

HYPERGÉOMÉTRIQUE

✎ Loi.

HYPERPLAN

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de codimension 1. En d'autres termes, H est un hyperplan de E si et seulement s'il existe un sous-espace vectoriel D de E , de dimension 1, tel que $E = D \oplus H$. ♦ Tout hyperplan s'écrit comme le noyau d'une forme linéaire φ non nulle. ♦ Si H est un hyperplan de E et si $a \in E \setminus H$, alors $E = H \oplus \text{Vect}(a)$.

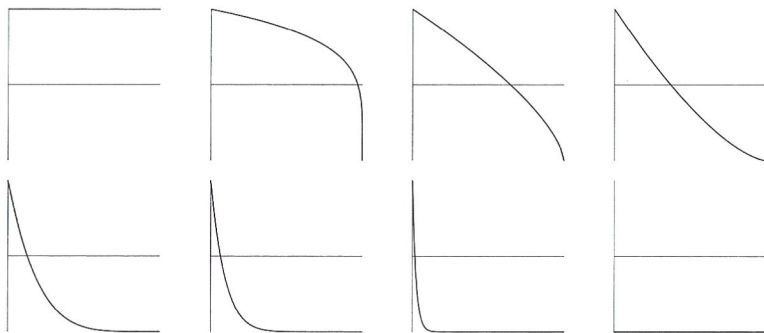
REMARQUES : Si $E = \mathbb{R}^3$, un hyperplan est un « plan » vectoriel au sens habituel. ♦ Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie n , un hyperplan est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$; on peut intuitivement continuer à y penser comme à un plan dans l'espace usuel : il est « tout plat » (notamment, c'est un fermé d'intérieur vide) et sépare l'espace en deux (c'est-à-dire que $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs). ♦ Si E est un espace vectoriel normé de dimension infinie, les choses se corsent : si certains hyperplans sont toujours des fermés, d'autres au contraire sont denses dans E — ce sont les noyaux de formes linéaires non continues (✎ THÉORÈME DE L'HYPERPLAN FERMÉ). Plus étonnant, si H est dense dans E , alors $E \setminus H$ est toujours connexe par arcs !

Équation implicite d'un hyperplan Équation de la forme $\varphi(x) = 0$, où φ est une *forme linéaire telle que $\text{Ker } \varphi = H$. Une telle équation est unique à un facteur multiplicatif (non nul) près.

✎ FORME LINÉAIRE.

Théorème de l'hyperplan fermé Dans un espace vectoriel normé, un hyperplan d'équation $H = \text{Ker } \varphi$ est soit fermé (si la forme φ est continue), soit dense (si φ n'est pas continue).

Exemple : Notons E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0; 1]$, muni de la norme $N_1 : f \mapsto \int_0^1 |f|$. Notons H l'hyperplan des fonctions vérifiant $f(0) = 0$, c'est-à-dire le noyau de la forme $\delta : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\delta(f) = f(0)$. La forme linéaire δ n'est pas continue (la suite de terme général $g_n : x \mapsto (1-x)^n$ converge vers la fonction nulle dans (E, N_1) , mais $\delta(g_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). ♦ **L'hyperplan H est dense** : on peut approcher toute fonction f par une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de H en notant $f_n = f - f(0)g_n$ par exemple. ♦ **Le complémentaire H^c de H est connexe par arcs**. En effet, supposons que f et h soient deux fonctions vérifiant $f(0) > 0$ et $h(0) < 0$. On commence par relier f à la fonction constante 1 par un chemin affine $t \mapsto (1-t)f + t \cdot 1$, dont on vérifie sans peine qu'il est dans H^c . De même, on relie h à la fonction constante égale à -1 par un chemin affine. Enfin, on relie la fonction 1 à la fonction -1 par le chemin $t \mapsto \varepsilon_t$, où ε_t est la fonction définie sur $[0; 1]$ par $\varepsilon_t(x) = 2(1-x)^{\text{Arg th}(t)} - 1$ et $\varepsilon_1(x) = -1$, dont voici des graphes pour des valeurs croissantes de t entre 0 et 1 :



Le chemin $t \mapsto \varepsilon_t$ est bien continu sur $[0; 1]$. Pour tout $t \in [0; 1]$, on a bien $\varphi(\varepsilon_t) = +1$, mais $\varphi(\varepsilon_1) = -1$, et on n'est jamais passé par l'hyperplan !

IDÉAL

Un idéal d'un anneau commutatif A est un sous-groupe additif I de A qui vérifie de plus :

$$\forall a \in A \quad \forall i \in I \quad ai \in I.$$

Exemples : Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et u un endomorphisme de E . L'ensemble des polynômes annulateurs de u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. ♦ Si $\varphi : A \rightarrow A'$ est un morphisme d'anneaux, son noyau est un idéal de A .

Idéal engendré par un élément Soient A un anneau commutatif et a un élément de A . L'ensemble aA est le plus petit idéal contenant a , appelé idéal engendré par a .

Idéal engendré par une partie Soient A un anneau commutatif et B une partie de A . L'idéal engendré par B est le plus petit idéal contenant B . C'est également l'intersection de tous les idéaux contenant B .

Idéal principal Idéal I tel qu'il existe un élément $x \in A$ vérifiant $I = xA$.

Exemples : Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont tous principaux, donc de la forme $k\mathbb{Z}$, avec $k \in \mathbb{Z}$. ♦ Les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont tous principaux, donc de la forme $P\mathbb{K}[X]$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$. ♦ Considérons l'anneau A des suites réelles stationnaires. L'ensemble I des suites de A qui stationnent en 0 est un idéal de A , mais cet idéal n'est pas principal.

✎ ANNEAU PRINCIPAL, ANNEAU EUCLIDIEN, POLYNÔME MINIMAL.

IDEMPOTENT

Soit E un ensemble muni d'un loi de composition interne « * ». Un élément x de E est idempotent si $x * x = x$.

Exemples : Soit E un espace vectoriel. Les endomorphismes idempotents de E sont les projecteurs de E . ♦ Tout élément de $\mathfrak{P}(E)$ est idempotent pour la loi « $\cap$ ».

REMARQUE : Dans un groupe, l'élément neutre e est le seul élément idempotent.

IDENTIFICATION

Méthode, aussi mystérieuse (si l'on n'a pas bien compris) que dangereuse (si on l'utilise quand même), permettant de montrer une ou des égalités.

Exemples : L'égalité $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ ne permet absolument pas de conclure, par « identification », que $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$. La même égalité, assortie d'une quantification convenable (par exemple, « $\forall x \in I$ », où I est une partie de $\mathbb{R}$ contenant au moins trois éléments distincts) permet en revanche de conclure, en utilisant (implicitement) un théorème fondamental de la théorie des polynômes : tout polynôme de degré n possédant $n + 1$ racines distinctes est le polynôme nul. ♦ De même, le théorème d'unicité du développement en série entière permet de déduire, de l'égalité

$$\forall x \in I \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

valable sur un voisinage de 0, une infinité d'égalités : $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ♦ Dans ces deux cas comme dans bien d'autres, on veillera à citer précisément le théorème utilisé plutôt que d'invoquer une « identification » trop floue.

