G

GAMMA (γ, Γ)

Constante γ d'Euler ☞ Euler.

Fonction Γ d'Euler Application définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par

$$\forall x > 0 \qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et vérifie, pour tout $x > 0$, la relation $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. ✦ Notamment, $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(n+1) = n!$.

Remarque : La fonction Γ possède de nombreuses autres propriétés, et est liée de plus à la fonction ζ de Riemann. Citons ce grand classique (formule due à Gauss) :

$$\forall x > 0 \qquad \Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x\,n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

✦ De cette formule, on déduit une seconde expression de Γ, due à Weierstrass :

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x/n}}{1+x/n},$$

où γ est la constante d'Euler.

☞ Compléments, Euler, Zeta.

Loi Γ ☞ Loi.

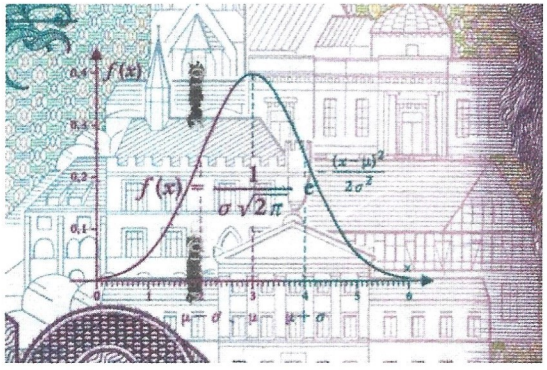
GAUSS *Karl Friedrich* (1777–1855)

(Mathématicien allemand)

Anneau des entiers de Gauss Anneau $\mathbb{Z}[i]$ des complexes de la forme $a + ib$, pour $a, b \in \mathbb{Z}$.

Courbe de Gauss Courbe d'équation cartésienne $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$. ✦ On l'appelle également *courbe en cloche*. La fonction correspondante est d'une importance capitale dans la théorie des probabilités et des statistiques.

Remarque : On pouvait jadis acquérir, à peu près n'importe où en Allemagne et pour la modique somme de 10 Deutsche Mark, de petits portraits de Gauss, très populaires dans tout le pays ; ils exhibaient de plus une jolie représentation de la courbe en cloche, visible sur le détail ci-dessous :



☞ Loi normale, Théorème *central limite.

Intégrale de Gauss Intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Elle est convergente et de valeur $\sqrt{\pi}/2$. ✦ Sous une autre forme, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x = 1$, ou encore $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 1$.

☞ Fonction d'*erreur, Loi normale.

Loi de Gauss, ou loi gaussienne Synonyme de : loi normale. ☞ Loi normale.

Pivot de Gauss ☞ Pivot, Rang.

Théorème de Gauss Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si a et b sont premiers entre eux et si a divise bc, alors a divise c. ✦ Soient $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R} \in \mathbb{Z}$. Si P et Q sont premiers entre eux et si P divise QR, alors P divise R.

Théorème de Gauss en théorie des champs Soit $\mathbf{V} : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs défini sur une partie U de $\mathbb{R}^3$, vérifiant l'équation $\operatorname{div}\mathbf{V} = \rho$, où $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux (densité de charge). Alors, si $\mathscr{V}$ est une partie de $\mathbb{R}^3$ délimitée par une surface fermée $\mathscr{S}$ régulière, orientée positivement vers l'extérieur, le flux de $\mathbf{V}$ à travers $\mathscr{S}$ est égal à la charge totale contenue dans $\mathscr{V}$:

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\mathscr{V}} \rho.$$

Exemple : Le champ électrique suit la *loi de Maxwell-Gauss* $\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ où ρ est la densité volumique de charge et ε_0 la permittivité du vide, et le théorème de Gauss stipule que le flux du champ électrique est égal à la charge totale contenue dans le volume $\mathscr{V}$, divisé par ε_0 :

$$\oiint_{\mathscr{S}} \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{\mathrm{Q}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\mathscr{V}} \rho.$$

✦ Le champ gravitationnel $\boldsymbol{g}$ vérifie $\operatorname{div}\boldsymbol{g} = 4\pi\mathrm{G}\,\rho_\mathrm{m}$, où ρ_m est la densité de masse et G la constante de Newton. Alors

$$\oiint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{g}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi\mathrm{G}\,\mathrm{M},$$

où M est la masse totale incluse dans le volume $\mathscr{V}$. Notamment, le champ gravitationnel créé par une distribution à symétrie sphérique de matière est égal, à l'extérieur de cette sphère, à celui créé par une distribution ponctuelle de même masse, située au centre de la sphère.

