

L

 ℓ^1

Espace vectoriel, parfois noté $\ell^1(\mathbb{N})$, des séries complexes absolument convergentes, muni de la norme définie par $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

REMARQUE : On définit également $\ell^1(\mathbb{Z})$, espace vectoriel des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sommables. $\star$ SOMMABLE.

 ℓ^2

Espace vectoriel préhilbertien, parfois noté $\ell^2(\mathbb{N})$, des séries complexes de carré sommable, c'est-à-dire telles que $\sum |u_n|^2$ converge, muni du produit scalaire et de la norme associée définis par

$$\langle u|v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{u_n} v_n \quad \|u\|_2^2 = \langle u|u \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2$$

REMARQUES : On définit également $\ell^2(\mathbb{Z})$, espace vectoriel des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de carré sommable. Si f est une fonction 2π -périodique et continue par morceaux, la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier est un élément de $\ell^2(\mathbb{Z})$. $\star$ SOMMABLE. $\blacklozenge$ L'espace $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ est complet. Muni de son produit scalaire, c'est donc un espace de Hilbert.

 ℓ^∞

Espace vectoriel, également noté $\ell^\infty(\mathbb{N})$, des suites bornées. $\blacklozenge$ Il est naturellement muni de la norme définie par $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

 $\mathcal{L}^1$

On note $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues par morceaux et intégrables sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Il est naturellement muni de la semi-norme définie par

$$\|f\|_1 = \int_I |f|.$$

L'application $f \mapsto \|f\|_1$ devient une norme quand on la restreint au sous-espace vectoriel des fonctions continues et intégrables sur I .

 $\mathcal{L}^2$

On note $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications continues par morceaux, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et de carré intégrable sur I . $\blacklozenge$ Il est naturellement muni de la semi-norme

$$\|f\|_2 = \left(\int_I |f|^2 \right)^{1/2}.$$

$\blacklozenge$ L'application $f \mapsto \|f\|_2$ devient une norme quand on la restreint au sous-espace vectoriel des fonctions qui sont, de plus, continues ; cette norme est associée au produit scalaire

$$\langle f|g \rangle = \int_I \bar{f} g$$

qui fait de $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K}) \cap \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ un espace préhilbertien.

 $\mathcal{L}(E), \mathcal{L}(E, F)$

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, on note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E . $\blacklozenge$ Si E et F sont des espaces vectoriels, $\mathcal{L}(E, F)$ est l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F . $\blacklozenge$ Si E et F sont des espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}_c(E, F)$ le sous-espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F .

REMARQUE : Si E est de dimension finie, alors $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.

LAGRANGE *Joseph Louis (comte de) (1736–1813)*

(Mathématicien et physicien français)

Égalité de Lagrange dans le plan Soient a et b deux vecteurs du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\text{Det}(a, b)^2 + \langle a|b \rangle^2 = \|a\|^2 \|b\|^2.$$

REMARQUE : Si l'on munit $\mathbb{R}^2$ d'une base orthonormée et si l'on note (x, y) et (x', y') les coordonnées de a et de b dans cette base, l'égalité de Lagrange devient

$$(xy' - x'y)^2 + (xx' + yy')^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2).$$

Elle permet notamment de vérifier que l'ensemble des entiers qui sont somme de deux carrés est stable par multiplication.

Égalité de Lagrange dans l'espace Soient a et b deux vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$, alors

$$\|a \wedge b\|^2 + \langle a|b \rangle^2 = \|a\|^2 \|b\|^2.$$

REMARQUE : Cette relation vient du fait que, si θ est une mesure de l'angle entre les vecteurs a et b , alors $\|a \wedge b\| = \|a\| \|b\| |\sin \theta|$ tandis que $\langle a|b \rangle = \|a\| \|b\| \cos \theta$.

Interpolation de Lagrange Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels distincts et $b_1, \dots, b_n$ des réels quelconques. Alors, il existe un unique polynôme L de degré au plus égal à $n-1$ vérifiant

$$\forall k \in [1; n] \quad L(a_k) = b_k.$$

Ce polynôme est lié à la famille des polynômes élémentaires de Lagrange par

$$L = \sum_{k=1}^n b_k L_k.$$

REMARQUE : Le polynôme ainsi construit permet donc d'interpoler les valeurs d'une fonction connue en n points. Cependant, la qualité de l'interpolation peut être très mauvaise si l'on choisit mal les points $(a_1, \dots, a_n)$, par exemple si ceux-ci sont régulièrement espacés (phénomène de "Runge") ; de même si deux points d'interpolation a_i et a_j sont très proches l'un de l'autre, et que les valeurs b_i et b_j sont entachées d'erreur (cas d'une observation physique). On obtient de meilleurs résultats par une répartition judicieuse de $(a_1, \dots, a_n)$ (à une transformation affine près, la meilleure répartition pour une fonction analytique est donnée par les abscisses des polynômes de Tchebychev).

$\star$ POLYNÔMES ÉLÉMENTAIRES DE LAGRANGE, RUNGE, TCHEBYCHEV.

Multiplicateurs de Lagrange Considérons une partie $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^n$, définie par un système de d équations

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n ; f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_d(x) = 0\}.$$

Pour que $\mathcal{S}$ soit bien une « surface » de dimension $n-d$, on suppose que les fonctions f_k sont toutes différentiables et que leurs différentielles sont linéairement indépendantes. Soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique différentiable. Si la restriction de g à $\mathcal{S}$ admet un extremum en un point $a \in \mathcal{S}$, alors la différentielle de g en a est nulle

sur l'espace tangent à $\mathcal{S}$ en a . Cela revient à dire que $dg(a)$ est combinaison linéaire des $df_k(a)$:

$$dg(a) = \sum_{k=1}^d \lambda_k df_k(a).$$

Les scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

REMARQUE : Certaines quantités physiques apparaissent naturellement comme des multiplicateurs de Lagrange. C'est le cas de la température en thermodynamique (ou, plus précisément, de la quantité $\beta = 1/k_B T$, où k_B est la constante de Boltzmann).