IDENTITÉ

Parfois utilisé comme synonyme de : *égalité*, et plus précisément de : *égalité toujours vraie*.

Exemples : Ainsi, on parle d'identité du parallélogramme plutôt que d'égalité du parallélogramme (✎ PARALLÉLOGRAMME), ou bien d'identités de polarisation. ♦ Dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il existe un cas particulier d'égalité; comme cette égalité n'est pas

toujours vérifiée, on ne parle pas d'identité. ♦ De même, on parle d'égalité de Parseval, car elle n'est vérifiée que pour une certaine classe de fonctions.

Application identité Application d'un ensemble E sur lui-même, définie par $\text{Id}(x) = x$ pour tout $x \in E$. Également appelée *application identique*.

⇨ BIJECTION.

Identités de polarisation ⇨ POLARISATION.

Matrice identité Matrice I_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diagonale, de coefficients $(I_n)_{i,j} = \delta_{i,j}$, où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. ♦ C'est l'élément neutre de la multiplication des matrices carrées d'ordre n . ♦ C'est également la matrice représentative de l'application identité d'un espace vectoriel E de dimension finie n , relativement à n'importe quelle base.

⇨ CENTRE, DIAGONALISATION, KRONECKER.

IMAGE

Image d'une application Soient E et F deux ensembles, et soit f une application de E dans F . L'image de f est l'ensemble

$$\text{Im } f = f(E) = \{f(x) ; x \in E\} = \{y \in F ; \exists x \in E, f(x) = y\}.$$

♦ Si E et F sont des espaces vectoriels et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors l'image de u est un sous-espace vectoriel de F .

⇨ RANG.

Image directe d'une partie Soient E et F deux ensembles, et soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soit A une partie de E . L'image directe de A par f est

$$f(A) = \{y \in F ; \exists a \in A, f(a) = y\}.$$

C'est donc l'image de la restriction $f|_A$ de f à A . ♦ En d'autres termes, pour tout $y \in F$, on a l'équivalence

$$y \in f(A) \iff \exists a \in A \quad f(a) = y.$$

Image réciproque d'une partie Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soit B une partie de F . L'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E ; f(x) \in B\}.$$

♦ En d'autres termes, on a, pour tout $x \in E$, l'équivalence

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B.$$

REMARQUE : Sauf dans le cas particulier où f est bijective, on ne peut pas définir d'application $f^{-1} : F \rightarrow E$. Ici, dans l'écriture « $f^{-1}(B)$ », il convient de ne pas dissocier la partie « f^{-1} » du reste; encore une fois, « f^{-1} » en tant que tel n'est pas défini. C'est pourquoi, dans certains ouvrages, une notation spéciale est utilisée pour désigner l'image réciproque d'une partie de F : $f^{(-1)}(B)$ par exemple. On peut, dans tous les cas, définir une application $f^{(-1)} : \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E)$, qui à une partie de F associe son image réciproque par f .

IMPAIRE

Fonction impaire Fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0 , et telle que, pour tout $x \in I$, on ait $f(-x) = -f(x)$.

REMARQUES : Si f est paire et dérivable, sa dérivée est impaire. ♦ Si f est impaire et dérivable, alors sa dérivée est paire. ♦ Si f est développable en série entière $\sum a_n x^n$, alors f est impaire si et seulement si $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie impaire d'une fonction Toute fonction $f :]-A ; +A[\rightarrow \mathbb{K}$ peut s'écrire, de manière unique, comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire; plus précisément, en notant $\hat{f} : x \mapsto f(-x)$, on a

$$f = \frac{1}{2}(f + \hat{f}) + \frac{1}{2}(f - \hat{f}),$$

ce qui signifie

$$\forall x \in I \quad f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

La partie impaire de f est $\frac{1}{2}(f - \hat{f})$.

Exemple : La partie impaire de la fonction exponentielle réelle est la fonction sinus hyperbolique.

⇨ PAIR.

IMPLICITE

Équation implicite Une courbe du plan peut être définie à la façon d'un arc paramétré, ou bien au contraire sous la forme d'une relation de la forme $F(x, y) = 0$. On appelle cette dernière équation implicite (ou équation *cartésienne*) de la courbe. Généralement, cela permet de donner, *localement*, y en fonction de x , ou bien x en fonction de y , en vertu du théorème des fonctions implicites.

Exemple : Le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ peut être défini par un paramétrage $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ aussi bien que par son équation implicite $x^2 + y^2 = 1$.

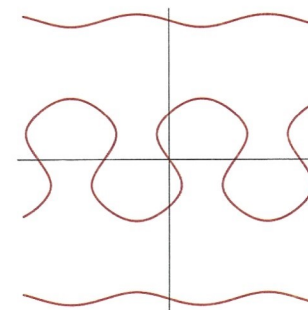
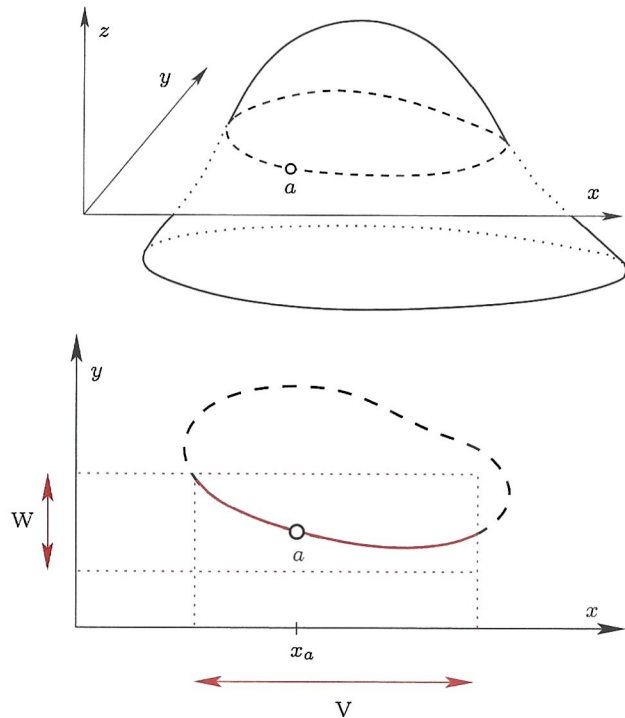


Fig. 48 — Courbe d'équation implicite $\sin x + y \cos y = 0$.