Théorème de d'Alembert-Gauss ☞ d'*Alembert.

Théorème des moindres carrés de Gauss ☞ Moindres carrés.

GÉNÉRATEUR

Générateur positif d'un idéal I de $\mathbb{Z}$ Unique entier $a \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{I} = a\mathbb{Z}$.

☞ Idéal, PGCD, PPCM.

Générateur normalisé d'un idéal I de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ Unique polynôme P unitaire ou nul tel que $\mathrm{I} = \mathrm{P}\,\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

☞ Idéal, PGCD, PPCM.

GÉNÉRATRICE

Génératrices d'une surface réglée $\mathscr{S}$ Famille de droites dont la réunion est la surface $\mathscr{S}$.

Exemple : Un hyperboloïde à une nappe admet deux familles génératrices de droites.

☞ Hyperboloïde, Réglée.

Famille génératrice finie Soit E un espace vectoriel. Une famille finie $e_1, \dots, e_n$ de vecteurs de E est dite génératrice si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_n$:

$$\forall x \in \mathrm{E} \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, e_k.$$

Remarque : Si $\dim \mathrm{E} = n$, alors toute famille génératrice possède au moins n vecteurs.

Famille génératrice infinie Soient E un espace vectoriel et $\mathscr{E} = (e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{E}$ est génératrice, ou que $\mathscr{E}$ *engendre* E, si $\mathrm{Vect}(\mathscr{E}) = \mathrm{E}$, ce qui signifie : pour tout $x \in \mathrm{E}$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, des indices $(i_1, \dots, i_n) \in \mathrm{I}^n$ et des scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, e_{i_k}.$$

Remarque : L'entier n dépend de x, et peut donc être arbitrairement grand ; le point important est que, pour chaque choix de x, on trouve une combinaison linéaire *finie* d'éléments de $\mathscr{E}$ égale à x.

☞ Combinaison linéaire, Sous-espace vectoriel engendré.

Fonction génératrice Soit X une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit alors la fonction génératrice de X comme la fonction $\mathrm{G_X}$ qui à t associe l'espérance de t^{X}. ✦ Cette fonction s'écrit sous la forme d'une série entière, en notant $p_n = \mathbf{P}[\mathrm{X} = n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{G}(t) = \mathbf{E}(t^{\mathrm{X}}) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \, t^n.$$

Remarque : G est définie sur $[-1\,;+1]$ au moins, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;+1[$ au moins, et $\mathrm{G}(1) = 1$. ✦ Si X admet une espérance, alors G est dérivable en 1 et $\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}'(1)$. ✦ Si X admet une variance, alors G est deux fois dérivable en 1 et $\mathbf{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}''(1) + \mathrm{G}'(1) - \mathrm{G}'(1)^2$. ✦ Enfin, si X et Y sont indépendantes, la fonction génératrice de $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ est égale au produit des fonctions génératrices de X et de Y : $\mathrm{G_{X+Y}} = \mathrm{G_X}\,\mathrm{G_Y}$.

Partie génératrice d'un sous-espace vectoriel Ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de cette partie. (Rappelons qu'une combinaison linéaire est, par nature, une somme finie.)

Partie génératrice d'un groupe On dit que X est une partie génératrice d'un groupe G si le *sous-groupe engendré par X est G tout entier : $\mathrm{gr}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}$. ✦ En d'autres termes, X est une partie génératrice de G s'il n'existe pas de sous-groupe strict de G contenant X.

