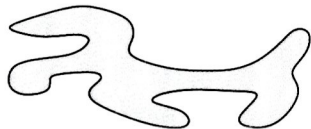


REMARQUE : Un fameux théorème stipule que, dans le plan, un arc fermé de Jordan partage le plan en deux composantes connexes : l'une est bornée, l'autre pas. C'est un résultat technique à montrer, bien qu'il soit connu des jeunes enfants en âge de tenir un crayon de couleur. Dans la figure ci-dessous apparaît, en grisé, la partie connexe bornée du plan délimitée par cet arc.



Bloc, ou matrice de Jordan Matrice carrée de la forme

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Forme réduite de Jordan Matrice diagonale par blocs, dont les blocs sont tous des matrices de Jordan.

REMARQUES : Toute matrice complexe est semblable à une matrice réduite de Jordan. Les tailles des blocs de Jordan dépendent uniquement des dimensions des noyaux $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})^k$, pour $\lambda \in \text{Sp } u$ et $k \in [0; n]$. ♦ On peut, la plupart du temps, se contenter de savoir qu'une matrice complexe est trigonalisable.

JULIA Gaston (1893–1978)
(Mathématicien français)

Ensembles de Julia Soit c un nombre complexe fixé. On définit la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme z_0 et la relation de récurrence $z_{n+1} = z_n^2 + c$. L'ensemble J_c associé au complexe c est l'ensemble des complexes z_0 tels que la suite ainsi définie reste bornée. ♦ Si c est élément de l'ensemble de Mandelbrot, alors J_c est connexe ; sinon, il est composé d'une « poussière » de points, dont aucun n'est isolé.

☞ MANDELBROT.

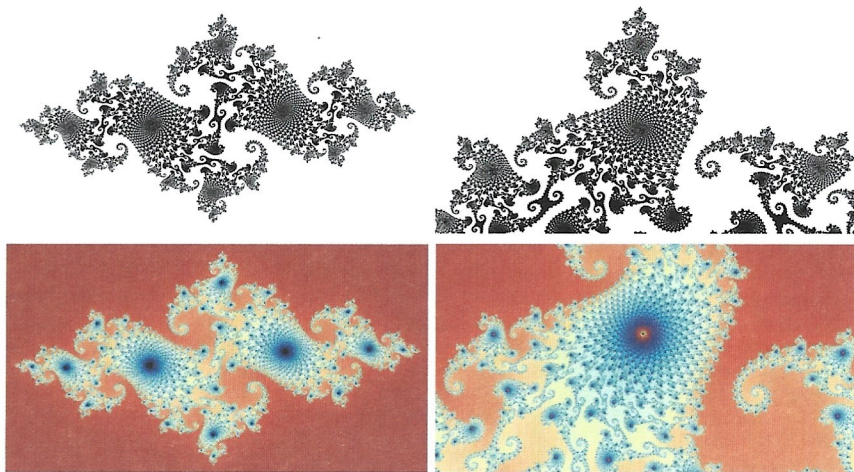


Fig. 54 — Un ensemble de Julia, pour la valeur de $c = -0,74542 + 0,11301i$, ainsi qu'un détail de cet ensemble. Sur la deuxième ligne, la couleur indique la vitesse à laquelle la suite de terme général $|z_n|$ diverge.

K

K

La lettre K désigne souvent un corps commutatif et de caractéristique nulle, et plus spécialement un sous-corps de $\mathbb{C}$ (comme $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$,...). ♦ Sous la forme $\mathbb{K}$, elle désigne spécifiquement l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

KEPLER Johannes (1571–1630)
(Astronome allemand)

Formule de Kepler L'aire d'un domaine Δ dont le bord $\partial\Delta$ est défini par l'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$ vaut

$$\mu(\Delta) = \iint_{\Delta} r \, dr \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta) \, d\theta.$$

REMARQUE : Cette formule se démontre en deux temps : passage en coordonnées polaires, puis appel au théorème de Fubini et intégration sur la variable $r \in]0; \rho(\theta)[$. ☞ AIRE.

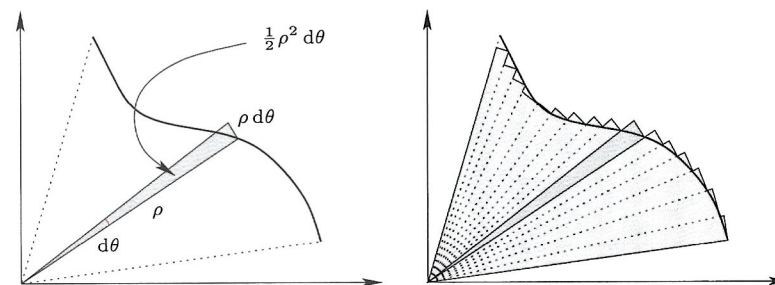


Fig. 55 — Un triangle « élémentaire » d'aire $\frac{1}{2} \rho^2(\theta) d\theta$, et la somme des aires des triangles élémentaires, égale, au premier ordre, à l'aire du secteur.