Théorème des fonctions implicites Il existe de nombreuses versions de ce théorème fondamental. Donnons-en ici un énoncé simple. ♦ Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. Soit $a = (x_a, y_a) \in \Omega$ un point vérifiant $f(a) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a) \neq 0$. Alors il existe un voisinage ouvert V de x_a , un voisinage ouvert W de y_a et une unique fonction $Y : V \rightarrow W$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $Y(x_a) = y_a$ et

$$\forall (x, y) \in V \times W \quad f(x, y) = 0 \iff y = Y(x).$$

♦ En langage « géométrique », si la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = f(x, y)$ passe par $(x_a, y_a, 0)$ et si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_a, y_a) \neq 0$, la courbe intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan $z = 0$ admet localement un paramétrage de la forme $y = Y(x)$. $\Rightarrow$ NIVEAU. ♦ On peut également voir ce résultat ainsi : sur le voisinage $\mathcal{V}$, l'équation en y : $f(x, y) = 0$ admet une unique solution $y = Y(x)$. De plus, la fonction $Y : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et s'appelle *fonction implicite*.



Exemple : Tangente à une courbe — Soient $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $A = (x_a, y_a)$ un point de $\mathbb{R}^2$ tel que $F(A) = 0$ et $\text{grad } F(A) \neq 0$. Alors la courbe d'équation $F(x, y) = 0$ admet en A une tangente, normale à $\text{grad } F(A)$. En effet, le gradient ne s'annulant pas, on peut supposer, par exemple, que $\partial F / \partial y(A) \neq 0$ et paramétrer localement la courbe, au voisinage de A , par une équation de la forme $y = Y(x)$, où Y est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui assure l'existence de la tangente en A , portée par le vecteur $(1, Y'(x_a))$. Enfin, en dérivant la relation $F(x, Y(x)) = 0$ au voisinage de x_a , on obtient $\partial F / \partial y(x_a, y_a) \cdot Y'(x_a) = -\partial F / \partial x(x_a, y_a)$, ce qui montre que le gradient de F en A est colinéaire à $(-Y'(x_a), 1)$, et donc orthogonal à la tangente en A . ♦ Suivant la même technique, on trouve le plan tangent à une surface implicite, et on généralise aux dimensions supérieures.

INCOMMENSURABLE

Un réel a est dit incommensurable avec un réel $b \neq 0$ si le rapport a/b est irrationnel.

INCOMPATIBLE

Deux événements A et B d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$ sont dit incompatibles s'ils sont disjoints : $A \cap B = \emptyset$.

REMARQUE : En d'autres termes, deux événements incompatibles ne peuvent pas se réaliser tous deux simultanément : pour tout $\omega \in \Omega$, on ne peut pas avoir à la fois $\omega \in A$ (réalisation de l'événement A) et $\omega \in B$ (réalisation de l'événement B).

INDÉPENDANCE

Indépendance de deux événements Deux événements A et B sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Indépendance mutuelle Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont dits mutuellement indépendants si pour tout $p \in [2; n]$ et pour tout p -uplet d'indices $(i_1, \dots, i_p)$ distincts de $[1; n]$, on a

$$P\left(\bigcap_{k=1}^p A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^p P(A_{i_k}).$$

♦ On peut étendre cette notion à une famille infinie $(A_i)_{i \in I}$ d'événements : ces événements sont mutuellement indépendants si toute sous-famille finie est mutuellement indépendante.

REMARQUE : L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fautive.

Exemple : Considérons un tirage de deux dés équilibrés. Notons A l'événement : « le premier dé donne un résultat pair », B l'événement « le second dé donne un résultat pair » et C l'événement « la somme des deux dés est paire ». Alors A et B sont indépendants, B et C également, de même que A et C ; mais A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Indépendance de deux variables aléatoires Deux variables aléatoires à densité X et Y sont dites indépendantes si, pour tous boréliens A et B de $\mathbb{R}$, on a

$$P([X \in A] \cap [Y \in B]) = P[X \in A] \cdot P[Y \in B].$$

♦ En pratique, on vérifie la propriété équivalente suivante : pour tous réels x et y ,

$$P([X \leq x] \cap [Y \leq y]) = P[X \leq x] \cdot P[Y \leq y].$$

Cela revient à dire que $F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ pour tous réels x et y .

REMARQUES : *Cas de deux variables aléatoires discrètes.* Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$P([X = x] \cap [Y = y]) = P[X = x] \cdot P[Y = y].$$

Cas de deux variables à densité. Si le couple (X, Y) admet une densité μ , ainsi que les variables X et Y , la condition d'indépendance est équivalente à : la densité conjointe s'écrit comme le produit $\mu(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ des densités marginales, et ce pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, sauf peut-être sur un ensemble négligeable (d'aire nulle).

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires Des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont dites mutuellement indépendantes si, pour tous réels $x_1, \dots, x_n$, on a

$$P([X_1 \leq x_1] \cap \dots \cap [X_n \leq x_n]) = P[X_1 \leq x_1] \cdot \dots \cdot P[X_n \leq x_n].$$

REMARQUE : Des variables aléatoires discrètes $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si

$$P([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]) = P[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot P[X_n = x_n]$$

pour toutes valeurs $x_1, \dots, x_n$ pouvant être prises par les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$.

$\Rightarrow$ CORRÉLATION, COVARIANCE, ESPÉRANCE.

Vecteurs linéairement indépendants Des éléments $x_1, \dots, x_n$ d'un espace vectoriel sont dit linéairement indépendants s'ils forment une famille libre.

INDICATRICE

Indicatrice d'Euler $\Leftrightarrow$ EULER.

Fonction indicatrice Synonyme de : fonction caractéristique. Soient X un ensemble et A une partie de X . La fonction indicatrice de A est la fonction χ_A définie sur X par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Variable indicatrice d'un événement Soit A un événement. La variable indicatrice de A est la variable aléatoire X_A , vérifiant $X_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $X_A(\omega) = 0$ sinon. Elle suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(A) : \mathcal{B}(P(A))$. $\Leftrightarrow$ LOI DE BERNOULLI.

INDUIT

Application induite Soient A et B deux ensembles, et $f : A \rightarrow B$ une application. Soient A' et B' des parties de A et B respectivement telles que $f(A') \subset B'$. Alors l'application $g : A' \rightarrow B'$ définie par $g(a) = f(a)$ pour tout $a \in A'$ est appelée application induite (par restriction à A' , et co-restriction à B').

Exemple : L'application $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est évidemment pas une bijection. En revanche, l'application induite $g : [0; \pi] \rightarrow [-1; 1]$ est bijective. Sa bijection réciproque g^{-1} porte le nom de « Arc cosinus ».

$\Leftrightarrow$ ENDOMORPHISME INDUIT, RESTRICTION.

INÉGALITÉ

$\Leftrightarrow$ ACCROISSEMENTS FINIS, ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE, BESSEL, BIENAYMÉ, CAUCHY-SCHWARZ, CONVEXE, JENSEN, MARKOV, MINKOWSKI, MOYENNE, TAYLOR-LAGRANGE, TCHEBYCHEV, TRIANGULAIRE.

