

H

HADAMARD *Jacques* (1865–1963)
(Mathématicien français)

Théorème d'Hadamard Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale dominante, c'est-à-dire telle que, pour tout $i \in [1; n]$, on ait $|m_{ii}| > \sum_{j \neq i} |m_{ij}|$. Alors, M est inversible.
♦ En conséquence, les éléments du spectre de M sont dans l'une des boules ouvertes de centre m_{ii} et de rayon $r_i = \sum_{j \neq i} |m_{ij}|$.

☞ GERSHGORIN.

HAMILTON *William Rowan* (1805–1865)
(Mathématicien, astronome et physicien irlandais)

Corps des quaternions de Hamilton Corps non commutatif, dont $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des sous-corps, engendré par 1, i , j et k , où $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ et i, j, k anti-commutent entre eux (par exemple, $ji = -ij = -k$). ♦ Ce corps permet d'étudier les compositions de rotations de $\mathbb{R}^3$. Il est également relié à ce que les physiciens appellent les matrices de Pauli, décrivant le spin d'un électron (ou de toute particule de spin 1/2).

Théorème de Cayley-Hamilton ☞ CAYLEY-HAMILTON.

HARMONIQUE

Fonction harmonique Fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et vérifiant l'équation de Laplace $\Delta f = 0$, où Δ est l'opérateur laplacien.

☞ LAPLACE (ÉQUATION DE —), LAPLACIEN.

Série harmonique Série $\sum 1/n$, notoirement divergente. ♦ La *série harmonique alternée* est la série $\sum (-1)^n/n$, convergente et de somme $-\ln(2)$.

☞ FONCTION η DE *DIRICHLET, CONSTANTE D'*EULER, ZETA.

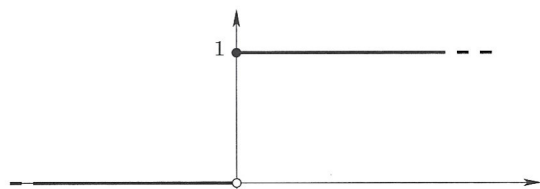
HAUTEUR

Hauteur issue de A d'un triangle (ABC) non plat Droite passant par A et orthogonale à la droite (BC). Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes ; leur point de concours est l'*orthocentre* du triangle.

☞ TRIANGLE.

HEAVISIDE *Oliver* (1850–1925)
(Physicien anglais)

Fonction de Heaviside Fonction $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $H(t) = 0$ si $t < 0$, et $H(t) = 1$ si $t \geq 0$. C'est la fonction *caractéristique de $\mathbb{R}^+$.



HEINE *Heinrich Eduard* (1821–1881)
(Mathématicien allemand)

Théorème de Heine Toute application continue sur un compact est uniformément continue.

HERMITE *Charles* (1822–1901)
(Mathématicien français)

Polynômes d'Hermite Famille de polynômes définie par

$$H_n = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}]$$

Ces polynômes sont orthogonaux deux à deux pour le produit scalaire

$$\langle P|Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t^2} dt.$$

et sont normalisés selon $\|H_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$.

☞ POLYNÔMES ORTHOGONAUX.

Polynômes interpolateurs d'Hermite Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts, $b_1, \dots, b_n$ et $d_1, \dots, d_n$ des réels quelconques. Alors, il existe un unique polynôme H de degré au plus égal à $2n - 1$ vérifiant

$$\forall k \in [1; n] \quad H(a_k) = b_k \quad \text{et} \quad H'(a_k) = d_k.$$

♦ Ce polynôme permet donc d'interpoler les valeurs d'une fonction connue en n points lorsque l'on connaît également la valeur de la dérivée de la fonction en ces points. C'est une généralisation de la méthode d'interpolation de Lagrange. ♦ Cette méthode se généralise à des dérivations d'ordre supérieur, voire à des dérivations dont l'ordre dépend du point choisi.

☞ INTERPOLATION DE *LAGRANGE.

Théorème d'Hermite Le nombre e est transcendant.

HERMITIEN

Espace hermitien Espace vectoriel préhilbertien complexe de dimension finie.

Produit (scalaire) hermitien Synonyme de produit (scalaire) sesquilinéaire sur un espace préhilbertien complexe. C'est donc une forme sesquilinéaire, à symétrie hermitienne, définie positive.

☞ PRODUIT SCALAIRE.

Symétrie hermitienne Soit E un espace vectoriel complexe. Une forme sesquilinéaire $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est à symétrie hermitienne si $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$ pour tous $x, y \in E$.