Polynômes élémentaires de Lagrange Si $(a_1, \dots, a_n)$ est une famille de réels (ou de complexes) distincts, on définit, pour tout $k \in [1; n]$:

$$L_k = \prod_{i \neq k} \frac{(X - a_i)}{(a_k - a_i)}.$$

La famille $(L_1, \dots, L_n)$ est appelée famille des *polynômes élémentaires de Lagrange* associée à $(a_1, \dots, a_n)$. ♦ Ils vérifient $L_k(a_j) = \delta_j^k$ pour tous $j, k \in [1; n]$. La famille $(L_1, \dots, L_n)$ est donc une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, antédual de la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]^*$ définie par $\varphi_k(P) = P(a_k)$ pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. ♦ Par suite, tout polynôme de degré au plus n se décompose sur cette base :

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \quad P = \sum_{k=1}^n P(a_k) L_k.$$

♦ Il est possible d'écrire les polynômes élémentaires sous la forme

$$L_k = \frac{N(X)}{N'(a_k) \cdot (X - a_k)} \quad \text{avec} \quad N = \prod_{k=1}^n (X - a_k)$$

☞ BASE DUALE, BASE ANTÉDUALE, KRONECKER.

Reste de Lagrange ☞ ÉGALITÉ DE TAYLOR-LAGRANGE.

Théorème de Lagrange Soit G un groupe fini. L'ordre de tout élément g de G divise l'ordre de G . ♦ De manière générale, l'ordre de tout sous-groupe de G divise celui de G .

LAGUERRE *Edmond Nicolas* (1834-1886)
(Mathématicien français)

Polynômes de Laguerre Famille de polynômes définis par

$$L_n = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [x^n e^{-x}]$$

♦ Ils sont orthogonaux pour le produit scalaire

$$\langle P|Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt.$$

et vérifient $\|L_n\|^2 = 1$.

☞ POLYNÔMES ORTHOGONAUX.

LAPLACE *Pierre Simon (marquis de)* (1749-1827)
(Mathématicien, physicien et astronome français)

Équation de Laplace Dans l'espace $\mathbb{R}^n$, équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0,$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction inconnue de n variables. Les solutions de cette équation sont appelées *fonctions harmoniques*.

REMARQUES : Cette équation est fondamentale en physique. Notamment, le potentiel (gravitationnel ou électrostatique) dans le vide vérifie cette équation. ♦ Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, et si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction dérivable (on dit : *holomorphe*), alors ses parties réelle et imaginaire sont harmoniques (en assimilant bien sûr le plan complexe $\mathbb{C}$ au plan $\mathbb{R}^2$ par la correspondance $z = x + iy$). ♦ Notamment, toute fonction développable en série entière est harmonique.

Transformée de Laplace Si $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux, sa transformée de Laplace est la fonction, définie chaque fois que l'intégrale ci-dessous est convergente par

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

(La variable s peut être réelle ou complexe.)

REMARQUE : L'application $f \mapsto F$ est appelée *transformation de Laplace*. Elle permet, dans certains cas, de ramener la résolution de certaines équations différentielles avec une condition initiale en $t = 0$, à la résolution d'équations algébriques. ♦ L'ensemble des complexes s tels que $t \mapsto f(t) e^{-st}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, est soit vide, soit un demi-plan ouvert d'équation $\Re(s) > \alpha$, soit un demi-plan fermé $\Re(s) \geq \alpha$, soit $\mathbb{C}$ tout entier.

LAPLACIEN

Opérateur différentiel

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

♦ Il s'applique à des fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Par extension, il s'applique à des fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{K}^p$.

REMARQUES : Dans $\mathbb{R}^3$ ou dans $\mathbb{R}^n$, on a la relation $\Delta f = \operatorname{div} [\operatorname{grad} f]$. ♦ On note parfois $\nabla^2 f$ au lieu de Δf .

Exemple : Si ρ est une densité de charges dans l'espace, le potentiel scalaire V vérifie l'équation de Poisson : $\Delta V = -4\pi\rho/\varepsilon_0$.

☞ ÉQUATION DE *LAPLACE.

LEBESGUE *Henri* (1875-1941)
(Mathématicien français)

Lemme de Riemann-Lebesgue ☞ RIEMANN.

Propriété de Borel-Lebesgue ☞ BOREL.

Théorème de convergence dominée de Lebesgue ☞ CONVERGENCE DOMINÉE.

Courbe de Lebesgue Courbe $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]^2$ continue et surjective, c'est-à-dire remplissant entièrement le carré. C'est un cas particulier de courbe de *Peano. ♦

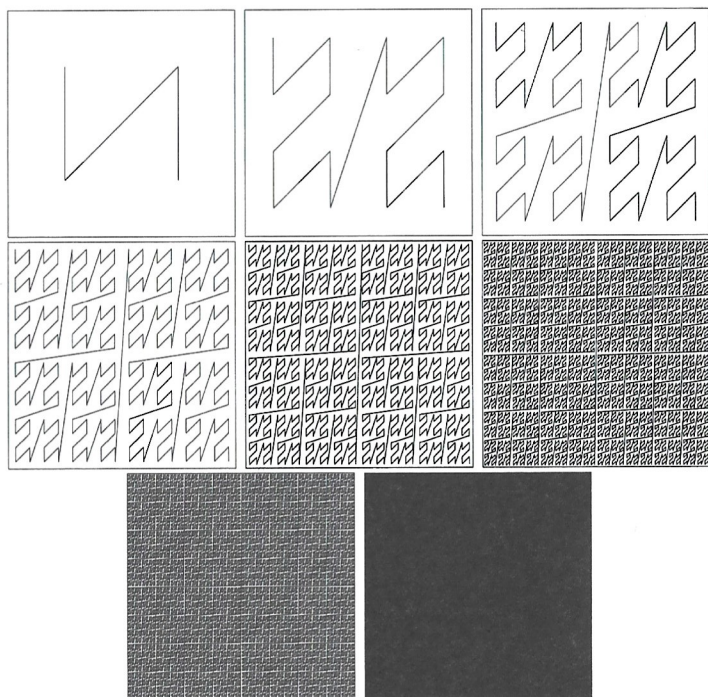


Fig. 57 — Courbe de Lebesgue : les premières itérations. La courbe limite est la courbe de Lebesgue, qui remplit entièrement le carré, et qui s'auto-intersecte une infinité de fois. Contrairement à la courbe de Peano (qui n'est nulle part différentiable), la courbe de Lebesgue est presque partout différentiable, ce qui n'est pas intuitif...