GÉOMÉTRIE

La *géométrie classique* est l'une des plus anciennes branches des mathématiques, et a été notamment développée dans l'Antiquité grecque. Ses objets d'étude sont les droites, les plans, les coniques, etc. ; ainsi que leurs intersections et leurs relations entre eux. Si *Euclide a posé des fondements axiomatiques à cette branche des mathématiques, mettant ainsi en lumière l'importance des *axiomes, de nouvelles géométries, dites *non-euclidiennes* sont apparues au XIX^e siècle, lorsque l'on a tenté de remplacer le cinquième axiome d'Euclide (*par un point donné, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée*) par un autre énoncé (*il ne passe aucune droite*, ou *il passe une infinité de droites*). La géométrie a pris un tour nouveau à la fin du XIX^e siècle, lorsque Felix Klein (notamment) ramena de nombreuses considérations géométriques à des problèmes d'étude d'invariants de groupes de transformations. Enfin, signalons que Hilbert a repris à zéro le fondement axiomatique de la géométrie classique, afin de le rendre conforme aux nouveaux standards de rigueur.

La *géométrie analytique* a essentiellement les mêmes objets d'étude que la géométrie classique, mais les outils de base sont des équations, rendues possibles par l'introduction de repères affines et de coordonnées cartésiennes. Elle s'enrichit également de méthodes venant de l'algèbre linéaire (l'intersection de variétés affines est étudiée par la résolution d'un système linéaire, dont le rang conditionne la dimension de cette intersection...) et bilinéaire, de la théorie des polynômes et de la réduction des endomorphismes (coniques, quadriques), de l'arithmétique et de la théorie des groupes.

La *géométrie différentielle* s'intéresse à une classe plus large d'objets, décrits par des fonctions différentiables (au lieu de fonctions polynomiales par exemple). Ses outils sont évidemment le calcul différentiel et intégral, mais également la topologie et la théorie des équations différentielles. Elle a permis l'émergence de théories physiques comme la Relativité Générale, et enrichi divers domaines de l'analyse ou de l'algèbre. Loin d'être une discipline archaïque et fermée, c'est au contraire un domaine d'études encore riche et fécond ; témoins les travaux récents de Grigory Perelman sur la conjecture de Poincaré.

Signalons enfin que des objets non différentiables sont étudiés depuis un siècle environ, dans le cadre de la *géométrie fractale*.

☞ Riemann, Lobatchevski, Mandelbrot.

GÉOMÉTRIQUE

Moyenne géométrique Si a et b sont des réels strictement positifs, leur moyenne géométrique est $\sqrt{ab}$.

Loi géométrique, variable aléatoire géométrique ☞ Loi.

Suite géométrique Suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la propriété : il existe un nombre α tel que $u_{n+1} = \alpha\, u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le nombre α est la *raison* de la suite, dont le terme général s'écrit $u_n = \alpha^n\, u_0$.

Remarques : Par extension, une suite $(\mathrm{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans un anneau est dite géométrique s'il existe un élément A de l'anneau tel que $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A}\,\mathrm{U}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n\,\mathrm{U}_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ✦ Il convient de bien prendre en compte le fait que tous les anneaux ne sont pas commutatifs : si la relation est $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{U}_n\,\mathrm{A}$, alors $\mathrm{U}_n = \mathrm{U}_0\,\mathrm{A}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Série géométrique Série numérique de la forme $\sum c\,\alpha^n$, où α est la *raison* de la série. Une telle série converge si et seulement si $|\alpha| < 1$.

Remarque : Par extension, on peut étudier les séries géométriques à valeurs dans une *algèbre normée de dimension finie (ou du moins une algèbre normée complète) ; si $\|a\| < 1$, alors la série $\sum a^n$ converge et a pour somme $(e-a)^{-1}$, où e est l'unité de l'algèbre normée. En particulier, $e - a$ est inversible.