INFINI

Branche infinie $\Leftrightarrow$ BRANCHE.

Dimension infinie $\Leftrightarrow$ DIMENSION.

Ensemble infini Ensemble qui n'est pas fini, c'est-à-dire ensemble en bijection avec un de ses sous-ensembles stricts.

Exemple : $\mathbb{N}^*$ est un sous-ensemble strict de $\mathbb{N}$; l'application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ définie par $\varphi(n) = n + 1$ est une bijection; ainsi, $\mathbb{N}$ est un ensemble infini.

Limite infinie, Limite en l'infini $\Leftrightarrow$ LIMITE.

Norme infinie $\Leftrightarrow$ NORME.

INFLEXION

$\Leftrightarrow$ POINT D'INFLEXION.

INJECTIVITÉ

Une fonction $f : A \rightarrow B$ est dite injective si deux éléments distincts de A ne peuvent avoir la même image par f . En d'autres termes, si x et y sont des éléments de A tels que $f(x) = f(y)$, alors $x = y$.

REMARQUE : Si B est un ensemble fini et si $f : A \rightarrow B$ est injective, alors A est fini et $\text{Card } A \leq \text{Card } B$. $\blacklozenge$ Si F est un espace vectoriel de dimension finie et si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire injective, alors E est de dimension finie et $\dim E \leq \dim F$. $\blacklozenge$ Toujours dans le cas où u est une application linéaire $u : E \rightarrow F$, elle est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$; en d'autres termes, si $f(x) = 0$ implique $x = 0$.

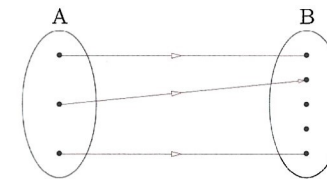


Fig. 49 — Application injective

$\Leftrightarrow$ NOYAU, THÉORÈME DU RANG.

INTÉGRABILITÉ

Intégrabilité d'une fonction positive Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle I . On dit que f est intégrable sur I s'il existe un réel positif M tel que $\int_J f \leq M$ pour tout segment $J \subset I$. On pose alors $\int_I f = \sup_{J \subset I} \int_J f$.

Intégrabilité d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ Soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$, on dit que f est intégrable sur I si la fonction positive $|f|$ est intégrable sur I .

Intégrabilité d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé Soit $f : I \rightarrow F$ une fonction continue par morceaux sur I et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie. On dit que f est intégrable sur I si la fonction positive $\|f\|$ est intégrable sur I .

Intégrabilité d'une fonction de deux variables Soient I et I' deux intervalles de $\mathbb{R}$. Une fonction positive $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{R}^+$ est dite intégrable sur $I \times I'$ s'il existe un réel positif M tel que, pour tous segments $J \subset I$ et $J' \subset I'$, on ait

$$\iint_{J \times J'} f \leq M.$$

Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ est dite intégrable si $|f|$ l'est.

$\Leftrightarrow$ FUBINI, JACOBIEN.

INTÉGRALE

Intégrale d'une fonction en escalier Si f est en escalier sur $[a; b]$ et si $(a_0, \dots, a_p)$ est une subdivision de $[a; b]$ adaptée à f , alors on définit

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^p (a_k - a_{k-1}) \xi_k,$$

où ξ_k est la valeur constante de f sur $]a_{k-1}; a_k[$.

Intégrale sur un segment Si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction continue par morceaux, l'intégrale de f est égale à la limite de toute suite de sommes de Riemann associée à f .

$\blacklozenge$ Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f , alors l'intégrale de f est égale à la limite de $\int f_n$. $\blacklozenge$ Ces deux propriétés peuvent (au choix) servir de définition à l'intégrale de f .

Intégrale d'une fonction positive Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable, on pose

$$\int_I f = \sup_{J \subset I} \int_J f$$

où la borne supérieure est définie sur les segments inclus dans I.

REMARQUE : Il est plus facile de caractériser l'intégrale de f ainsi : pour toute suite exhaustive de segments $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors

$$\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f.$$

Intégrale d'une fonction numérique Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et intégrable ; décomposons f sous la forme $f = f^+ - f^-$, où f^+ est sa partie positive et f^- sa partie négative. On appelle l'intégrale de f sur I le réel

$$\int_I f \stackrel{\text{def}}{=} \int_I f^+ - \int_I f^-.$$

♦ Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux et intégrable ; l'intégrale de f est alors

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + i \int_I \operatorname{Im} f.$$

REMARQUE : L'intégrale présentée ici est un joyeux mélange d'intégrale de Riemann et d'intégrale de Lebesgue. Il existe plusieurs théories de l'intégration, permettant de définir l'intégrale d'une fonction sur un segment ou un intervalle quelconque.

- L'intégrale selon Riemann se fait en deux étapes. Sur un segment, l'intégrale d'une fonction est définie comme la limite d'une suite de sommes de Riemann. Ce procédé a un sens pour la classe des fonctions dites « réglées », c'est-à-dire des fonctions limites uniformes de fonctions en escalier. Sur un intervalle $[a; b]$, on regarde simplement l'existence de la limite de l'intégrale sur $[a; x]$, quand x tend vers b .
- L'intégrale selon Lebesgue d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ se fait par sommation, mais en subdivisant l'axe des ordonnées (et non l'axe des abscisses comme chez Riemann) : on découpe $\mathbb{R}^+$ en une infinité d'intervalles, par exemple tous de taille $1/2^n$. On regarde alors, pour tout intervalle du type $\left[\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n}\right]$, l'ensemble des réels dont l'image par f est dans cet intervalle

$$A_k^{(n)} = f^{-1} \left(\left[\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n} \right] \right).$$

On note $\mu(A_k^{(n)})$ la « taille » de cet ensemble ; la partie la plus délicate de la construction présente est justement de définir et calculer cette « taille » (c'est ce que l'on appelle la *théorie de la mesure*, et qui est d'une difficulté non négligeable). On définit enfin

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k^{(n)}) \cdot \frac{k}{2^n}.$$

La suite de terme général $S_n(f)$ est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, sa limite est notée $\int f$ et, si elle est finie, on dit que la fonction est intégrable. Le reste de la construction suit les règles ci-dessus.

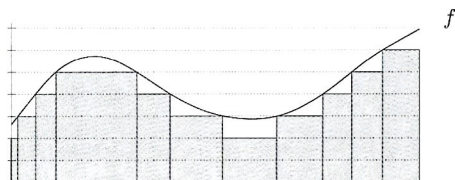


Fig. 50 — Construction de l'intégrale de Lebesgue de f .