HESSE *Rudolf Otto* (1811–1874)
(Mathématicien allemand)

HESSIENNE

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de n variables, à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. La matrice hessienne de f en un point $a = (a_1, \dots, a_n)$ de Ω

est la matrice de coefficient général $m_{ij} = D_i D_j f(a)$:

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

D'après le théorème de Schwarz, cette matrice est symétrique.

☞ EXTREMUM LOCAL, MONGE, TAYLOR.

HEURISTIQUE

(Adj.) Qui sert à découvrir.

Exemple : Avant de tenter de calculer rigoureusement la limite, lorsque n tend vers l'infini, de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(e^{t/n}+1)} dt,$$

on peut tenter un argument heuristique : si l'on fait « brutalement » $n = +\infty$, on obtient l'intégrale divergente

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2(t+1)} dt = +\infty.$$

Bien évidemment, cet argument n'est *en aucun cas* une preuve, mais un indice de ce que l'on peut tenter de prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = +\infty$. Il nous permet de découvrir quel est, *probablement*, le résultat ; il reste maintenant à le démontrer rigoureusement, ce qui est évidemment plus difficile.

REMARQUE : Ce mot a la même étymologie (grecque) que le célèbre « *Eurêka* » d'Archimède.

HILBERT David (1862–1943)

(Mathématicien allemand)

Espace de Hilbert Espace préhilbertien complet.

REMARQUE : Les espaces de Hilbert généralisent les espaces euclidiens ou hermitiens en dimension infinie. Le fait qu'ils soit complets leur procure des propriétés « proches » de celles de la dimension finie : existence d'un supplémentaire orthogonal, calcul dans les bases orthogonales, etc. (☞ BASES *HILBERTIENNES.) ♦ Ils ont également de nombreuses applications en physique théorique (ils forment le cadre naturel de la mathématisation de la mécanique quantique, par exemple).

☞ BASE *HILBERTIENNE, ℓ^2 , PARSEVAL.

Théorème de Hilbert-Dirac Sous cette dénomination (peu fréquente) se cache un théorème d'une grande simplicité, mais d'une importance capitale. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, u un endomorphisme de E et P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

- i) Si λ est une valeur propre de u et x un vecteur propre associé, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$ et $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
- ii) Si P est un polynôme annulateur de u , alors toute valeur propre de u est racine de P .

Problèmes de Hilbert En 1900, David HILBERT énonça une liste de 23 problèmes ouverts, qui lui semblaient importants. En un peu plus d'un siècle, la plupart ont été résolus. On a découvert que certains étaient *indécidables* (c'est-à-dire ni prouvables,

ni réfutables dans l'axiomatique usuelle) ☞ ALEPH. Les autres sont encore ouverts.

☞ ZETA.

HILBERTIEN

Base hilbertienne Soit E un espace de Hilbert (espace préhilbertien complet). Une base hilbertienne est une famille orthonormée $(e_i)_{i \in I}$ totale, c'est-à-dire telle que $F = \text{Vect}\{(e_i)_{i \in I}\}$ est dense dans E . Elle est caractérisée par la propriété $F^\perp = \{0\}$. ♦ Si une famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dénombrable (on peut alors l'indexer par $\mathbb{N}$), c'est une base hilbertienne si et seulement si elle vérifie l'égalité de Parseval :

$$\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_n | x \rangle|^2.$$

REMARQUES : Toutes les bases hilbertiennes de E sont équipotentes. Notamment, si E admet une base hilbertienne dénombrable, toutes les bases hilbertiennes de E sont dénombrables. L'espace E est alors dit *séparable*. ♦ Si E est muni d'une base hilbertienne dénombrable $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors un certain nombre de calculs se font comme en dimension finie (☞ BASE *ORTHONORMÉE). Ainsi, pour tous $x, y \in E$:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n | x \rangle e_n \quad \langle x | y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x | e_n \rangle \langle e_n | y \rangle$$

Par analogie, les coefficients $c_n = \langle e_n | x \rangle$ sont appelés *coefficients de Fourier* de x dans la base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemples : L'espace $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de carré sommable, muni du produit scalaire hermitien

$$\langle a | b \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} b_n$$

est un espace de Hilbert, dont une base hilbertienne dénombrable est la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $e_n = (e_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite de terme général $e_n^k = \delta_{k,n}$.

