E réel, telle que $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tous $x, y \in E$. ♦ Si E est un espace euclidien, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, à toute forme bilinéaire symétrique φ sur E , on peut associer un unique endomorphisme u vérifiant

$$\forall x, y \in E \quad \varphi(x, y) = \langle x | u(y) \rangle.$$

Cet endomorphisme (dit *associé à φ) est alors symétrique. Dans une base orthonormée, les matrices de φ et de u sont égales.

■■ RANG D'UNE FORME BILINÉAIRE SYMÉTRIQUE.

Forme bilinéaire symétrique (définie) positive Une forme bilinéaire φ sur un espace vectoriel réel E est positive lorsque $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$. ♦ Elle est définie positive lorsque $\varphi(x, x) > 0$ pour tout $x \in E$ non nul. Une telle forme définit un produit scalaire. ♦ Elle est définie négative lorsque $\varphi(x, x) < 0$ pour tout $x \in E$ non nul.

■■ PRODUIT SCALAIRE.

Formes coordonnées La forme linéaire $\pi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui à un vecteur $h = (h_1, \dots, h_n)$ associe sa k -ième coordonnée est appelée forme k -ième coordonnée. On la note souvent dx_k :

$$dx_k : (h_1, \dots, h_n) \mapsto h_k.$$

♦ La famille $(dx_1, \dots, dx_n)$ forme une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$: c'est la *base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Notamment, toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire de $dx_1, \dots, dx_n$.

Forme différentielle Une forme différentielle (d'ordre 1) sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est une application continue ω de U dans E^* ; en d'autres termes, à chaque point $x \in U$, l'application ω associe une forme linéaire $\omega(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. ♦ Puisque toute forme linéaire est combinaison linéaire des formes *coordonnées, il existe des fonctions $P_1, \dots, P_n$ telles que

$$\forall x \in \Omega \quad \omega(x) = \sum_{k=1}^n P_k(x) dx_k.$$

♦ La forme différentielle ω est dite de classe $\mathcal{C}^p$ si les fonctions $P_1, \dots, P_n$ le sont.

■■ EXACTE, FERMÉE, DIFFÉRENTIELLE, FORME LINÉAIRE, SCHWARZ, POINCARÉ.

Forme linéaire Une forme linéaire sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. ♦ Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan; réciproquement, tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

■■ DUAL, HYPERPLAN, REPRÉSENTATION.

Forme quadratique Application définie par $q(x) = \varphi(x, x)$, où φ est une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel. ♦ On peut retrouver φ , connaissant q , par les identités de *polarisation.

■■ FORME BILINÉAIRE, POLARISATION.

FORMULES DIVERSES

■■ BAYES, COMPLÉMENTS, CRAMER, FUBINI, GRASSMANN, KÖNIG, PROBABILITÉS TOTALES, RANG, TAYLOR, TRANSFERT, TRIGONOMÉTRIE.

FOURIER Joseph (1768–1830)
(Mathématicien français)

Coefficients de Fourier exponentiels Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et 2π -périodique. Ses coefficients de Fourier exponentiels, notés $\hat{f}(n)$ ou $c_n(f)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, sont définis par

$$\hat{f}(n) = c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

où l'intégration se fait sur $[0; 2\pi]$ ou sur un intervalle quelconque de longueur 2π .

REMARQUES : Si l'on note $e_n : t \mapsto e^{int}$ et que l'on définit, sur l'ensemble des fonctions continues et 2π -périodiques le produit scalaire

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f} \bar{g},$$

alors $c_n(f) = \langle e_n | f \rangle$. Sur l'ensemble des fonctions continues par morceaux et 2π -périodique, on n'a qu'un pseudo-produit scalaire, mais les raisonnements et les formules établies restent valides. ♦ Il convient d'être prudent dans le calcul des coefficients de Fourier d'une fonction : il arrive fréquemment que f ne soit pas connu sur un intervalle de largeur 2π , mais sur un intervalle plus restreint, et complétée par parité ou imparité, puis prolongement par périodicité. Son expression dépend donc de l'intervalle choisi pour effectuer le calcul, et ce choix devra être judicieux.