LEGENDRE *Adrien Marie* (1752–1833)
(Mathématicien français)

Polynômes de Legendre Famille de polynômes définis par

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

♦ Ils sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle P|Q \rangle = \int_{-1}^{+1} P(t) Q(t) dt$ et vérifient $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$.

REMARQUE : Ces polynômes sont utilisés pour exprimer le développement de l'inverse de la distance entre un point fixe et un point sur une sphère, repéré par ses coordonnées sphériques (méthode dite des *harmoniques sphériques*).

☞ POLYNÔMES ORTHOGONAUX.

LEIBNIZ *Gottfried Wilhelm* (1646–1716)
(Mathématicien et philosophe allemand)

Formule de Leibniz Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés et B une application bilinéaire continue de $F \times G$ dans H . Si $f : I \rightarrow E$ et $g : I \rightarrow F$ sont de classe $\mathcal{C}^k$, alors

$B(f, g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout $n \in [0; k]$:

$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} B(f^{(i)}, g^{(n-i)}).$$

Exemple : Si f et g sont des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^n$, alors

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)} \cdot g^{(n-i)}.$$

Théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme Soit f une fonction définie sur le produit $A \times I$ de deux intervalles de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \partial f / \partial x(x, t)$ est continue par morceaux ;
- il existe une fonction positive $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t).$$

Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et, pour tout $x \in A$,

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

REMARQUE : Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ par rapport à sa première variable, si f et ses dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ sont intégrables par rapport à la seconde variable et si l'on peut les dominer uniformément par des fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ intégrables, alors g est de classe $\mathcal{C}^k$ et ses dérivées successives d'ordre 1 à k s'obtiennent en dérivant partiellement sous le signe somme.

☞ DOMINATION UNIFORME.

LEMME

Théorème dont l'utilité est, dans le cadre d'un ouvrage ou d'un cours, de démontrer des théorèmes plus importants, dont la démonstration est facilitée par le découpage en résultats intermédiaires.

Lemme des Bergers Soient A et B deux ensembles finis et $\varphi : A \rightarrow B$ une application telle que : pour tout $b \in B$, l'ensemble $\varphi^{-1}(\{b\})$ soit de cardinal k constant. Alors $\text{Card } A = k \cdot \text{Card } B$.

Exemple : Dans un troupeau de moutons, si l'on compte n pattes, alors il y a $n/4$ moutons. (Cette méthode, pourtant efficace, semble peu en vogue chez les bergers.)

Lemme chinois ☞ CHINOIS.

Lemme de commutation Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel euclidien E . Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u , ainsi que l'image de u , sont stables par v .

Lemme (de décomposition) des noyaux ☞ NOYAUX.

Lemme des pigeons / des chaussettes Autres noms du *principe des tiroirs* de Dirichlet.

Lemme de Riemann-Lebesgue ☞ RIEMANN.

LIBRE

Famille finie libre Soit E un espace vectoriel. Une famille finie $x_1, \dots, x_n$ de vecteurs de E est dite libre si

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0 \implies (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0).$$

♦ Si E est de dimension finie égale à n , alors toute famille libre possède au plus n vecteurs.

Famille infinie libre Une famille (infinie) $X = (x_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est dite libre si les seules combinaisons linéaires nulles sont les combinaisons triviales, c'est-à-dire celles dont tous les coefficients sont nuls :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall i_1, \dots, i_n \in I \text{ (distincts)} \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \\ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{i_k} = 0 \implies (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0).$$

♦ En utilisant la notion de famille *presque nulle* (ou : à support fini), cette relation s'écrit :

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \text{ presque nulle} \quad \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \implies (\forall i \in I \quad \lambda_i = 0).$$

♦ En d'autres termes : une famille infinie est libre si toute sous-famille finie est libre.

♦ Si la famille n'est pas libre, elle est dite *liée*.

✎ SUPPORT.

Famille libre d'espaces vectoriels Synonyme de famille d'espaces vectoriels en *somme directe.

LIÉE

Famille finie liée Soient E un espace vectoriel et $x_1, \dots, x_n$ une famille finie de vecteurs de E . Cette famille est dite liée si elle n'est pas libre, c'est-à-dire s'il existe une famille $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de scalaires *non tous nuls* telle que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$.

REMARQUE : Si λ_k est un indice non nul, alors la relation précédente montre que x_k appartient au sous-espace vectoriel engendré par les autres vecteurs.

Famille infinie liée Soient E un espace vectoriel et $(x_i)_{i \in I}$ une famille infinie de vecteurs de E . Cette famille est liée si elle n'est pas libre, c'est-à-dire s'il existe un entier naturel n non nul, une famille finie $(i_1, \dots, i_n)$ d'indices et une famille finie $(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n})$ de scalaires *non tous nuls*, telle que $\sum_{k=1}^n \lambda_{i_k} x_{i_k} = 0$.

LIGNES DE NIVEAU

✎ NIVEAU.

LIMITE

Limite d'une suite Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et soit $a \in E$. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet a pour limite si la suite de terme général $\|u_n - a\|$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies \|u_n - a\| \leq \varepsilon.$$

Exemple : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $N : P \mapsto \int_0^1 |P|$, la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme nul.