HOLOMORPHE

Se dit d'une fonction définie sur une partie Ω ouverte de $\mathbb{C}$ et à valeurs complexes, qui est dérivable au sens complexe en tout point de Ω , ce qui veut dire que la limite suivante existe, en tout $z \in \Omega$:

$$f'(z) \stackrel{\text{déf.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

REMARQUE : Il est possible de montrer (mais c'est assez long) qu'une telle fonction est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$, et développable en série entière au voisinage de chaque point de Ω .

HOMÉOMORPHISME

Bijection $\varphi : A \rightarrow B$ bicontinue entre deux parties de deux espaces vectoriels normés.

☞ DIFFÉOMORPHISME.

HOMOGÈNE

Équation différentielle linéaire homogène Équation linéaire « sans second membre », c'est-à-dire de la forme $x' = a \cdot x$. ♦ Toute équation résolue d'ordre supérieur à 1 peut se ramener à une équation de degré 1, et donc de cette forme.

Fonction homogène de degré α Fonction définie sur un espace vectoriel (généralement $\mathbb{R}^n$) telle que, pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in E$, on ait $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$.

Exemple : Sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la fonction déterminant est homogène de degré n .

☞ RELATION D'EULER.

Homogénéité de la norme Une norme N sur un espace vectoriel vérifie la propriété, appelée homogénéité :

$$\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x).$$

Polynôme homogène de degré k Polynôme dont tous les termes sont de degré total égal à k .

Exemple : Le polynôme $P(X, Y, Z) = 4XYZ^2 + 3X^2Y^2 - X^3Z$ est homogène de degré 4.

Système linéaire homogène Système linéaire de la forme $f(x) = 0$, où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une application linéaire. Il s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n = 0. \end{cases}$$

☞ SYSTÈME LINÉAIRE.

HOMOGRAPHIE

Homographie du plan Identifions le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ avec le plan complexe. Une homographie est une transformation du plan de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$.

Fonction homographique Fonction de la variable réelle de la forme $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$. Si $ad-bc \neq 0$ et $c \neq 0$, elle établit une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a/c\}$.

HOMOMORPHISME

Synonyme de morphisme.

HOMOTHÉTIE

Homothétie vectorielle Soit E un espace vectoriel ; une homothétie de E est un multiple de l'identité de E , c'est-à-dire un endomorphisme de la forme $u = \lambda \text{Id}_E$. Le scalaire λ est appelé *rapport* de l'homothétie.

REMARQUES : Les homothéties commutent avec tous les endomorphismes. Réciproquement, le centre de $\mathcal{L}(E)$ est la droite $\text{Vect}(\text{Id}_E)$ de toutes les homothéties. ♦ Si E est de dimension finie, la matrice représentative d'une homothétie dans une base quelconque est un multiple de la matrice identité.

Homothétie affine Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E . L'homothétie de rapport λ et de centre $M \in \mathcal{E}$ est l'application affine laissant M invariant, et dont la partie linéaire est λId_E .

HUYGENS *Christian* (1629–1695)

(Astronome, physicien et mathématicien néerlandais)

Théorème de König-Huygens ☞ KÖNIG.

HYPERBOLE

Conique à centre, dont l'équation cartésienne par rapport à un repère orthonormé porté par ses deux axes de symétrie est de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La distance entre ses deux sommets est $2a$. Elle admet deux asymptotes d'équation $y = \pm \frac{b}{a}x$. ♦ Une hyperbole peut être définie par ses deux foyers F et F' et un paramètre $a > 0$, comme l'ensemble des points M du plan vérifiant $|MF - MF'| = 2a$ (définition *bifocale* ☞ BIFOCAL).

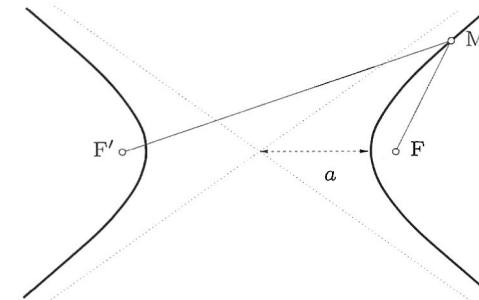


Fig. 43 — Définition bifocale de l'hyperbole : $|MF - MF'| = 2a$.