- L'intégrale de Riemann-Stieltjes permet de généraliser l'intégration (pondérée par une fonction positive) d'une fonction φ . On se donne pour cela une fonction F croissante et continue à droite ; l'intégrale de Riemann-Stieltjes de φ , notée $\int \varphi dF$, est construite comme celle de Lebesgue, mais avec une mesure μ_F reliée à F par

$$\mu([a; b]) = F(b) - F(a^-) \quad \mu(]a; b]) = F(b^-) - F(a) \quad \text{etc.}$$

Si F est dérivable, alors $\int \varphi dF = \int \varphi F'(x) dx$. Le choix d'une fonction F non continue permet de donner une importance à certaines valeurs ponctuelles de φ , sans pour autant passer par la théorie des distributions. Cette construction est particulièrement utile en théorie des probabilités.

- L'intégrale de Kurzweil-Henstock est une construction qui permet de généraliser l'intégrale de Lebesgue et qui possède de plus la propriété suivante (*non vérifiée* par l'intégrale de Lebesgue) : si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ admet une primitive F , alors f est intégrable au sens de Kurzweil-Henstock et

$$\forall x \in [a; b] \quad \int_a^x f = F(x) - F(a).$$

Le lecteur curieux est renvoyé à l'excellente référence : *Théorie élémentaire de l'intégration : l'intégrale de Henstock-Kurzweil* de Jean-Pierre DEMAILLY, disponible sur Internet, pour en savoir plus.

- L'intégrale d'Itô est utilisée dans le calcul stochastique.
- L'intégrale de Feynman n'est pas (encore) une intégrale mathématique, au sens où sa formalisation n'est pas achevée ; elle a été définie par le physicien américain Richard Feynman pour effectuer des calculs en électrodynamique quantique (théorie quantique et relativiste des interactions électromagnétiques), et sa formalisation rigoureuse est encore en cours (travaux de Cécile DeWitt-Morette et Pierre Cartier, voir par exemple l'article de CARTIER, KAHANE et ARNOLD dans *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui*, Cassini 2002).

Intégrale curviligne ⇔ CURVILIGNE.

Intégrale double Soient I et I' deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \times I' \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable positive. Alors l'intégrale de f sur $I \times I'$ est

$$\iint_{I \times I'} f = \sup_{J, J'} \iint_{J \times J'} f,$$

où J et J' parcourent l'ensemble des segments inclus dans I et I' respectivement. ♦ Si f est à valeurs réelles ou complexes et intégrable, on définit son intégrale comme dans le cas d'une fonction d'une variable, en séparant les parties réelle et imaginaire et, pour chacune d'entre elles, en décomposant en une partie positive et une partie négative.

Intégrale impropre Soit $f \in \mathcal{C}_m([a; b[)$, si f n'est pas intégrable sur $[a; b]$ mais si $\int_a^x f$ admet une limite quand $x \rightarrow b$, on note encore cette limite $\int_a^b f$, et on l'appelle intégrale impropre de f sur $[a; b[$. ♦ On dit également que l'intégrale de f est *semi-convergente*.

Logarithme intégral, Sinus intégral ⇔ FONCTIONS *SPÉCIALES.

INTÉGRANDE

(Vieilli) Fonction que l'on trouve sous le signe « $\int$ ».

INTÉGRATION

Intégration terme à terme Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; si chaque f_n est continue par morceaux et intégrable sur I , si la série $\sum f_n$ converge et si sa somme S est continue par morceaux, et si enfin $\sum N_1(f_n)$ converge (en posant $N_1(f_n) = \int_I |f_n|$), alors la somme de la série est intégrable et on peut intégrer S terme à terme :

$$\int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n.$$

REMARQUE : Parfois, le théorème d'intégration terme à terme ne fonctionne pas (la série $\sum N_1(f_n)$ diverge). On peut alors tenter d'utiliser le théorème de convergence dominée sur la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum f_n$. Cette procédure fonctionne particulièrement bien dans deux cas au moins :

- lorsque les fonctions f_n sont, à x fixé, de signe constant ; les sommes partielles vérifient alors $|S_n| \leq |S|$; l'intégrabilité de celle-ci donne une domination permettant de conclure ;
- lorsque f_n a partout le signe de $(-1)^n$; alors, le critère des séries alternées permet de majorer la somme partielle S_n par S_0 et l'intégrabilité de celle-ci donne une domination permettant de conclure.

Intégration par parties Procédé de calcul d'une intégrale : si u et v sont deux fonctions continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un segment $[a; b]$, alors

$$\int_a^b u'v = - \int_a^b uv' + [uv]_a^b.$$

REMARQUES : La continuité de u et celle de v sont indispensables (sans quoi des termes de bord s'ajoutent à la formule) ; en revanche, les dérivées peuvent n'être que continues par morceaux. ♦ Lors du calcul d'une intégrale, séparer l'intégrande en un produit $u'v$ contient évidemment une part d'arbitraire. Cependant, on obtient de bons résultats en mettant, dans la partie « v » (celle que l'on va dériver), dans l'ordre :

- les logarithmes ;
- les expressions polynomiales ;
- les exponentielles ;
- les expressions trigonométriques.

C'est l'ordre « LPET » que l'on peut retenir par un moyen mnémotechnique de son choix.

INTÈGRE

Un anneau A est dit intègre s'il est commutatif, non réduit à $\{0\}$, et s'il ne possède pas de diviseurs de 0.

Exemples : Les anneaux $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont intègres. ♦ Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est alors intègre.

INTÉGRER

Intégrer une fonction, c'est en calculer une intégrale définie (de la forme $\int_a^b f$), ou indéfinie ($x \mapsto \int_a^x f$), c'est-à-dire en chercher une primitive. ♦ **Intégrer une équation différentielle**, c'est en trouver les solutions. ♦ **Intégrer une forme différentielle** ω , c'est trouver une fonction f telle que $\omega = df$.

INTÉRIEUR

Point intérieur à une partie d'un espace vectoriel normé Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E . On dit que le point $a \in E$ est intérieur à A s'il existe $r > 0$ tel que la boule de centre a et de rayon r soit incluse dans A :

$$\exists r > 0 \quad \mathcal{B}(a; r) \subset A.$$

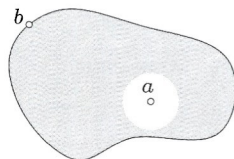


Fig. 51 — Le point a est intérieur à A (en gris pâle, une boule ouverte centrée sur a est contenue dans A). Le point b n'est pas intérieur à A .

Intérieur d'une partie Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E . On appelle intérieur de A l'ensemble des points intérieurs à A , et on le note $\overset{\circ}{A}$.

Exemples : Dans $\mathbb{R}$, muni de sa topologie usuelle, l'intérieur d'un segment $[a; b]$ est $]a; b[$. ♦ L'intérieur de $\mathbb{Q}$ est vide. ♦ L'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte correspondante.

INTERMÉDIAIRE

✚ THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES.