GERSHGORIN *Semion Aronovitch* (1901–1933)

(Mathématicien soviétique (biélorusse))

Disques de Gershgorin Soit $\mathrm{A} = (a_{ij})_{i,j} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on note $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ et $\mathscr{D}_i$ le disque de $\mathbb{C}$ de centre a_{ii} et de rayon r_i : $\mathscr{D}_i = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z - a_{ii}| \leqslant r_i\}$. Alors toute valeur propre de A appartient à l'un au moins des disques $\mathscr{D}_1, \dots, \mathscr{D}_n$:

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathscr{D}_k.$$

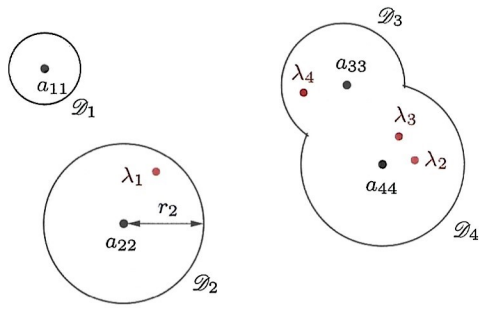


Fig. 41 — Le spectre d'une matrice et la réunion de ses disques de Gershgorin. Sur cette figure, $n = 4$. Chaque disque ne contient pas nécessairement une valeur propre.

GIBBS *Josiah Willard* (1839–1903)

(Physicien et chimiste américain)

Soit f une fonction 2π-périodique, continue par morceaux, et soit a un réel en lequel f admet une *discontinuité de première espèce. Notons $\ell = f(x^+) - f(x^-)$ le saut de discontinuité de f en a. Alors, la suite des sommes partielles de Fourier de f ne converge pas uniformément au voisinage de a : un écart irréductible apparaît au voisinage de a, d'environ 8 % du saut de discontinuité ℓ. ✦ Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, le phénomène de Gibbs apparaît toujours en chaque point de discontinuité, mais la convergence vers f est uniforme sur tout segment ne contenant aucun de ces points de discontinuité ; en effet, la zone où apparaît le phénomène de Gibbs se rétrécit en largeur quand le nombre de termes sommés augmente.

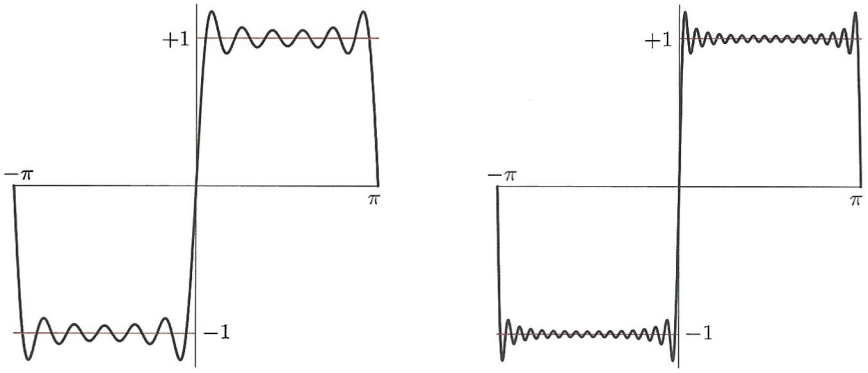


Fig. 42 — Les sommes partielles de Fourier d'ordre 11 et 31 de la fonction créneau (en rouge).

Remarque : À cause de ce phénomène, les approximations numériques d'une fonction par sa série de Fourier sont mauvaises. On peut circonvenir ce problème en considérant les moyennes de Cesàro des sommes partielles de Fourier : $\mathrm{F}_n = (\mathrm{S}_0 + \mathrm{S}_1 + \cdots + \mathrm{S}_n)/(n+1)$, appelées *sommes de Fejér*, qui évitent ce phénomène désastreux.

GRADIENT

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Son gradient en $a \in \Omega$, noté $\nabla f(a)$ ou $\mathbf{grad}\, f(a)$, est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\mathbf{grad}\, f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

✦ C'est l'unique vecteur tel que

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}).\boldsymbol{h} = \mathrm{D}_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{a}) = \big\langle \mathbf{grad}\, f(\boldsymbol{a}) \big| \boldsymbol{h} \big\rangle.$$

☞ Différentielle.