♦ Elle admet une équation polaire, dans un repère centré sur un de ses foyers F et orienté à partir de l'axe FF' , de la forme

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

où e est l'excentricité ($e > 1$ pour une hyperbole) et $p = a(e^2 - 1)$ est appelé le *paramètre* de l'hyperbole (☞ POLAIRE). ♦ On peut également définir une hyperbole à partir d'une droite $\mathcal{D}$ fixe, appelée *directrice*, et d'un foyer F , comme le lieu des points dont le rapport MF/MH est constant, cette constante e étant strictement supérieure à 1.

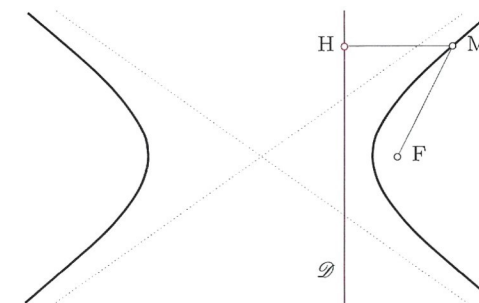


Fig. 44 — Définition de l'hyperbole par une directrice et un foyer : $MF/MH = e > 1$.

♦ On peut paramétrer les branches de l'hyperbole par les systèmes

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}$$

♦ Une hyperbole est obtenue par l'intersection d'un cône de révolution avec un plan faisant avec l'axe du cône un angle inférieur à son ouverture.

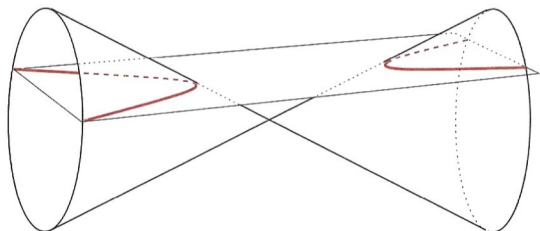


Fig. 45 — Intersection d'un cône de révolution et d'un plan : cas de l'hyperbole.

HYPERBOLIQUE

Fonctions hyperboliques Fonctions définies à partir de l'exponentielle : cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique et cotangente hyperbolique.

▣ ARG CH, ARG SH, ARG TH.

Nom	symbole	définition
cosinus hyperbolique	$\operatorname{ch} x$	$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
sinus hyperbolique	$\operatorname{sh} x$	$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
tangente hyperbolique	$\operatorname{th} x$	$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
cotangente hyperbolique	$\operatorname{coth} x$	$\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

TABLE 5 — Fonctions hyperboliques.

HYPERBOLOÏDE

Hyperboloïde à une ou deux nappes Quadrique à centre et à trois plans de symétrie (orthogonaux deux à deux), d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1.$$

♦ Si le second membre est égal +1, c'est un hyperboloïde à une nappe; s'il est égal à -1, c'est un hyperboloïde à deux nappes.

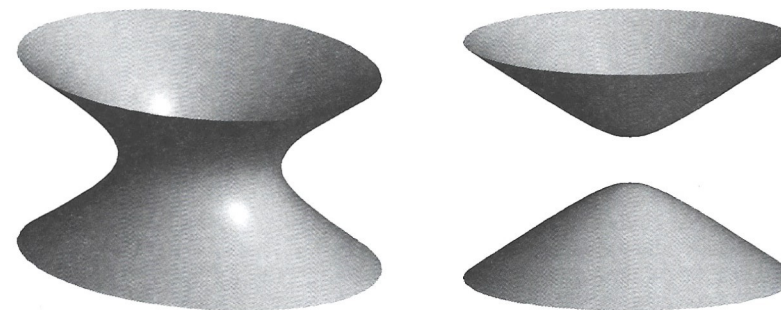
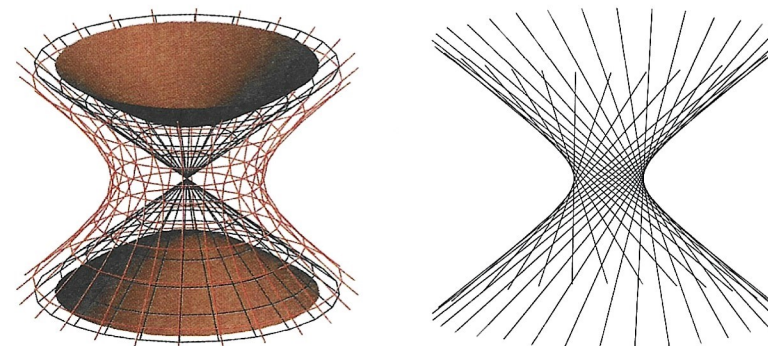


Fig. 46 — À gauche : hyperboloïde à une nappe. À droite : hyperboloïde à deux nappes.