✎ PASSAGE À LA LIMITE, INTERVERSION DE LIMITES.

Limite d'une application en un point Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E , a un point adhérent à A et b un point de F . Soit enfin $f : A \rightarrow F$ une application. On dit que f admet b comme limite au point a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leq \delta \implies \|f(x) - b\| \leq \varepsilon.$$

Le point b est alors unique et on note $b = \lim_a f$ ou $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Limite à gauche/à droite Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I tel que $I \cap]a; +\infty[\neq \emptyset$. Une fonction f définie sur I et à valeurs dans un espace vectoriel normé F admet une limite b à droite en a si la restriction de f à $I \cap]a; +\infty[$ admet une limite en a .

Limite d'une famille de droites Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et t_0 un point de I . Soit u_0 un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. On dit qu'une famille $(D_t)_{t \in I \setminus \{t_0\}}$ de droites passant toutes par le point $M_0 = f(t_0)$ admet pour limite la droite $D = M_0 + \mathbb{R}u_0$ s'il existe une famille $(u(t))_{t \in I \setminus \{t_0\}}$ de vecteurs directeurs de ces droites de limite u_0 en t_0 .

✎ TANGENTE.

Limite d'une fonction en $\pm\infty$ Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non majorée ($+\infty$ est alors adhérent à A dans la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$). Soit f une application de A dans un espace vectoriel normé F , et soit $b \in F$. On dit que f admet b pour limite en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad x \geq M \implies \|f(x) - b\| \leq \varepsilon.$$

♦ Si A est non minorée, on dit que f admet b pour limite en $-\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A \quad x \leq M \implies \|f(x) - b\| \leq \varepsilon.$$

Limite infinie d'une fonction en un point Soient E un espace vectoriel normé, A une partie de E et a un point adhérent à A . Soit enfin $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application à valeurs réelles. On dit que f tend vers $+\infty$ en a si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leq \delta \implies f(x) \geq M,$$

et que f tend vers $-\infty$ en a si

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad \|x - a\| \leq \delta \implies f(x) \leq M.$$

REMARQUE : Les définitions qui précèdent peuvent toutes être mises sous une forme identique, en utilisant la notion de voisinage d'un point et de voisinage de l'infini. ✎ VOISINAGE.

Théorème de la double limite pour des fonctions Soient A une partie d'un espace vectoriel normé E et a un point adhérent à A . Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et à valeurs dans un espace vectoriel normé complet F . On suppose que :

- i) la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A ;
- ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite ℓ_n en a .

Alors la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ et f admet pour limite ℓ en a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

REMARQUE : Si l'espace de départ est $\mathbb{R}$, on peut considérer un voisinage A de $\pm\infty$, par exemple une partie de la forme $[b; +\infty[$ ou $]-\infty; b]$ et $a = \pm\infty$.

Théorème de la double limite pour des séries de fonctions Soit a un point adhérent à A , partie non vide d'un espace vectoriel normé E . Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé complet F . Si

i) $\sum f_n$ converge uniformément sur A ;

ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie ℓ_n en a ;

alors la série $\sum \ell_n$ converge, $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ admet une limite en a , égale à la somme de la série $\sum \ell_n$. En d'autres termes, on a pu *permuter* les symboles « somme » et « limite » :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

REMARQUE : Sans l'hypothèse de la convergence uniforme, tout peut arriver, même les choses les plus improbables, comme celle-ci : chaque fonction f_n tend vers $+\infty$ en $+\infty$, la série $\sum f_n$ converge mais sa somme S tend vers $-\infty$ en $+\infty$!! Pour s'en convaincre, on pourra considérer le développement en série entière $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$ de la fonction $S : x \mapsto \sin x - x$,

et poser $f_n = a_{4n-1} x^{4n-1} + a_{4n+1} x^{4n+1} = \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Sur

la figure ci-dessous, on représente les sommes partielles d'ordre 1 à 10 (en rouge) ainsi que la somme totale (en noir).

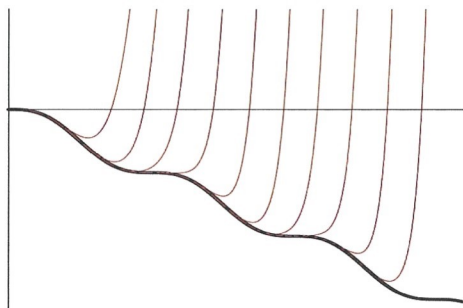


Fig. 58 — Un contre-exemple étonnant au théorème de la double limite lorsque la condition de convergence uniforme n'est pas satisfaite : chaque fonction f_n tend vers $+\infty$, et donc chaque somme partielle aussi (courbes rouges) mais la somme totale (en noir) tend vers $-\infty$.

Théorème de la limite centrée $\Leftarrow$ CENTRAL LIMITE.

LINÉAIRE

Application linéaire Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Une application linéaire de E dans F est une application $f : E \rightarrow F$ qui vérifie :

$$\forall x, y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

$\Leftarrow$ AUTOMORPHISME, ENDOMORPHISME, INJECTIVITÉ, SURJECTIVITÉ.

Équation différentielle linéaire $\Leftarrow$ ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE.

Système linéaire $\Leftarrow$ SYSTÈME.

LINÉARISER

En physique, linéariser une fonction au voisinage d'un point, c'est utiliser un développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction, c'est-à-dire écrire $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. $\blacklozenge$ Toujours en physique, linéariser une équation différentielle, c'est se placer au voisinage d'une solution connue et linéariser les coefficients de cette équation (s'ils correspondent à une force) ou bien les développer à l'ordre 2 au voisinage d'un équilibre (s'ils correspondent à un potentiel énergétique). On peut ainsi calculer une solution exacte d'une équation différentielle (linéaire) approchée ; il ne reste plus qu'à espérer obtenir une solution approchée du problème exact (ce qui est souvent le cas).