GRAM *Jorgen Pedersen* (1850–1916)

(Mathématicien danois)

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt Soit E un espace vectoriel préhilbertien et $(b_1, \ldots, b_n)$ est une famille libre de vecteurs, on peut construire une famille orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que $e_k \in \mathrm{Vect}(b_1, \ldots, b_k)$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, et donc $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(b_1, \ldots, b_k)$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$. ✦ Ce procédé s'étend aux familles infinies et permet de construire des familles orthonormées. Si la famille de départ est une base de E, alors le procédé garantit que la famille orthonormée est encore une base de E.

Remarques : Le procédé d'orthogonalisation (sans normalisation) consiste à projeter b_k sur l'orthogonal, dans $\mathrm{Vect}(b_1, \ldots, b_k)$, de $\mathrm{Vect}(b_1, \ldots, b_{k-1})$ et de nommer le résultat u_k. La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est alors orthogonale par construction, et vérifie $\|u_k\| \leqslant \|b_k\|$ puisqu'elle est obtenue par projection orthogonale. Il ne reste ensuite qu'à normaliser la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ pour obtenir la base $(e_1, \ldots, e_n)$. ✦ Le procédé, on l'a dit, transforme une base (au sens algébrique : famille libre et génératrice) en une base. Dans le cas d'un espace de Hilbert, le procédé d'orthonormalisation, appliqué à une famille dénombrable *totale (pour peu qu'une telle famille existe), permet d'obtenir une base hilbertienne.

Matrice de Gram Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. La matrice de Gram de $(x_1, \ldots, x_p)$ est la matrice carrée d'ordre p de coefficients $m_{ij} = \langle x_i | x_j \rangle$:

$$\mathrm{G}(x_1, \ldots, x_p) = \begin{pmatrix} \langle x_1|x_1\rangle & \langle x_1|x_2\rangle & \cdots & \langle x_1|x_p\rangle \\ \langle x_2|x_1\rangle & \langle x_2|x_2\rangle & \cdots & \langle x_2|x_p\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_p|x_1\rangle & \langle x_p|x_2\rangle & \cdots & \langle x_p|x_p\rangle \end{pmatrix}$$

✦ C'est une matrice symétrique positive ; elle est inversible (et donc définie positive) si et seulement si la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre. ✦ Son rang est égal au rang de la famille $(x_1, \ldots, x_p)$.

GRAND

Plus grand élément Soit $(\mathrm{A}, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Un élément $m \in \mathrm{A}$ est appelé *plus grand élément* de A, s'il est supérieur à tous les éléments de A :

$$\forall a \in \mathrm{A} \qquad a \leqslant m.$$

✦ Un tel élément, s'il existe, est unique ; on le note $m = \max \mathrm{A}$.

Remarques : Le plus petit élément de A, s'il existe, est nécessairement un élément de A. ✦ Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément. ✦ Toute partie finie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

☞ Atteindre, Borne supérieure, Petit, Weierstrass (theorème sur les compacts).

Loi faible des grands nombres Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires *indépendantes*, de même moyenne m et de même variance σ^2. Alors la suite des moyennes successives, de terme général

$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n},$$

converge en probabilité vers la variable aléatoire constante égale à m, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big[|Y_n - m| \geqslant \varepsilon\big] = 0.$$

Remarque : Cette version de la loi faible des grands nombres se démontre aisément grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Il existe une autre version, due à Alexandre Khintchine, n'imposant pas que les variables aléatoires admettent une variance, mais requérant en revanche qu'elles suivent toutes la même loi, la conclusion étant la même. ✦ On peut l'illustrer par une simulation numérique. Considérons deux variables aléatoires X et X′, pouvant prendre chacune les valeurs entières 1, 2, 3,... On suppose qu'elles suivent les lois définies respectivement par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbf{P}[X = k] = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}[X' = k] = \frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4}.$$