REMARQUES : Si la constante du second membre est nulle, on obtient l'équation d'un cône. Dans la figure ci-dessous (à gauche), les deux hyperboloïdes et le cône obtenus en prenant respectivement la constante égale à -1, 0 et 1. ♦ Un hyperboloïde à une nappe est une surface réglée, engendrée par deux familles de droites. Ci-dessous (à droite), une des familles de droites en question. ▣ RÉGLÉE.



Hyperboloïde de révolution Hyperboloïde présentant une symétrie de révolution; dans un repère dont l'axe Oz est l'axe de symétrie, cette surface admet pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1.$$

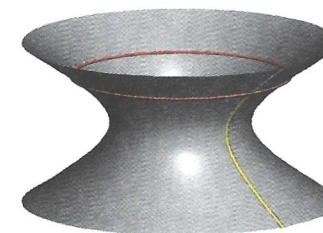


Fig. 47 — Hyperboloïde de révolution à une nappe. Une section horizontale (en rouge) est un cercle; une section verticale (en jaune) passant par l'axe, est une hyperbole.

HYPERGÉOMÉTRIQUE

☞ Loi.

HYPERPLAN

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de codimension 1. En d'autres termes, H est un hyperplan de E si et seulement s'il existe un sous-espace vectoriel D de E , de dimension 1, tel que $E = D \oplus H$. ♦ Tout hyperplan s'écrit comme le noyau d'une forme linéaire φ non nulle. ♦ Si H est un hyperplan de E et si $a \in E \setminus H$, alors $E = H \oplus \text{Vect}(a)$.

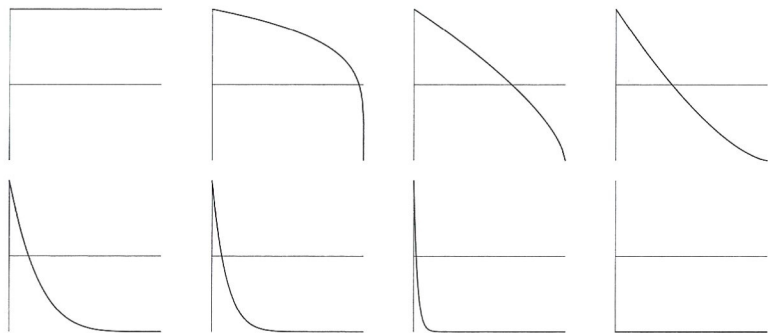
REMARQUES : Si $E = \mathbb{R}^3$, un hyperplan est un « plan » vectoriel au sens habituel. ♦ Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie n , un hyperplan est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$; on peut intuitivement continuer à y penser comme à un plan dans l'espace usuel : il est « tout plat » (notamment, c'est un fermé d'intérieur vide) et sépare l'espace en deux (c'est-à-dire que $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs). ♦ Si E est un espace vectoriel normé de dimension infinie, les choses se corsent : si certains hyperplans sont toujours des fermés, d'autres au contraire sont denses dans E — ce sont les noyaux de formes linéaires non continues (☞ THÉORÈME DE L'*HYPERPLAN FERMÉ). Plus étonnant, si H est dense dans E , alors $E \setminus H$ est toujours connexe par arcs !

Équation implicite d'un hyperplan Équation de la forme $\varphi(x) = 0$, où φ est une *forme linéaire telle que $\text{Ker } \varphi = H$. Une telle équation est unique à un facteur multiplicatif (non nul) près.

☞ FORME LINÉAIRE.

Théorème de l'hyperplan fermé Dans un espace vectoriel normé, un hyperplan d'équation $H = \text{Ker } \varphi$ est soit fermé (si la forme φ est continue), soit dense (si φ n'est pas continue).

