

Exemples : Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne, les isométries sont les rotations et les symétries orthogonales. ♦ Dans $\mathbb{R}^3$, ce sont les rotations, les symétries orthogonales, et les composées de celles-ci. ♦ Notons E l'espace vectoriel des fonctions complexes continues sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodiques, et $F = \ell^2(\mathbb{Z})$ l'espace vectoriel des suites complexes indexées par $\mathbb{Z}$, de carré sommable. Ces espaces sont munis de normes naturelles définies par

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 \quad \|u\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^2.$$

L'application $\mathcal{F} : E \rightarrow F$ qui à une fonction f associe la suite $\mathcal{F}(f) = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier est une isométrie de E dans F (théorème de Parseval).

✎ ENDOMORPHISME *ORTHOGONAL.

Isométrie dans un espace affine euclidien Application affine dont la partie linéaire est un automorphisme orthogonal.

Exemple : Dans l'espace affine $\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^3$, citons les translations, les rotations, les *vissages (composés d'une rotation et d'une translation selon l'axe de la rotation).

ISOMORPHE

Deux espaces vectoriels E et F sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de l'un sur l'autre. On écrit alors $E \simeq F$.

Exemples : Si E et F sont de même dimension finie n , alors ils sont isomorphes. On peut construire un isomorphisme en munissant E d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et F d'une base $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$, et en définissant l'application linéaire $\varphi : E \rightarrow F$ par son action sur $\mathcal{B}$:

$$\forall k \in [1; n] \quad \varphi(e_k) = f_k.$$

♦ Les espaces $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes et, le plus souvent, l'isomorphisme est sous-entendu. Ainsi, si $x \in \mathbb{K}^n$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, on écrira volontiers Ax au lieu de AX où X est le vecteur colonne associé à x :

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On dit dans ce cas que l'on a *identifié* les deux espaces $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

✎ ISOMORPHISME *CANONIQUE.

ISOMORPHISME

Nom générique donné à un morphisme bijectif.

Isomorphisme entre deux espaces vectoriels Application linéaire $u : E \rightarrow F$ d'un espace vectoriel sur un autre, qui est de plus bijective (invertible). ♦ S'il existe un isomorphisme entre E et F , ces espaces sont dits *isomorphes*.

REMARQUE : Si E et F sont de dimension finie et si leurs dimensions sont égales, une application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si et seulement si c'est un isomorphisme. Il est donc, le plus souvent, conseillé de ne prouver *que* l'injectivité. ♦ De même, si E et F sont de dimension finie et si leurs dimensions sont égales, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective si et seulement si c'est un isomorphisme.

Isomorphisme de groupe Morphisme bijectif de groupe.

REMARQUES : Si G et G' sont deux groupes finis, et si $\varphi : G \rightarrow G'$ est un isomorphisme de groupe, alors $|G| = |G'|$. ♦ Si G et G' sont deux groupes finis de même ordre, et si $\varphi : G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupe, alors c'est un isomorphisme si, et seulement si, il est injectif, c'est-à-dire si $\text{Ker } \varphi = \{e\}$ où e est l'élément neutre du groupe G . De même, c'est un isomorphisme si et seulement si il est surjectif.

✎ MORPHISME DE GROUPE, NOYAU.

IWASAWA Kenkichi (1917–1998)

(Mathématicien japonais)

✎ DÉCOMPOSITION D'IWASAWA.

J

JACOBI Carl Gustav Jacob (1804–1851)

(Mathématicien allemand)

« La véritable finalité de la science est l'honneur de l'esprit humain. »

JACOBIEN

Matrice jacobienne Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, munis de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soient U un ouvert de E et $f : U \rightarrow V$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. La matrice jacobienne $\mathcal{J}_f(a)$ de f en a relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la matrice représentative, dans ces bases, de la différentielle $df(a)$ de f en a . ♦ Dans le cas où $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^n$ sont munis de leurs bases canoniques, la matrice jacobienne a l'expression suivante :

$$\mathcal{J}_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}.$$

Déterminant jacobien Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $f : E \rightarrow E$ une application différentiable en un point a . Le (déterminant) jacobien de f en a est le déterminant de sa différentielle $df(a)$. ♦ C'est donc également le déterminant de sa matrice jacobienne relative à une base quelconque de E : $J_f(a) = \det \mathcal{J}_f(a)$.