Coefficients de Fourier trigonométriques Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux et 2π -périodique, ce sont les nombres définis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt,$$

où l'intégrale est prise sur n'importe quel intervalle de longueur 2π . Ils sont reliés aux coefficients exponentiels par les relations

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases} \quad \begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \end{cases}$$

REMARQUE : Avec la convention ici présentée, on a donc $a_0 = 2c_0$. Cependant, une autre convention existe, qui consiste à définir le coefficient a_0 comme étant c_0 : la formule intégrale le définissant est donc différente de celle des coefficients a_n pour $n \geq 1$. Avec cette nouvelle convention, la formule définissant la série de Fourier (et donc la formule de Dirichlet) est simplifiée, et la formule de Parseval doit être adaptée.

a_0	Dirichlet	Parseval
$2c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f$	$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$	$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$
$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f$	$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$	$a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

TABLE 4 — Conventions de définition du coefficient de Fourier a_0 et formules de Dirichlet et de Parseval correspondantes.

Série de Fourier Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et 2π -périodique, et notons $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier. La série de Fourier de f est la série de fonctions $\sum u_n(f)$, où l'on a défini la fonction constante $u_0(f) : t \mapsto c_0(f)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n(f) : t \mapsto c_n(f) e^{int} + c_{-n}(f) e^{-int}.$$

♦ Rien n'assure *a priori* que cette série converge ni, si elle converge, que sa somme soit f .

✎ DIRICHLET, PARSEVAL.

Transformée de Fourier Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. Sa transformée de Fourier est l'application $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi xt} \, dt.$$

Si $\tilde{f}$ est elle-même continue par morceaux et intégrable, alors elle est reliée à f par la transformation inverse :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x) e^{2i\pi xt} \, dx.$$

Si f est de carré intégrable, alors $\tilde{f}$ aussi et $\int |f|^2 = \int |\tilde{f}|^2$ (théorème de Parseval-Plancherel). ♦ L'application $f \mapsto \tilde{f}$ est appelée *transformation de Fourier*.

FOYER

✎ BIFOCAL, CONIQUE, ELLIPSE, HYPERBOLE, REPRÉSENTATION *POLAIRE D'UNE CONIQUE.

FRACTION

Fraction continue Une fraction continue est une expression de la forme

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

où la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. ♦ Tout réel positif peut se mettre sous la forme d'une fraction continue (finie ou infinie). ♦ Si l'on cherche le développement d'un réel $x > 0$ en fraction continue, on peut calculer les entiers a_n par récurrence :

– on pose $x_0 = x$ et $a_0 = \lfloor x \rfloor$;

– si x_n n'est pas entier, on pose $x_{n+1} = \frac{1}{(x_n - a_n)}$ et $a_{n+1} = \lfloor x_{n+1} \rfloor$.

On note parfois $x = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$.

REMARQUE : Un réel x est rationnel si et seulement si son développement en fraction continue est fini.

Exemple : Les fractions continues jouent un rôle important dans de nombreuses branches des mathématiques, et notamment en arithmétique. Elles permettent également de calculer des approximations rationnelles de certains réels. Ainsi, avec le développement $\pi = [3, 7, 15, 1, \dots]$, on trouve les approximations suivantes :

$$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} \approx 3,1428\dots \quad 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = \frac{333}{106} \approx 3,14151\dots$$

tandis que l'approximation suivante mène à la fraction $\frac{355}{113} \approx 3,1415929\dots$, remarquablement proche de π .

Fraction rationnelle ✎ RATIONNELLE.

Fraction irréductible ✎ IRRÉDUCTIBLE.

FRENET Frédéric Jean (1816–1900)
(Mathématicien et astronome français)

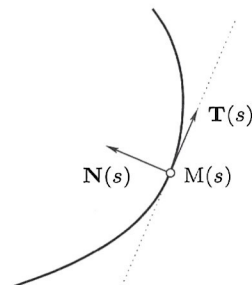
Formules de Frenet Soit γ un arc du plan euclidien orienté, de classe $\mathcal{C}^2$, muni d'un paramétrage normal (abscisse *curviligne). Alors, en notant $(M(s), T(s), N(s))$ le repère de Frenet,

$$\frac{dT}{ds}(s) = c(s) N(s) \quad \text{et} \quad \frac{dN}{ds}(s) = -c(s) T(s),$$

où $c(s)$ est la *courbure en $M(s)$. ♦ La première de ces formules permet de définir la courbure, la seconde est une identité supplémentaire.