Exemple : Considérons un pendule pesant, constitué d'une masselotte de masse m fixée au bout d'une tige de longueur L et de masse négligeable, repéré par un angle θ par rapport à la verticale descendante. L'équation du mouvement de ce pendule est $mL\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$. On linéarise cette équation au voisinage de la solution d'équilibre $\theta(t) = 0$ en assimilant la valeur de $\sin \theta$ à θ ; on obtient alors $mL\ddot{\theta} + mg\theta = 0$ (équation de l'oscillateur harmonique).

$\blacklozenge$ Du point de vue énergétique, on obtient l'énergie totale du système comme une intégrale première du mouvement, en multipliant l'équation de Newton par le facteur intégrant $\dot{\theta}$. Si l'on part de l'équation originelle, on obtient une énergie égale à $E = \frac{1}{2} mL\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta + C^{\text{te}}$. Si l'on part de l'équation linéarisée, on obtient $\tilde{E} = \frac{1}{2} mL\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mg\theta^2 + C^{\text{te}}$, ce qui est bien (à une constante près), l'expression de E au deuxième ordre en θ .

$\blacklozenge$ En mathématiques, linéariser une expression trigonométrique comportant des puissances de cosinus et de sinus, c'est appliquer les formules permettant de ne faire apparaître que des puissances « 1 » de ces fonctions.

Exemple : Pour tout x réel, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$.

LIOUVILLE Joseph (1809–1882)

(Mathématicien français)

Nombre de Liouville Nombre transcendant, égal à $\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n!}$. $\blacklozenge$ C'est, historiquement, le premier nombre dont la transcendance ait été prouvée.

$\Leftarrow$ ALGÈBRE, TRANSCENDANT.

Théorème de Liouville Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière, de rayon infini. S'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $f(z)/z^k$ tende vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini, alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal à $k - 1$. $\blacklozenge$ En particulier, si f est bornée, alors elle est constante.

REMARQUE : Une démonstration possible du théorème de d'Alembert-Gauss repose sur ce théorème — dont Cauchy disputa la paternité à Liouville.

$\Leftarrow$ ENTIÈRE, HOLOMORPHE.

LIPSCHITZ Rudolf Otto Sigismund (1832–1903)

(Mathématicien allemand)

Théorème de Cauchy-Lipschitz $\Leftarrow$ CAUCHY.

LIPSCHITZIEN

Application lipschitzienne Soit $f : E \rightarrow F$. Soit $k \geq 0$. On dit que f est k -lipschitzienne si

$$\forall x, y \in E \quad \|f(y) - f(x)\| \leq k \|y - x\|.$$

$\blacklozenge$ On dit que f est lipschitzienne s'il existe un réel k tel qu'elle soit k -lipschitzienne.

Exemple : La fonction sinus est 1-lipschitzienne.

REMARQUES : Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment est lipschitzienne. $\blacklozenge$ Toute application lipschitzienne est uniformément continue. $\blacklozenge$ Si $k \in [0; 1[$ et si f est k -lipschitzienne, elle est contractante.

LOCAL

Extremum, minimum, maximum local ✎ MAXIMUM LOCAL, MINIMUM LOCAL.

Fonction localement intégrable sur I Fonction telle que, en tout point de I, il existe un voisinage de ce point sur lequel elle est intégrable.

Exemple : Toute fonction continue par morceaux est localement intégrable.

Point d'unicité locale Une condition initiale (t_0, x_0) pour une équation différentielle $x' = \Phi(t, x)$ est un point d'unicité locale s'il y a une unicité locale de la solution de cette équation satisfaisant cette condition, c'est-à-dire s'il existe un voisinage de x_0 sur lequel il y a une unicité de la solution à l'équation. Le théorème de *Cauchy-Lipschitz donne des conditions pour qu'un point soit un point d'unicité locale (ou globale).

Propriété locale Propriété ne dépendant que d'un voisinage du point considéré. Ainsi, la continuité ou la dérivabilité d'une fonction f en un point sont des propriétés locales ; au contraire, son caractère borné (ou non), ou sa continuité uniforme, sont des propriétés globales.

REMARQUE : Certaines propriétés sont dites *ponctuelles* : elles ne dépendent que de ce qui se passe en un seul point. Ainsi, la notion de convergence simple est ponctuelle, tandis que celle de convergence uniforme est globale.

Théorème d'inversion locale ✎ INVERSION.

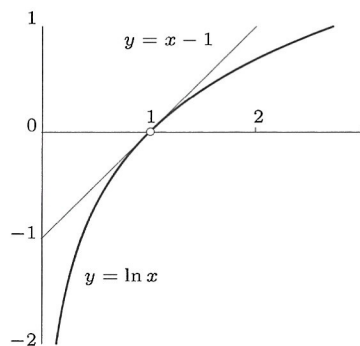
LOGARITHME

Définitions et propriétés Fonction réciproque de l'exponentielle. C'est l'unique primitive sur $]0; +\infty[$ de $t \mapsto 1/t$ qui s'annule en 1. ♦ L'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ est convergente et $\int_0^1 \ln(t) dt = -1$. ♦ Une primitive de la fonction logarithme est $t \mapsto t \ln(t) - t$. ♦ La fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ admet un développement en série entière de rayon 1 :

$$\forall x \in [-1; 1[\quad \ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

♦ La fonction logarithme est concave. Notamment,

$$\begin{aligned} \forall x > -1 \quad \ln(1+x) &\leq x \\ \forall x > 0 \quad \ln(x) &\leq x-1 \end{aligned}$$



REMARQUE : La fonction logarithme est une mauviette et se fait écraser par n'importe quelle fonction puissance qui lui cherche des noises. ✎ CROISSANCES COMPARÉES.