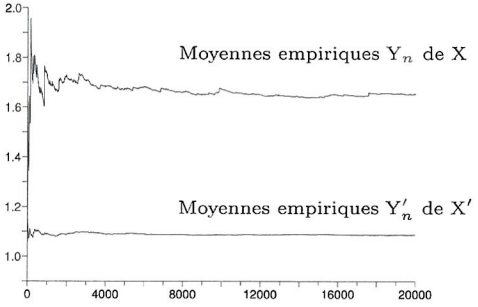
La variable X admet une espérance, valant

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbf{P}[X = k] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,64,$$

mais n'admet pas de variance. La variable X′ admet à la fois une espérance et une variance, et son espérance est

$$\mathbf{E}(X') = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbf{P}[Y = k] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \approx 1,08.$$

Une simulation informatique permet de représenter une réalisation de la suite des *moyennes empiriques pour chacune des deux variables. Dans les deux cas, on observe une convergence assez nette vers la valeur numérique de l'espérance, comme on pouvait s'y attendre. Cependant, la convergence de la suite des moyennes empiriques de X′ est plus « rapide » que celle de X, grâce à l'existence du moment d'ordre 2 de X′.



Des simulations avec d'autres lois permettraient de mettre en évidence des vitesses de convergence différentes. Il apparaît que la loi des grands nombres a une utilité essentiellement « théorique » : elle ne permet pas de quantifier la convergence, ni de donner de valeur de n pour laquelle la moyenne Y_n observée donnerait une valeur acceptable de $\mathbf{E}(X)$ — tout au plus peut-on utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, qui ne tient compte que de la variance de X et pas de sa loi. Le théorème *central limite permet d'aller plus loin en donnant une approximation de la loi de Y_n.

Loi forte des grands nombres Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et admettant une espérance m. Alors la suite des moyennes successives, de terme général $Y_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$, converge presque sûrement vers la variable aléatoire constante égale à m, c'est-à-dire que $\mathbf{P}\Big[\lim_{n\to\infty} Y_n = m\Big] = 1$.

Remarque : L'interprétation de la loi forte est plus claire que celle de la loi faible : sauf coup de malchance absolue (cela arrive, mais avec une probabilité nulle), la suite des moyennes observées successives converge effectivement vers m. En d'autres termes, les événements ω tels que la suite des moyennes $\big(Y_n(\omega)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers m, forment une partie négligeable de Ω. ✦ Ce résultat est à la base des méthodes générales de simulation de type « Monte-Carlo ».

Grand « O » ☞ Domination.

GRAPHE

Graphe d'une application $f : A \to B$ Ensemble des couples $\big(a, f(a)\big)$, pour a parcourant A.

Théorème du graphe fermé Une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ entre deux espaces de Banach E et F est continue si et seulement si son graphe est un fermé de $E \times F$ muni de la norme produit.

GRASSMANN *Hermann Günther* (1809–1877)

(Mathématicien allemand)

Formule de Grassmann Soient V et W deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Alors $V + W$ est de dimension finie et

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W).$$

GREEN *George* (1793–1841)

(Physicien anglais)

Formule de Green-Riemann Soit $\omega = P\,dx + Q\,dy$ une forme différentielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et A un compact de U, dont le bord ∂A est un arc régulier fermé γ parcouru dans le sens direct. Alors

$$\int_{\partial A} P\,dx + Q\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Exemple : On se sert de la formule de Green-Riemann pour calculer l'aire d'un domaine de $\mathbb{R}^2$. En effet, si $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine délimité par un arc γ, son aire est $\mathscr{A}(\Delta) = \int_\Delta dx\,dy$. Posons maintenant $\omega = x\,dy$ (c'est-à-dire que l'on prend $P = 0$ et $Q(x, y) = x$). Alors $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ et

$$\mathscr{A}(\Delta) = \iint_\Delta dx\,dy = \iint_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial\Delta} x\,dy.$$

✦ Par symétrie, et en notant que la transformation du plan $(x, y) \mapsto (y, x)$ inverse l'orientation, on en déduit les formules

$$\mathscr{A}(\Delta) = -\int_{\partial\Delta} y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Delta} x\,dy - y\,dx.$$

☞ Aire, Kepler.