INTERNE

Loi de composition interne ✚ LOI.

INTERPOLATION

On se donne des réels deux à deux distincts $a_0 < a_1 < \dots < a_n$, et des réels $b_0, \dots, b_n$. Le but de l'interpolation est de déterminer une fonction $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui prenne les valeurs b_k aux points a_k , c'est-à-dire qui prolonge la fonction φ définie sur l'ensemble $\{a_0, \dots, a_n\}$ par $\varphi(a_k) = b_k$. ♦ Il existe de nombreuses techniques d'interpolation, parmi lesquelles :

- **Interpolation linéaire** : sur chaque segment $[a_k; a_{k+1}]$, f est une fonction affine ;
- **Polynômes de Lagrange** : ✚ LAGRANGE.
- **Méthode de Simpson** : (En supposant n pair et la subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ régulière.) On interpole f sur $[a_{2k}; a_{2k+2}]$ par l'unique polynôme de degré au plus 2 qui prenne les mêmes valeurs que φ aux points a_{2k} , a_{2k+1} et a_{2k+2} . ✚ SIMPSON.

INTERVALLE

Partie convexe de $\mathbb{R}$. ♦ Les intervalles sont de l'une des formes suivantes, où a et b sont les *extrémités* du segment :

forme	domaine de a	domaine de b
$[a; b]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$[a; b[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
$]a; b]$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$	$\mathbb{R}$
$]a; b[$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$	$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

REMARQUES : Les intervalles sont les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$. ♦ Ce sont également les parties connexes de $\mathbb{R}$.

✚ SEGMENT.

Intervalle de confiance Soient U_n et V_n deux estimateurs d'un paramètre réel θ . Soit $\alpha \in]0; 1[$. On dit que l'intervalle $[U_n; V_n]$ est intervalle de confiance $1 - \alpha$ (ou : de risque α) de θ si $\mathbf{P}[U_n \leq \theta \leq V_n] = 1 - \alpha$.

INTERVERSION

Interversion de limites La résolution d'un grand nombre de problèmes de mathématiques passe par des interversions de limites ; chacune est l'objet d'une ou de plusieurs techniques classiques. Parmi ces limites, certaines sont explicites, d'autres le sont moins (somme d'une série, intégrale).

$$\text{— Deux limites : } \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

✚ THÉORÈME DE LA DOUBLE LIMITE.

$$- \text{Limite et somme : } \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

THÉORÈME DE LA DOUBLE *LIMITE.

$$- \text{Limite et intégrale : } \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{CONVERGENCE DOMINÉE.}$$

$$- \text{Deux intégrales : } \int_I \int_J f(x, y) dy dx = \int_J \int_I f(x, y) dx dy \quad \text{FUBINI.}$$

$$- \text{Somme et intégrale : } \int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$$

INTÉGRATION TERME À TERME, THÉORÈME DE LA LIMITE *MONOTONE.

INVARIANCE

Invariance du rayon Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Si P est une fraction rationnelle, alors la série $\sum P(n) a_n z^n$ est également de rayon R . ♦ Notamment, les séries dérivées de cette série : $\sum n a_n z^{n-1}$ etc., sont toutes de rayon R .

INVARIANT

Invariant de similitude Une propriété définie sur l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n est dite invariante par similitude lorsque, si elle est vraie pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors elle est vraie pour toute matrice semblable à A . ♦ Une quantité f définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un invariant de similitude lorsque sa valeur est identique pour toutes les matrices semblables : $f(A) = f(P^{-1}AP)$ pour tout $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. ♦ Cela permet de transférer la définition de cette quantité ou de cette propriété des matrices aux endomorphismes, puisqu'elle ne dépendra pas de la base choisie pour représenter l'endomorphisme.

REMARQUE : En d'autres termes, une propriété invariante par similitude est caractérisée non par des matrices particulières, mais par des classes d'équivalence (modulo la relation de similitude). ♦ Cela fournit une méthode pour montrer que deux matrices ne sont pas semblables ; par exemple, une différence dans le rang, dans le déterminant ou dans la trace permet de conclure immédiatement à la non similitude de deux matrices.

Exemple : L'application $f : M \mapsto \text{tr}(M^2) + \det M$ est un invariant de similitude.

DETERMINANT, TRACE.

INVERSE

Inverse d'un élément dans un groupe multiplicatif Synonyme de *symétrisé* d'un élément. ♦ On note x^{-1} l'inverse de x , c'est-à-dire l'unique élément de G tel que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$. ♦ Dans le cas d'un groupe additif, on parlera plus volontiers d'*opposé*.

Inverse d'une matrice Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, son inverse, s'il existe, est l'unique matrice M^{-1} telle que $M \cdot M^{-1} = I_n$ et $M^{-1} \cdot M = I_n$. ♦ En réalité, si l'une de ces deux relations est vérifiée, l'autre l'est automatiquement.

INVERSIBLE

Inversibles d'un anneau Si A est un anneau, on note A^* (ou $A^\times$) l'ensemble des éléments symétrisables pour la loi de multiplication, et appelés inversibles de l'anneau A .

Exemples : Les inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes de degré 0, c'est-à-dire les polynômes constants non nuls. ♦ Les inversibles d'un anneau qui est également un corps sont tous les éléments non nuls. Ainsi, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. ♦ Cependant, dans le cas général, on prendra bien soin de ne pas confondre A^* et $A \setminus \{0\}$.

GRUPPE DES INVERSIBLES.

Inversibilité en algèbre linéaire Une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

REMARQUE : Si l'on montre seulement $AB = I_n$, alors la relation $BA = I_n$ est automatiquement vraie.

♦ Une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ est dite inversible s'il existe une application linéaire $\psi \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $\varphi \circ \psi = \text{Id}_F$ et $\psi \circ \varphi = \text{Id}_E$; en d'autres termes, si elle est bijective (son inverse étant alors automatiquement linéaire). On l'appelle alors *isomorphisme*. ♦ Un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est dit inversible s'il existe un endomorphisme $\psi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = \text{Id}_E$. On l'appelle alors *automorphisme*.

REMARQUES : Attention, il est nécessaire de montrer ces deux relations. Par exemple, considérons les applications $D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme associe son polynôme dérivé $D(P) = P'$, et $I : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme associe sa primitive s'annulant en 0. Alors $D \circ I = \text{Id}$, mais $I \circ D$ n'est pas égale à l'identité : c'est la projection sur $X\mathbb{R}[X]$ parallèlement à $\mathbb{R}_0[X]$. ♦ En revanche, dans le cas où E est de dimension finie, une seule relation suffit, et l'autre est automatiquement vérifiée.