Exemple : Si $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln(x) = 0.$$

Logarithme décimal On note $\ln_{10} x$ ou encore $\log x$ le logarithme décimal d'un réel $x > 0$, défini par $\ln_{10} x = \ln x / \ln 10$ pour tout $x > 0$. ♦ On a alors $x = 10^a$ si et seulement si $a = \ln_{10}(x)$. ♦ Le logarithme décimal est surtout utilisé en physique pour le calcul numérique.

REMARQUE : Attention, les anglo-saxons notent « log » le logarithme népérien. Quant à Maple, il a le bon goût d'accepter les deux notations $\ln$ et $\log$ pour le logarithme népérien, réservant la notation $\log_{10}(x)$ pour le logarithme décimal.

Logarithme en base a Soit $a > 1$; le logarithme en base a d'un réel $x > 0$ est $\ln_a(x) = \ln x / \ln a$. Si $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, alors $y = \ln_a x \Leftrightarrow x = a^y$.

Logarithme intégral Primitive de $t \mapsto 1/\ln t$, nulle en 0.

REMARQUE : La fonction $1/\ln$ admet un prolongement par continuité en 0. On peut donc écrire

$$\forall x \in]0; 1[\quad \text{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}.$$

♦ À cause de la singularité (non intégrable) en 1, on définit, pour $x > 1$, l'intégrale $\int_0^x 1/\ln$ de la manière suivante (« valeur principale de Cauchy ») :

$$\forall x > 1 \quad \text{Li}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\ln t} \right].$$

♦ Elle admet pour équivalent, en $+\infty$, $\text{Li}(x) \sim x/\ln x$ et fournit une excellente approximation de la fonction $\pi(x)$, nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à x . ✎ THÉORÈME DES NOMBRES *PREMIERS.

LOI (ALGÈBRE)

Loi de composition interne sur un ensemble E Application définie sur $E \times E$, à valeurs dans E. À deux éléments x et y de E, elle associe un élément de E noté $x * y$.

Exemples : L'addition et la multiplication dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des exemples bien connus de lois de composition interne. ♦ La multiplication matricielle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en est une autre. ♦ Si E est un ensemble, l'application définie sur $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ par $(A, B) \mapsto A \cup B$ est une loi de composition interne.

LOI (PROBABILITÉS)

Loi d'une variable aléatoire X Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. La loi de X est la probabilité $\mathbf{P}_X$, définie sur la tribu $\mathcal{B}$ des boréliens (événements de $\mathbb{R}$) par

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_X : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathbb{R}^+, \\ A &\longmapsto \mathbf{P}[X \in A], \end{aligned}$$

où l'on a noté

$$\mathbf{P}[X \in A] = \mathbf{P}\{X^{-1}(A)\} = \mathbf{P}\{\omega \in \Omega ; X(\omega) \in A\},$$

pour toute partie A de $\mathbb{R}$, élément de la tribu des boréliens $\mathcal{B}$.

REMARQUE : La loi d'une variable aléatoire est entièrement caractérisée par sa fonction de répartition $F : x \mapsto \mathbf{P}[X \leq x]$, car les intervalles $] -\infty; x]$ engendrent les événements de $\mathbb{R}$. Aussi, déterminer la loi d'une variable aléatoire revient, en pratique, à déterminer sa fonction de répartition (ou sa densité si elle en admet une).

♦ **Loi d'une variable discrète** Lorsque X est une variable discrète, si l'on note $X(\Omega) = \{x_k ; k \in \mathbb{N}\}$, alors la loi de X est déterminée entièrement par les *probabilités atomiques* $p_k = \mathbf{P}[X = x_k]$. La loi de X est alors obtenue, pour toute partie A de $X(\Omega)$, par

$$\mathbf{P}[X \in A] = \sum_{a \in A} \mathbf{P}[X = a].$$

♦ **Loi d'une variable à densité** Lorsque X est une variable à densité, les probabilités atomiques sont insuffisantes pour reconstituer la loi (notamment, si X est une variable à

densité, toutes les probabilités atomiques sont nulles); la loi de X est donc, en pratique donnée par sa fonction de densité.

Loi conjointe d'un couple de variables aléatoires Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. La loi du couple (X, Y) est la probabilité sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$P_{X,Y}(D) = P[(X, Y) \in D]$$

pour tout événement D de $\mathbb{R}^2$. ♦ Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes, notons $X(\Omega) = \{x_k; k \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_k; k \in \mathbb{N}\}$; la loi du couple est alors entièrement caractérisée par les probabilités atomiques

$$p_{ij} = P([X = x_i] \cap [Y = y_j]).$$

♦ Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires admettant une densité, la loi conjointe du couple est caractérisée par sa fonction de répartition et sa densité :

$$F(x, y) = P([X \leq x] \cap [Y \leq y]) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y \mu(s, t) dt \right) ds.$$

■ DENSITÉ CONJOINTE.

Loi des grands nombres ■ GRANDS.

Loi marginale Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires, la loi marginale en X du couple est la loi de la seule variable X . ♦ Si (X, Y) est un couple discret, la loi marginale de X est reliée à la loi conjointe du couple par la relation, valable pour tout $x_k \in X(\Omega)$:

$$P[X = x_k] = \sum_{n=0}^{\infty} P([X = x_k] \cap [Y = y_n]).$$

♦ Si (X, Y) est un couple admettant une densité μ , alors la fonction de répartition de X est reliée à la fonction de répartition du couple et à sa densité par

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = \ll F(x, +\infty) \gg = \iint_{\Delta_x} \mu(s, t) ds dt,$$

où $\Delta_x = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2; s \leq x\}$. La *densité marginale* de X , qui est la densité de la variable X seule, est alors reliée à la densité du couple par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x, y) dy.$$

Loi de Bernoulli Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(p)$ lorsque $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$P[X = 1] = p \quad \text{et} \quad P[X = 0] = 1 - p.$$

Son espérance est $E(X) = p$ et sa variance $V(X) = p(1 - p)$. ♦ C'est la loi modélisant un tirage à *pile* ou *face* avec une pièce truquée, dont la probabilité de tirer un *pile* (modélisée par $X = 1$) est p .