✎ DIFFÉOMORPHISME, THÉORÈME D'*INVERSION LOCALE/GLOBALE.

JENSEN Johan (1859–1925)

(Mathématicien danois)

Les inégalités de Jensen généralisent les inégalités de convexité.

Inégalité discrète de Jensen Soit φ une fonction convexe définie sur un intervalle I . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, pour tout n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ de réels, et pour tout n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0; 1]^n$ tel que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$,

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i).$$

Inégalité intégrale de Jensen Soit φ une fonction convexe. Soit f une fonction continue par morceaux, positive, intégrable et telle que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$. Soit g une fonction continue et à valeurs réelles. Alors

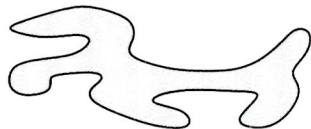
$$\varphi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx \right) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(g(x)) f(x) dx.$$

JORDAN Camille (1838–1922)

(Mathématicien français)

Arc de Jordan Arc paramétré $([a; b], \gamma)$, où γ est une application injective définie sur un segment $[a; b]$ et à valeurs dans le plan. Un arc de Jordan est donc un arc simple. ♦ Un arc *fermé* de Jordan est un arc $\gamma : [a; b] \rightarrow E$, dont la restriction à $[a; b[$ est injective, et dont les extrémités coïncident : $\gamma(a) = \gamma(b)$.

REMARQUE : Un fameux théorème stipule que, dans le plan, un arc fermé de Jordan partage le plan en deux composantes connexes : l'une est bornée, l'autre pas. C'est un résultat technique à montrer, bien qu'il soit connu des jeunes enfants en âge de tenir un crayon de couleur. Dans la figure ci-dessous apparaît, en grisé, la partie connexe bornée du plan délimitée par cet arc.



Bloc, ou matrice de Jordan Matrice carrée de la forme

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Forme réduite de Jordan Matrice diagonale par blocs, dont les blocs sont tous des matrices de Jordan.

REMARQUES : Toute matrice complexe est semblable à une matrice réduite de Jordan. Les tailles des blocs de Jordan dépendent uniquement des dimensions des noyaux $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})^k$, pour $\lambda \in \text{Sp } u$ et $k \in [0; n]$. ♦ On peut, la plupart du temps, se contenter de savoir qu'une matrice complexe est trigonalisable.

JULIA Gaston (1893–1978)
(Mathématicien français)

Ensembles de Julia Soit c un nombre complexe fixé. On définit la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme z_0 et la relation de récurrence $z_{n+1} = z_n^2 + c$. L'ensemble J_c associé au complexe c est l'ensemble des complexes z_0 tels que la suite ainsi définie reste bornée. ♦ Si c est élément de l'ensemble de Mandelbrot, alors J_c est connexe ; sinon, il est composé d'une « poussière » de points, dont aucun n'est isolé.

☞ MANDELBROT.