GRÖNWALL *Thomas Hakon* (1877–1932)

(Mathématicien suédois, qui a anglicisé son nom en Gronwall)

Lemme de Gronwall Lemme permettant de majorer la distance entre deux solutions d'une équation différentielle et, ainsi, de montrer l'unicité d'une telle solution pour une condition initiale donnée. Sous forme intégrale, le lemme de Grönwall (reformulé par Richard Bellmann) s'énonce ainsi.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in \mathrm{I}$ et $k \geqslant 0$. On suppose que les applications continues $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^+$ vérifient

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad f(t) \leqslant k + \left| \int_{t_0}^{t} g(s)\, f(s)\, \mathrm{d}s \right|$$

Alors

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad f(t) \leqslant k \exp \left| \int_{t_0}^{t} g(s)\, \mathrm{d}s \right|.$$

REMARQUE : Soient u et v deux solutions de l'équation différentielle linéaire

$$y' = a \cdot y + b,$$

où $a \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que ces solutions vérifient les conditions initiales $u(t_0) = u_0$ et $v(t_0) = v_0$. Alors, en notant $f(t) = \|u(t) - v(t)\|$, on obtient une majoration de la distance de u à v au cours du temps :

$$\forall t \in \mathrm{I} \qquad \big\|u(t) - v(t)\big\| \leqslant \|u_0 - v_0\| \cdot \exp \left| \int_{t_0}^{t} |||a(s)|||\, \mathrm{d}s \right|,$$

où $|||\cdot|||$ désigne la norme *subordonnée.

GROUPE

Un *groupe multiplicatif* est un couple $(\mathrm{G}, \cdot)$ où G est un ensemble et « $\cdot$ » une *loi de composition interne associative, admettant un élément neutre e ($e \cdot g = g \cdot e = g$ pour tout $g \in \mathrm{G}$) et pour laquelle tout élément de G est symétrisable :

$$\forall g \in \mathrm{G} \quad \exists h \in \mathrm{G} \qquad g \cdot h = h \cdot g = e.$$

On note g^{-1} le symétrisé d'un élément $g \in \mathrm{G}$ dans un groupe multiplicatif que l'on appelle *inverse* de g. ✦ Un *groupe additif* est un groupe dont la loi interne est notée « $+$ ». Il est alors sous-entendu que cette loi est commutative ; son élément neutre est noté 0_{G} (ou 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté) et le symétrisé d'un élément g est noté $-g$ et appelé *opposé* de g.

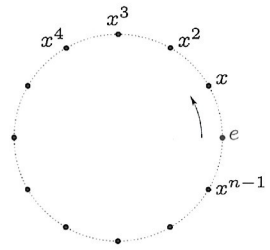
Exemples : L'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre n, muni de la multiplication des matrices, est un groupe multiplicatif, noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. ✦ Soit A un ensemble de points du plan. L'ensemble des symétries du plan qui laisse invariant A est un groupe.

Groupe abélien/commutatif Un groupe est dit *abélien* ou commutatif lorsque tous les éléments commutent entre eux : $g \cdot h = h \cdot g$ pour tous $g, h \in \mathrm{G}$.

Exemple : L'ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module unité, muni de la multiplication usuelle des complexes, est un groupe abélien.

Groupe alterné ☞ ALTERNÉ.

Groupe cyclique Groupe monogène et fini. ✦ Tout groupe cyclique est donc de la forme $\mathrm{G} = \{e, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$, en notant $n = |\mathrm{G}|$ et x un générateur de G. On le réprésente alors souvent sous la forme d'un cycle :



REMARQUE : Dans certains ouvrages, le terme cyclique est simplement synonyme de monogène, sans revêtir de caractère fini. Dans cette acception, le groupe $(\mathbb{Z}, +)$ est cyclique.