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ Si X est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p , alors elle suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, c'est-à-dire que $X(\Omega) = [0; n]$ et

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Son espérance est $E(X) = np$ et sa variance $V(X) = np(1 - p)$. ♦ C'est la loi du nombre de *pile* dans une succession de n tirages indépendants d'une pièce dont la probabilité de sortir *pile* est p .

Loi de Cauchy Une variable aléatoire X suit la loi de Cauchy de paramètres m et $a > 0$ si elle admet pour densité

$$f(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{(x - m)^2 + a^2}.$$

♦ C'est un exemple de loi à densité n'admettant ni espérance, ni variance, bien qu'elle soit symétrique par rapport à m .

Loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$ Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ si $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et si elle admet pour densité :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

♦ Son espérance est $E(X) = 1/\alpha$ et sa variance $V(X) = 1/\alpha^2$. ♦ Sa fonction de répartition est $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ pour $x \geq 0$ et $F(x) = 0$ sinon.

REMARQUE : La loi exponentielle est *sans mémoire* : si X suit la loi $\mathcal{E}(\alpha)$ alors, pour tous $s, t > 0$, on a $P[X > t + s | X > t] = P[X > s]$. ♦ Elle modélise un certain nombre de phénomènes continus et sans mémoire, comme par exemple l'instant de désintégration d'un noyau radioactif. ■ LOI GÉOMÉTRIQUE.

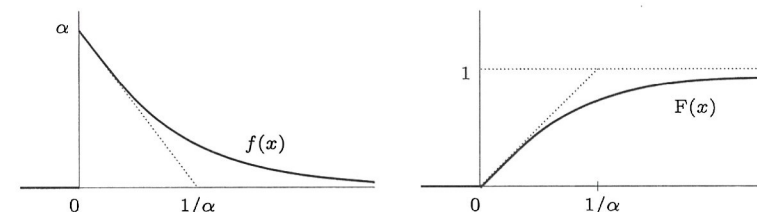


Fig. 59 — Fonctions de densité et de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$ de paramètre $\alpha > 0$.

Loi $\Gamma(b, t)$ Une variable aléatoire suit la loi Γ de paramètres $b > 0$ et $t > 0$ si elle admet pour densité la fonction nulle sur $\mathbb{R}^-$, et définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par

$$f(x) = \frac{x^{b-1} e^{-x/b}}{\Gamma(b) b^b}.$$

Son espérance est alors $E(X) = bt$ et sa variance $V(X) = b^2 t$.

REMARQUE : L'intérêt des lois Gamma est double : elles regroupent d'autres lois usuelles (lois du χ^2 , lois exponentielles, loi γ) et offrent une forme de stabilité par addition : si $X \hookrightarrow \Gamma(b, t)$ et $X' \hookrightarrow \Gamma(b', t)$, alors $X + X' \hookrightarrow \Gamma(b + b', t)$.

Loi $\gamma(\nu)$ Une variable aléatoire suit la loi γ de paramètre $\nu > 0$ si elle admet pour densité la fonction nulle sur $\mathbb{R}^-$, et définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par

$$f(x) = \frac{x^{\nu-1} e^{-x}}{\Gamma(\nu)}.$$

Son espérance est alors $E(X) = \nu$ et sa variance $V(X) = \nu$. ♦ C'est donc la loi $\Gamma(1, \nu)$.

Loi géométrique $\mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$ Une variable aléatoire X suit la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in]0; 1[$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbf{P}[X = k] = p(1-p)^{k-1}.$$

♦ Son espérance est $\mathbf{E}(X) = 1/p$ et sa variance $\mathbf{V}(X) = (1-p)/p^2$. ♦ Lors de la réalisation d'une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès égale à p , la variable égale au rang du premier succès suit la loi $\mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$.

REMARQUE : La loi géométrique est sans mémoire : si $X \sim \mathcal{G}_{\mathbb{N}^*}(p)$, alors pour tous $n, p > 0$, on a $\mathbf{P}[X \geq n+p | X \geq n] = \mathbf{P}[X \geq p]$. ♦ Elle modélise donc des phénomènes discrets et sans mémoire. ✎ LOI EXPONENTIELLE.

Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ Si N et n sont des entiers vérifiant $n \leq N$ et p un réel de $[0; 1]$, une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ si

$$\mathbf{P}[X = k] = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

♦ Son espérance est alors $\mathbf{E}(X) = np$ et sa variance $\mathbf{V}(X) = np(1-p)(N-n)/(N-1)$.

REMARQUES : Son interprétation est la suivante : dans une population de N individus, dont une fraction p possède un certain caractère A , si l'on choisit aléatoirement n de ces individus, le nombre de ceux possédant le caractère A suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$. ♦ La loi hypergéométrique est donc caractéristique d'un tirage sans remise dans une urne, les tirages avec remise menant à une loi binomiale. ♦ Si n est très petit devant N , la loi hypergéométrique se ramène pratiquement à une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. ✎ APPROXIMATION D'UNE LOI.

Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ Une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ si elle admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

et pour fonction de répartition $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, où

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt.$$

sont respectivement la densité et la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

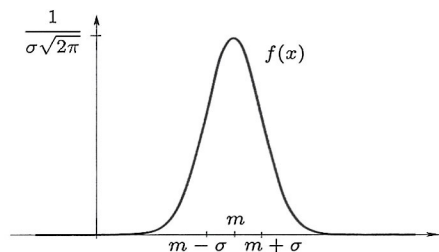


Fig. 60 — Fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

♦ La loi normale donne une approximation de plusieurs lois (binomiale, de Poisson) dans certaines limites.

REMARQUE : La loi normale d'espérance m et d'écart-type σ est parfois notée $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

✎ APPROXIMATION, THÉORÈME *CENTRAL LIMITE.