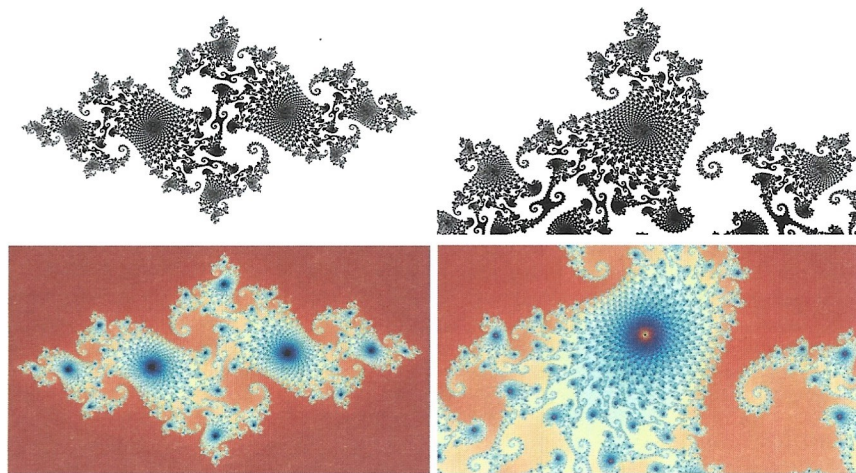


Fig. 54 — Un ensemble de Julia, pour la valeur de $c = -0,74542 + 0,11301i$, ainsi qu'un détail de cet ensemble. Sur la deuxième ligne, la couleur indique la vitesse à laquelle la suite de terme général $|z_n|$ diverge.

K

K

La lettre **K** désigne souvent un corps commutatif et de caractéristique nulle, et plus spécialement un sous-corps de $\mathbb{C}$ (comme $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$,...). ♦ Sous la forme $\mathbb{K}$, elle désigne spécifiquement l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

KEPLER Johannes (1571–1630)
(Astronome allemand)

Formule de Kepler L'aire d'un domaine Δ dont le bord $\partial\Delta$ est défini par l'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$ vaut

$$\mu(\Delta) = \iint_{\Delta} r \, dr \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta) \, d\theta.$$

REMARQUE : Cette formule se démontre en deux temps : passage en coordonnées polaires, puis appel au théorème de Fubini et intégration sur la variable $r \in]0; \rho(\theta)[$. ☞ AIRE.

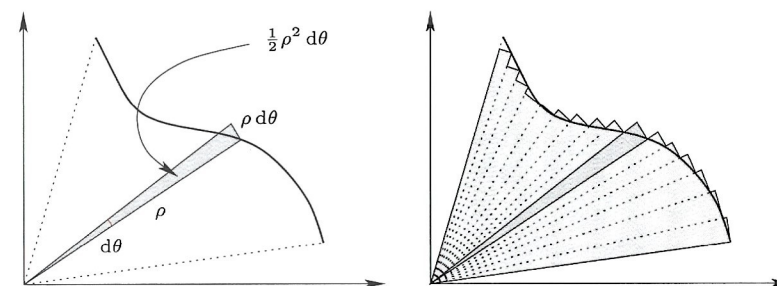


Fig. 55 — Un triangle « élémentaire » d'aire $\frac{1}{2} \rho^2(\theta) \, d\theta$, et la somme des aires des triangles élémentaires, égale, au premier ordre, à l'aire du secteur.

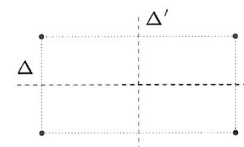
KER

« $\text{Ker } f$ » désigne le noyau du morphisme f (de l'allemand *Kern* : noyau). ☞ NOYAU.

KLEIN Felix (1849–1925)
(Mathématicien allemand)

Groupe de Klein Il n'existe, à un isomorphisme près, que deux groupes d'ordre 4. Le premier, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, est un groupe cyclique. Le second, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, est appelé groupe de Klein. Il est commutatif, non cyclique.

REMARQUE : Le groupe des isométries du plan laissant invariant un rectangle est isomorphe au groupe de Klein. Il est constitué de l'identité Id , de la symétrie s par rapport à la droite Δ , de la symétrie s' par rapport à la droite Δ' et de la composée $c = s \circ s' = s' \circ s$, qui est évidemment une symétrie centrale. La table de multiplication du groupe de Klein est donnée ci-dessous.



	Id	s	s'	c
e	Id	s	s'	c
s	s	Id	c	s'
s'	s'	c	Id	s
c	c	s'	s	Id