Exemple : Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique, d'ordre n. Il est engendré par toute classe $\overline{k}$ telle que k et n sont premiers entre eux ($k \wedge n = 1$).

Groupe fini Groupe de cardinal fini.

Exemple : Si n est un entier naturel non nul, le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est fini et de cardinal n.

Groupe des inversibles d'un anneau A Ensemble A^* des éléments inversibles de A, qui forme un groupe multiplicatif.

Exemple : Dans l'anneau $\mathrm{A} = \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, le groupe des inversibles est l'ensemble des polynômes constants non nuls, identifié à $\mathbb{K}^*$. ✦ Dans un corps, c'est l'ensemble des éléments non nuls (ce qui justifie la notation $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ par exemple). ✦ Dans l'anneau des entiers, on a $\mathbb{Z}^* = \{-1\ ;\ +1\}$. ✦ Dans l'anneau $\mathrm{A} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices (muni de l'addition et de la multiplication matricielles), A^* est le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles. ✦ Le groupe des inversibles est parfois noté $\mathrm{A}^\times$, afin de ne pas confondre avec $\mathrm{A} \setminus \{0\}$.

Groupe linéaire Le groupe des automorphismes d'un espace vectoriel E, muni de la loi de composition, est noté $\mathscr{GL}(\mathrm{E})$. ✦ Soit K un corps commutatif. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathrm{K})$ est appelé *groupe linéaire* et noté $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$. Il est donc isomorphe à $\mathscr{GL}(\mathbb{K}^n)$. Muni de la multiplication matricielle, c'est évidemment un groupe, non commutatif dès que $n \geqslant 2$. ✦ On peut définir le groupe linéaire des matrices à valeurs dans un anneau commutatif A.

Exemple : Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ des matrices carrées à coefficients entiers, et admettant un inverse à coefficients entiers, est constitué des matrices à coefficients entiers et de déterminant inversible dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire égal à -1 ou $+1$. Si M est une matrice de ce groupe, son inverse est $\mathrm{M}^{-1} = (1/\det \mathrm{M}) \cdot {}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}\,\mathrm{M}$ et est élément de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$.

Groupe monogène Un groupe G est dit monogène s'il est engendré par un singleton, c'est-à-dire s'il existe un élément $g \in \mathrm{G}$ tel que $\mathrm{G} = \mathrm{gr}(g)$.

REMARQUE : Si un groupe monogène est fini et de cardinal n, il est alors dit cyclique, et il est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. ✦ Sinon, $\mathrm{G} = \{g^n\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, l'application $\varphi : n \mapsto g^n$ étant un isomorphisme de groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ sur $(\mathrm{G}, \cdot)$.

Exemple : Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont tous monogènes et de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$. C'est une conséquence de l'existence de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

☞ SOUS-GROUPE ENGENDRÉ.

Groupe orthogonal ☞ ORTHOGONAL, SPÉCIAL ORTHOGONAL.

Groupe produit Soient $(\mathrm{G}, \cdot)$ et $(\mathrm{H}, \cdot)$ deux groupes. On définit une loi produit sur $\mathrm{G} \times \mathrm{H}$, en posant $(g, h) \cdot (g', h') = (g \cdot g', h \cdot h')$ pour tout $(g, h) \in \mathrm{G} \times \mathrm{H}$. ✦ Muni de cette loi, $\mathrm{G} \times \mathrm{H}$ est un groupe, appelé *groupe produit* de G et H.

Groupe de type fini Groupe engendré par un nombre fini de générateurs.

Exemple : Le groupe additif $\mathbb{Z}$ est de type fini, car $\mathbb{Z} = \mathrm{gr}(1)$. En revanche, $\mathbb{Z}$ n'est pas un groupe fini.

☞ GROUPE MONOGÈNE, SOUS-GROUPE ENGENDRÉ.

Groupe unitaire ☞ UNITAIRE, SPÉCIAL UNITAIRE.

Groupe unimodulaire ☞ UNIMODULAIRE.

Groupe symétrique ☞ SYMÉTRIQUE.