INVERSION

Théorème d'inversion locale Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Soit a un point de U . Si le jacobien de f en a est non nul, alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a et un voisinage $\mathcal{W}$ de $f(a)$ tels que $f|_{\mathcal{V}}$ soit un difféomorphisme de $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{W}$. ♦ En d'autres termes, il existe une fonction $g : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$, de classe $\mathcal{C}^1$, qui est localement l'inverse de $f : f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{W}}$ et $g \circ f|_{\mathcal{V}} = \text{Id}_{\mathcal{V}}$, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathcal{V} \quad y = f(x) \iff x = g(y).$$

REMARQUE : L'espace $\mathbb{R}^n$ peut être remplacé par un espace vectoriel de dimension finie, ou un espace de Banach (espace vectoriel normé complet).

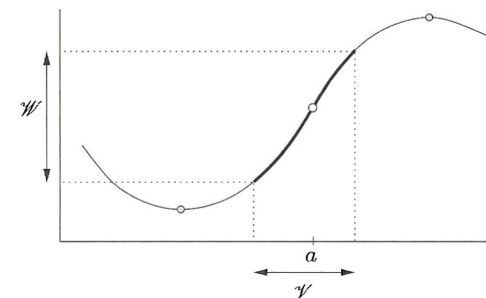


Fig. 52 — Inversion locale d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au voisinage d'un point a tel que $f'(a) \neq 0$. Les points gris sont des points d'annulation de la dérivée : l'ouvert $\mathcal{V}$ doit absolument s'arrêter avant ! La variable x peut, sur tout $\mathcal{V}$, s'exprimer comme une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de y .

Théorème d'inversion globale Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$). Si le jacobien de f ne s'annule pas sur U , alors $f(U)$ est ouvert ; si de plus f est injective, alors f établit un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de U sur $f(U)$: l'application induite $\tilde{f} : U \rightarrow f(U)$ est une bijection dont la réciproque est également de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemple : Considérons l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Cette application est de classe $\mathcal{C}^k$ et son jacobien vaut $J_\varphi(r, \theta) = r$. Sur l'ouvert $\mathcal{V}$ (en vert ci-dessous), φ établit, localement, un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme (théorème d'inversion locale). Ainsi, sur un certain voisinage $\mathcal{W}$ (en bleu) de $(1, \pi)$, φ induit un tel difféomorphisme. Hélas, l'injectivité de φ n'est que locale, et non globale : les points $(1, 0)$ et $(1, 2\pi)$ ont la même image $(1, 0)$ par φ (voir figure 53, à droite). On doit donc vérifier, à la main, l'injectivité de φ sur l'ouvert choisi, quitte à le restreindre si la condition n'est pas remplie. Par exemple, sur l'ouvert $U =]0; 1[\times]0; 2\pi[$, φ est bien injective, et établit donc un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme sur son image $\varphi(U)$.

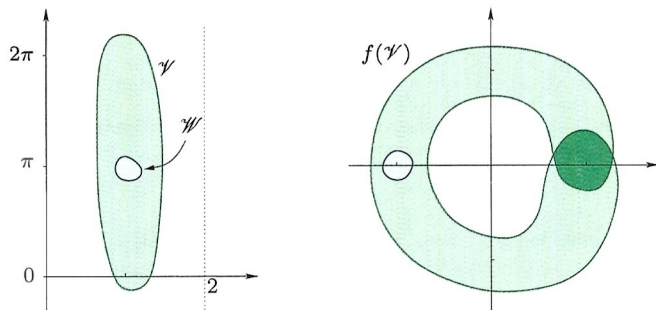


Fig. 53 — Un voisinage ouvert $\mathcal{W}$ de $(1, \pi)$ sur lequel φ établit localement un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme vers $f(\mathcal{V})$, et un second voisinage $\mathcal{V}$ sur lequel φ n'est pas injective. À droite, l'image de $\mathcal{V}$ et la partie fautive (en vert foncé).

INVOLUTION

Application $f : E \rightarrow E$ d'un ensemble dans lui-même, qui est *involutive*, c'est-à-dire qui vérifie $f \circ f = \text{Id}_E$.

Exemples : Une symétrie vectorielle est une involution. ♦ Dans un groupe G , l'application $g \mapsto g^{-1}$ en est également une. ♦ Dans $\mathbb{C}$, l'application $z \mapsto \bar{z}$ est involutive. ♦ Dans l'espace $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel euclidien, l'application qui à u associe son adjoint u^* est encore une involution.

INVOLUTIVE

☞ INVOLUTION.

IRRATIONNEL

Nombre réel qui n'est pas rationnel. ♦ Étant donnés deux réels $a < b$, on peut toujours trouver un irrationnel i tel que $a < i < b$. ♦ L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des irrationnels est un ensemble non dénombrable, dense dans $\mathbb{R}$.

Exemples : $\sqrt{2}$, π et e sont des nombres irrationnels. ♦ Si $p \in \mathbb{N}$ n'est pas le carré d'un entier, alors $\sqrt{p}$ est irrationnel.

☞ ALGÈBRE, RATIONNEL, TRANSCENDANT.

IRRÉDUCTIBLE

Élément irréductible d'un anneau A Élément x non inversible de A tel que, si l'on peut écrire $x = ab$ avec $a, b \in A$, alors l'un au moins des éléments a et b est inversible.

Exemple : Dans l'anneau $\mathbb{Z}$, les éléments irréductibles sont les nombres premiers non nuls, ainsi que leurs opposés.

Fraction rationnelle irréductible Un représentant (P, Q) d'une fraction rationnelle F est irréductible si P et Q sont premiers entre eux.

REMARQUE : Par abus de langage, on confond parfois une fraction rationnelle et un de ses représentants. Ainsi, on dira (abusivement) : la fraction $\frac{X^2 - 2}{X^2 + 2X + 1}$ est irréductible.

☞ PREMIERS, PGCD.

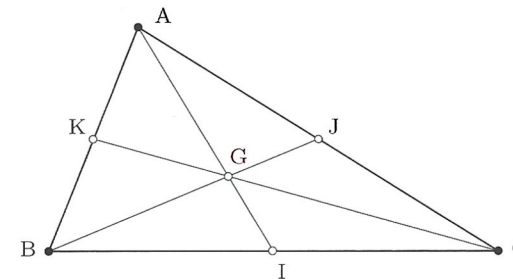
Polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$ Élément irréductible de l'anneau $\mathbb{K}[X]$. ♦ Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est donc irréductible s'il ne peut s'écrire sous la forme d'un produit $P = QR$ de deux polynômes non constants. En d'autres termes, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré supérieur ou égal à 1 dont les seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes associés à P .

REMARQUE : Dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes irréductibles sont ceux de degré 1. C'est une conséquence immédiate du théorème de d'Alembert-Gauss. ♦ Dans $\mathbb{R}[X]$, ce sont d'une part les polynômes de degré 1, et d'autre part les polynômes de degré 2 et de discriminant strictement négatif, c'est-à-dire les polynômes de la forme $aX^2 + bX + c$ tels que $b^2 - 4ac < 0$.