Formules de Frenet dans l'espace $\approx$ TORSION.

Repère de Frenet (dans le plan) Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc du plan euclidien orienté, de classe $\mathcal{C}^1$, paramétré par une abscisse curviligne. On note $\mathbf{N}(s)$ le vecteur unitaire directement orthogonal au vecteur tangent $\mathbf{T}(s)$. Le repère $(\mathbf{M}(s), \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s))$ est orthonormé direct, et est appelé repère de Frenet de l'arc au point $\mathbf{M}(s)$.



Repère de Frenet (dans l'espace) Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un arc de l'espace euclidien orienté, de classe $\mathcal{C}^2$, paramétré par une abscisse curviligne. On note $\mathbf{T}(s) = d\mathbf{M}/ds$ le vecteur tangent (qui est unitaire), et on pose

$$\mathbf{N}(s) = \mathbf{R}(s) \frac{d\mathbf{T}}{ds}(s)$$

en notant $\mathbf{R}(s)$ le *rayon de courbure ; ce vecteur est appelé *vecteur normal principal* à γ en $\mathbf{M}(s)$, il est unitaire et orthogonal à $\mathbf{T}$. Enfin, on définit le *vecteur binormal*

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s).$$

Le repère $(\mathbf{M}(s), \mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s))$ est orthonormé direct, et est appelé repère de Frenet de l'arc au point $\mathbf{M}(s)$.

FRONTIÈRE

Soit A une partie de E . Un point $x \in E$ est dit frontière à A s'il est adhérent à la fois à A et à $\complement_E A$. On note alors $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Exemples : Dans $\mathbb{R}$, la frontière de $[0; 1[$ est $\{0, 1\}$. $\spadesuit$ La frontière de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$ tout entier.

$\approx$ BORD.

FUBINI Guido (1879-1943)
(Mathématicien italien)

Formules de Fubini pour les intégrales Si A est un *compact élémentaire du plan et si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue, alors l'intégrale double sur A se calcule en intégrant successivement par rapport à chaque variable. Si A est de la forme

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; a \leq x \leq b \text{ et } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \right\}$$

où φ et ψ sont continues sur $[a; b]$ et à valeurs réelles, alors

$$\iint_A f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

$\spadesuit$ Soit $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable. Si, pour tout $x \in I$, la fonction $f(x, \cdot)$ est intégrable sur I' et si l'application

$$x \mapsto \int_{I'} f(x, y) dy$$

est continue par morceaux et intégrable sur I , alors f est intégrable sur $I \times I'$, et de plus

$$\iint_{I \times I'} f = \int_I \left(\int_{I'} f(x, y) dy \right) dx.$$

La même propriété a lieu en échangeant les rôles de x et de y .

Formule de Fubini pour les séries On suppose que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_j a_{ij}$ converge absolument, et on pose $S_i = \sum_j |a_{ij}|$. Si la série positive $\sum S_i$ converge, alors la série double $\sum_{i,j} a_{ij}$ converge et sa somme vaut

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{k, n-k}.$$

$\spadesuit$ Plus généralement, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$, alors

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{(i,j) \in A_n} a_{ij} \right).$$

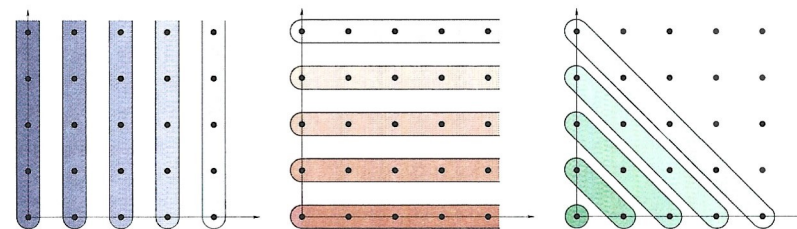


Fig. 40 — Trois méthodes équivalentes de sommation lorsque la série double converge absolument.