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbf{P}[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

♦ Elle admet pour espérance $\mathbf{E}(X) = \lambda$ et pour variance $\mathbf{V}(X) = \lambda$. ♦ Les lois de Poisson se retrouvent dans des descriptions d'événements rares (limite d'épreuves de Bernoulli) et notamment lors de certaines modélisations continues.

Exemple : On modélise une file d'attente. On suppose que la probabilité qu'un individu supplémentaire arrive dans la file entre un instant t et un instant $t + dt$ est proportionnel à dt : $dP = \lambda dt$. À cet ordre, on néglige la probabilité d'arrivée simultanée de deux individus. Fixons momentanément un intervalle dt supposé petit. En considérant que le nombre d'individus arrivées entre l'instant 0 et l'instant t est une somme de $N = t/dt$ tirages indépendants de Bernoulli de loi $\mathcal{B}(p)$, ce nombre suit une loi binomiale $(t/dt, \lambda dt)$. Quelques lignes de calcul permettent de prouver que, en faisant tendre dt vers 0, cette loi converge vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.

Loi uniforme $\mathcal{U}([1; n])$ Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[1; n]$ si $X(\Omega) = [1; n]$ et si, pour tout $k \in [1; n]$, on a $\mathbf{P}[X = k] = 1/n$. ♦ Elle admet pour espérance $\mathbf{E}(X) = (n+1)/2$ et pour variance $\mathbf{V}(X) = (n^2 - 1)/12$.

Loi uniforme $\mathcal{U}([a; b])$ Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ (où $a < b$) si elle admet la densité f , nulle en dehors de $[a; b]$, et telle que $f(x) = \frac{1}{b-a}$ pour tout $x \in [a; b]$. ♦ Elle admet pour espérance $\mathbf{E}(X) = (a+b)/2$ et pour variance $\mathbf{V}(X) = (b-a)^2/12$.

Loi du χ^2 (« khi-deux ») La loi du χ^2 à n degrés de liberté est la loi de la somme des carrés de n variables mutuellement indépendantes suivant toutes la loi normale centrée réduite. Elle admet pour densité

$$f(x) = \frac{x^{n/2-1} e^{-x/2}}{\Gamma(n/2) 2^{n/2}}$$

si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$. Si X suit cette loi, alors elle admet pour espérance $\mathbf{E}(X) = n$ et pour variance $\mathbf{V}(X) = 2n$. ♦ Cette loi joue un rôle central dans les tests statistiques. ♦ C'est un cas particulier de loi Gamma : $\chi^2(n) = \Gamma(n, 2)$.

Convergence en loi ✎ CONVERGENCE.

LONGUEUR

Longueur d'une courbe Si $\gamma : I \rightarrow F$ est un arc régulier de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, sa longueur est

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_I \|\gamma'(t)\|_2 dt.$$

REMARQUE : La longueur d'un arc est invariante par changement de paramétrage; c'est donc une propriété géométrique intrinsèque. ♦ La formule donnée a une interprétation cinématique : la longueur de la courbe est l'intégrale, par rapport au temps, de la vitesse du point $M(t)$; ce qu'un physicien écrirait volontiers $\mathcal{L} = \int (d\ell/dt) dt$. ♦ Il existe une autre technique pour définir la longueur de certaines courbes qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et qu'on appelle arcs rectifiables. Considérons un arc paramétré $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$. Notons C l'ensemble des suites finies croissantes à valeurs dans I . Pour tout élément $\sigma = (t_1, \dots, t_n)$ de C , on note $\ell(\sigma)$ la longueur de la ligne polygonale reliant les points

$\gamma(t_1), \gamma(t_2), \dots, \gamma(t_n)$. Si l'ensemble $\{\ell(\sigma) ; \sigma \in C\}$ est borné, l'arc γ est dit rectifiable. La longueur de l'arc $\mathcal{L}(\gamma)$ est alors la borne supérieure de cet ensemble.



Fig. 61 — Ligne polygonale inscrite dans une courbe rectifiable.

LU

☞ DÉCOMPOSITION LU.

M

MACHIN *John* (1680–1751)

(Mathématicien et astronome anglais)

Formule de Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239}.$$

♦ Combinée à un développement de Taylor de la fonction Arctan , cette formule permet d'obtenir une série convergeant rapidement vers π . ♦ Machin put calculer 100 décimales de π en 1706 grâce à cette formule, plus efficace que la série originelle de Gregory

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

précédemment utilisée.

MAC LAURIN *Colin* (1698–1746)

(Mathématicien écossais)

Formules de Mac Laurin Autre nom donné aux diverses formules de Taylor, l'origine étant prise en 0. ☞ TAYLOR.

Formule de Mac Laurin pour un polynôme Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, alors on a la formule exacte

$$P = P(0) + P'(0)X + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

MAJORANT

Majorant d'une partie Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné, et soit A une partie de X . Un majorant de A est un élément m de X tel que $a \leq m$ pour tout $a \in A$.

REMARQUE : Un majorant de A n'a pas besoin d'être dans A , contrairement au plus grand élément de A (s'il existe).

Majorant d'une partie A de $\mathbb{R}$ Nombre réel m tel que $a \leq m$ pour tout élément a de A . ♦ Tout réel $m' \geq m$ est encore un majorant de A .

Majorant d'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$ Majorant de l'image de f .

☞ BORNE SUPÉRIEURE.

Majorant d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelle Réel m tel que $u_n \leq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

♦ C'est donc un majorant de l'ensemble $\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$.

MAJORÉ

Partie majorée Partie d'un ensemble ordonné qui admet un majorant.

Suite majorée Suite réelle dont l'ensemble des termes admet un majorant. ♦ Toute suite réelle croissante majorée est convergente.

Fonction majorée Fonction réelle admettant un majorant.

REMARQUE : Toute fonction $f : [a ; b[\rightarrow \mathbb{R}$ croissante et majorée admet une limite en b , qui est également sa borne supérieure. Toute fonction $f :]a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$ décroissante et majorée admet une limite en a , qui est également sa borne supérieure.