☞ DÉCOMPOSITION, POLYNÔMES *ASSOCIÉS.

ISOBARYCENTRE

Dans un espace affine $\mathcal{E}$, l'isobarycentre de n points $A_1, \dots, A_n$ est le barycentre de ces points, pondérés par le même coefficient 1. ♦ Dans un triangle (ABC) non plat, l'isobarycentre de A, B, C est le point de concours des médianes.



☞ MÉDIANE, TRIANGLE.

ISOLÉ

Un point a d'une partie A d'un espace vectoriel normé est isolé s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que $\mathcal{V} \cap A = \{a\}$. ♦ Un point isolé de A est donc un point adhérent à A , mais qui n'est pas point d'accumulation.

Exemples : Dans $\mathbb{N}$, chaque point est isolé. ♦ Dans l'ensemble $A = \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, le point 0 n'est pas isolé ; tous les autres le sont.

Principe des zéros isolés ☞ ZÉRO.

ISOMÉTRIE

Isométrie entre espaces vectoriels normés Application $u : E \rightarrow F$ d'un espace vectoriel normé dans un autre, qui préserve les longueurs :

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\|_F = \|x\|_E.$$

♦ Dans un espace euclidien, un endomorphisme est une isométrie si et seulement si c'est un automorphisme orthogonal.

Exemples : Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne, les isométries sont les rotations et les symétries orthogonales. ♦ Dans $\mathbb{R}^3$, ce sont les rotations, les symétries orthogonales, et les composées de celles-ci. ♦ Notons E l'espace vectoriel des fonctions complexes continues sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodiques, et $F = \ell^2(\mathbb{Z})$ l'espace vectoriel des suites complexes indexées par $\mathbb{Z}$, de carré sommable. Ces espaces sont munis de normes naturelles définies par

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 \quad \|u\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^2.$$

L'application $\mathcal{F} : E \rightarrow F$ qui à une fonction f associe la suite $\mathcal{F}(f) = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier est une isométrie de E dans F (théorème de Parseval).

✎ ENDOMORPHISME *ORTHOGONAL.

Isométrie dans un espace affine euclidien Application affine dont la partie linéaire est un automorphisme orthogonal.

Exemple : Dans l'espace affine $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^3$, citons les translations, les rotations, les *vissages (composés d'une rotation et d'une translation selon l'axe de la rotation).

ISOMORPHE

Deux espaces vectoriels E et F sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de l'un sur l'autre. On écrit alors $E \simeq F$.

Exemples : Si E et F sont de même dimension finie n , alors ils sont isomorphes. On peut construire un isomorphisme en munissant E d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et F d'une base $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$, et en définissant l'application linéaire $\varphi : E \rightarrow F$ par son action sur $\mathcal{B}$:

$$\forall k \in [1; n] \quad \varphi(e_k) = f_k.$$

♦ Les espaces $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes et, le plus souvent, l'isomorphisme est sous-entendu. Ainsi, si $x \in \mathbb{K}^n$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, on écrira volontiers Ax au lieu de AX où X est le vecteur colonne associé à x :

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On dit dans ce cas que l'on a *identifié* les deux espaces $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

✎ ISOMORPHISME *CANONIQUE. :

ISOMORPHISME

Nom générique donné à un morphisme bijectif.

Isomorphisme entre deux espaces vectoriels Application linéaire $u : E \rightarrow F$ d'un espace vectoriel sur un autre, qui est de plus bijective (invertible). ♦ S'il existe un isomorphisme entre E et F , ces espaces sont dits *isomorphes*.

REMARQUE : Si E et F sont de dimension finie et si leurs dimensions sont égales, une application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si et seulement si c'est un isomorphisme. Il est donc, le plus souvent, conseillé de ne prouver *que* l'injectivité. ♦ De même, si E et F sont de dimension finie et si leurs dimensions sont égales, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective si et seulement si c'est un isomorphisme.

Isomorphisme de groupe Morphisme bijectif de groupe.

REMARQUES : Si G et G' sont deux groupes finis, et si $\varphi : G \rightarrow G'$ est un isomorphisme de groupe, alors $|G| = |G'|$. ♦ Si G et G' sont deux groupes finis de même ordre, et si $\varphi : G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupe, alors c'est un isomorphisme si, et seulement si, il est injectif, c'est-à-dire si $\text{Ker } \varphi = \{e\}$ où e est l'élément neutre du groupe G . De même, c'est un isomorphisme si et seulement si il est surjectif.

✎ MORPHISME DE GROUPE, NOYAU.

IWASAWA Kenkichi (1917-1998)
(Mathématicien japonais)

✎ DÉCOMPOSITION D'IWASAWA.

J

JACOBI Carl Gustav Jacob (1804-1851)
(Mathématicien allemand)

« La véritable finalité de la science est l'honneur de l'esprit humain. »

JACOBIEN

Matrice jacobienne Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, munis de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soient U un ouvert de E et $f : U \rightarrow V$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. La matrice jacobienne $\mathcal{J}_f(a)$ de f en a relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la matrice représentative, dans ces bases, de la différentielle $df(a)$ de f en a . ♦ Dans le cas où $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^n$ sont munis de leurs bases canoniques, la matrice jacobienne a l'expression suivante :

$$\mathcal{J}_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}.$$

Déterminant jacobien Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $f : E \rightarrow E$ une application différentiable en un point a . Le (déterminant) jacobien de f en a est le déterminant de sa différentielle $df(a)$. ♦ C'est donc également le déterminant de sa matrice jacobienne relative à une base quelconque de E : $J_f(a) = \det \mathcal{J}_f(a)$.

✎ DIFFÉOMORPHISME, THÉORÈME D'INVERSION LOCALE/GLOBALE.

JENSEN Johan (1859-1925)
(Mathématicien danois)

Les inégalités de Jensen généralisent les inégalités de convexité.

Inégalité discrète de Jensen Soit φ une fonction convexe définie sur un intervalle I . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, pour tout n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ de réels, et pour tout n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0; 1]^n$ tel que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$,

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i).$$

Inégalité intégrale de Jensen Soit φ une fonction convexe. Soit f une fonction continue par morceaux, positive, intégrable et telle que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$. Soit g une fonction continue et à valeurs réelles. Alors

$$\varphi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx \right) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(g(x)) f(x) dx.$$

JORDAN Camille (1838-1922)
(Mathématicien français)

Arc de Jordan Arc paramétré $([a; b], \gamma)$, où γ est une application injective définie sur un segment $[a; b]$ et à valeurs dans le plan. Un arc de Jordan est donc un arc simple. ♦ Un arc *fermé* de Jordan est un arc $\gamma : [a; b] \rightarrow E$, dont la restriction à $[a; b[$ est injective, et dont les extrémités coïncident : $\gamma(a) = \gamma(b)$.