Exemple : Notons E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0; 1]$, muni de la norme $N_1 : f \mapsto \int_0^1 |f|$. Notons H l'hyperplan des fonctions vérifiant $f(0) = 0$, c'est-à-dire le noyau de la forme $\delta : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\delta(f) = f(0)$. La forme linéaire δ n'est pas continue (la suite de terme général $g_n : x \mapsto (1-x)^n$ converge vers la fonction nulle dans (E, N_1) , mais $\delta(g_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). ♦ **L'hyperplan H est dense** : on peut approcher toute fonction f par une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de H en notant $f_n = f - f(0)g_n$ par exemple. ♦ **Le complémentaire H^c de H est connexe par arcs**. En effet, supposons que f et h soient deux fonctions vérifiant $f(0) > 0$ et $h(0) < 0$. On commence par relier f à la fonction constante 1 par un chemin affine $t \mapsto (1-t)f + t \cdot 1$, dont on vérifie sans peine qu'il est dans H^c . De même, on relie h à la fonction constante égale à -1 par un chemin affine. Enfin, on relie la fonction 1 à la fonction -1 par le chemin $t \mapsto \varepsilon_t$, où ε_t est la fonction définie sur $[0; 1]$ par $\varepsilon_t(x) = 2(1-x)^{\text{Arg th}(t)} - 1$ et $\varepsilon_1(x) = -1$, dont voici des graphes pour des valeurs croissantes de t entre 0 et 1 :



Le chemin $t \mapsto \varepsilon_t$ est bien continu sur $[0; 1]$. Pour tout $t \in [0; 1]$, on a bien $\varphi(\varepsilon_t) = +1$, mais $\varphi(\varepsilon_1) = -1$, et on n'est jamais passé par l'hyperplan !

IDÉAL

Un idéal d'un anneau commutatif A est un sous-groupe additif I de A qui vérifie de plus :

$$\forall a \in A \quad \forall i \in I \quad ai \in I.$$

Exemples : Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et u un endomorphisme de E . L'ensemble des polynômes annulateurs de u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. ♦ Si $\varphi : A \rightarrow A'$ est un morphisme d'anneaux, son noyau est un idéal de A .

Idéal engendré par un élément Soient A un anneau commutatif et a un élément de A . L'ensemble aA est le plus petit idéal contenant a , appelé idéal engendré par a .

Idéal engendré par une partie Soient A un anneau commutatif et B une partie de A . L'idéal engendré par B est le plus petit idéal contenant B . C'est également l'intersection de tous les idéaux contenant B .

Idéal principal Idéal I tel qu'il existe un élément $x \in A$ vérifiant $I = xA$.

Exemples : Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont tous principaux, donc de la forme $k\mathbb{Z}$, avec $k \in \mathbb{Z}$. ♦ Les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont tous principaux, donc de la forme $P\mathbb{K}[X]$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$. ♦ Considérons l'anneau A des suites réelles stationnaires. L'ensemble I des suites de A qui stationnent en 0 est un idéal de A , mais cet idéal n'est pas principal.

☞ ANNEAU PRINCIPAL, ANNEAU EUCLIDIEN, POLYNÔME MINIMAL.

IDEMPOTENT

Soit E un ensemble muni d'un loi de composition interne « * ». Un élément x de E est idempotent si $x * x = x$.

Exemples : Soit E un espace vectoriel. Les endomorphismes idempotents de E sont les projecteurs de E . ♦ Tout élément de $\mathfrak{P}(E)$ est idempotent pour la loi « $\cap$ ».

REMARQUE : Dans un groupe, l'élément neutre e est le seul élément idempotent.

IDENTIFICATION

Méthode, aussi mystérieuse (si l'on n'a pas bien compris) que dangereuse (si on l'utilise quand même), permettant de montrer une ou des égalités.

Exemples : L'égalité $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ ne permet absolument pas de conclure, par « identification », que $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$. La même égalité, assortie d'une quantification convenable (par exemple, « $\forall x \in I$ », où I est une partie de $\mathbb{R}$ contenant au moins trois éléments distincts) permet en revanche de conclure, en utilisant (implicitement) un théorème fondamental de la théorie des polynômes : tout polynôme de degré n possédant $n + 1$ racines distinctes est le polynôme nul. ♦ De même, le théorème d'unicité du développement en série entière permet de déduire, de l'égalité

$$\forall x \in I \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

valable sur un voisinage de 0, une infinité d'égalités : $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ♦ Dans ces deux cas comme dans bien d'autres, on veillera à citer précisément le théorème utilisé plutôt que d'invoquer une « identification » trop floue.

IDENTITÉ

Parfois utilisé comme synonyme de : *égalité*, et plus précisément de : *égalité toujours vraie*.

Exemples : Ainsi, on parle d'identité du parallélogramme plutôt que d'égalité du parallélogramme (☞ PARALLÉLOGRAMME), ou bien d'identités de polarisation. ♦ Dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il existe un cas particulier d'égalité ; comme cette égalité n'est pas