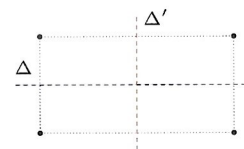
KER

« $\text{Ker } f$ » désigne le noyau du morphisme f (de l'allemand *Kern* : noyau). ☞ NOYAU.

KLEIN Felix (1849–1925)
(Mathématicien allemand)

Groupe de Klein Il n'existe, à un isomorphisme près, que deux groupes d'ordre 4. Le premier, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, est un groupe cyclique. Le second, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, est appelé groupe de Klein. Il est commutatif, non cyclique.

REMARQUE : Le groupe des isométries du plan laissant invariant un rectangle est isomorphe au groupe de Klein. Il est constitué de l'identité Id , de la symétrie s par rapport à la droite Δ , de la symétrie s' par rapport à la droite Δ' et de la composée $c = s \circ s' = s' \circ s$, qui est évidemment une symétrie centrale. La table de multiplication du groupe de Klein est donnée ci-dessous.



	Id	s	s'	c
e	Id	s	s'	c
s	s	Id	c	s'
s'	s'	c	Id	s
c	c	s'	s	Id

KOCH *Niels Fabian Helge von* (1870–1924)
(Mathématicien suédois)

Flocon de von Koch Courbe fractale, de longueur infinie, continue et nulle part dérivable, obtenue comme limite d'une famille de courbes (voir figure 56).

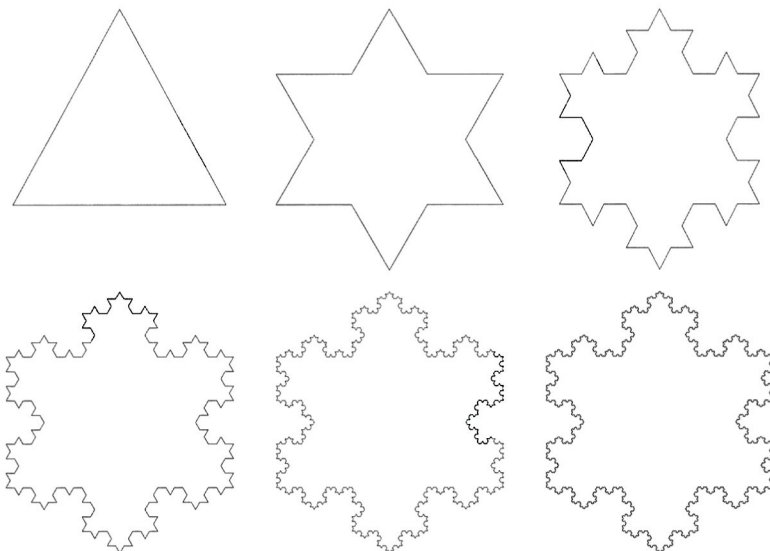


Fig. 56 — Premières itérations du flocon de von Koch. La dernière est visuellement très proche du véritable flocon. L'aire totale du flocon est égale à $8/5$ fois l'aire du premier triangle. La longueur totale de la courbe est infinie.

KÖNIG (OU KÖENIG) *Samuel* (1712–1757)
(Mathématicien allemand)

Formules de König-Huygens Soient X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 (c'est-à-dire admettant une variance, et donc une espérance). Notons $X' = X - E(X)$ et $Y' = Y - E(Y)$ les variables centrées correspondantes. Alors

$$V(X) = E(X'^2) = E(X^2) - E(X)^2,$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X'Y') = E(XY) - E(X)E(Y).$$

KRONECKER *Leopold* (1823–1891)
(Mathématicien allemand)

« Les nombres entiers sont l'œuvre de Dieu, tout le reste est fait par l'homme. »

Symbole de Kronecker Quantité définie par

$$\delta_{i,j} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

REMARQUE : Si $i \in I$ est un indice déterminé, $\sum_{j \in I} a_j \delta_i^j = a_i$. La recette est donc : on enlève le signe somme et on garde pour la valeur de l'indice courant la valeur de l'indice extérieur. Attention, toutefois, si i est un indice ne faisant pas partie de la liste I parcourue par j , alors la somme est nulle.

Produit de Kronecker de deux matrices Soient $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{rs}(\mathbb{K})$ deux matrices. Leur produit de Kronecker est la (pr, qs) -matrice définie par blocs de la manière suivante :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1q}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2q}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}B & a_{p2}B & \cdots & a_{pq}B \end{pmatrix}$$

REMARQUE : C'est un cas particulier de *produit tensoriel* (dont la définition est malheureusement trop longue pour être exposée ici). ♦ Il est bilinéaire et vérifie les propriétés suivantes (si les tailles des matrices sont compatibles) :

$$(A \otimes B) \cdot (A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB').$$

♦ Notamment, $A \otimes B$ est inversible si et seulement si A et B le sont et, dans ce cas, $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$. ♦ Enfin, et c'est parfois l'objet d'un exercice, si A et B sont diagonalisables sous la forme $A = PDP^{-1}$ et $B = Q\Delta Q^{-1}$, alors $A \otimes B$ est diagonalisable :

$$A \otimes B = (P \otimes Q) \cdot (D \otimes \Delta) \cdot (P^{-1} \otimes Q^{-1}).$$