$\gamma(t_1), \gamma(t_2), \ldots, \gamma(t_n)$. Si l'ensemble $\{\ell(\sigma)\ ;\ \sigma \in C\}$ est borné, l'arc γ est dit rectifiable. La longueur de l'arc $\mathscr{L}(\gamma)$ est alors la borne supérieure de cet ensemble.

Fig. 61 — Ligne polygonale inscrite dans une courbe rectifiable.

LU

☞ Décomposition LU.

M

MACHIN *John* (1680–1751)

(Mathématicien et astronome anglais)

Formule de Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{Arc\,tan}\,\frac{1}{5} - \mathrm{Arc\,tan}\,\frac{1}{239}.$$

✦ Combinée à un développement de Taylor de la fonction Arctan, cette formule permet d'obtenir une série convergeant rapidement vers π. ✦ Machin put calculer 100 décimales de π en 1706 grâce à cette formule, plus efficace que la série originelle de Gregory

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{Arc\,tan}\,1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

précédemment utilisée.

MAC LAURIN *Colin* (1698–1746)

(Mathématicien écossais)

Formules de Mac Laurin Autre nom donné aux diverses formules de Taylor, l'origine étant prise en 0. ☞ Taylor.

Formule de Mac Laurin pour un polynôme Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, alors on a la formule exacte

$$P = P(0) + P'(0)\,X + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}\,X^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\,X^k.$$

MAJORANT

Majorant d'une partie Soit $(X, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, et soit A une partie de X. Un majorant de A est un élément m de X tel que $a \preccurlyeq m$ pour tout $a \in A$.

Remarque : Un majorant de A n'a pas besoin d'être dans A, contrairement au plus *grand élément de A (s'il existe).

Majorant d'une partie A de $\mathbb{R}$ Nombre réel m tel que $a \leqslant m$ pour tout élément a de A. ✦ Tout réel $m' \geqslant m$ est encore un majorant de A.

Majorant d'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$ Majorant de l'image de f.

☞ Borne supérieure.

Majorant d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle Réel m tel que $u_n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ✦ C'est donc un majorant de l'ensemble $\{u_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$.

MAJORÉ

Partie majorée Partie d'un ensemble ordonné qui admet un majorant.

Suite majorée Suite réelle dont l'ensemble des termes admet un majorant. ✦ Toute suite réelle croissante majorée est convergente.

Fonction majorée Fonction réelle admettant un majorant.

Remarque : Toute fonction $f : [a\,;\,b[\to \mathbb{R}$ croissante et majorée admet une limite en b, qui est également sa borne supérieure. Toute fonction $f :]a\,;\,b] \to \mathbb{R}$ décroissante et majorée admet une limite en a, qui est également sa borne supérieure.

MANDELBROT *Benoît* (1924–2010)

(Mathématicien franco-américain, né en Pologne)

Ensemble de Mandelbrot Pour tout nombre complexe c, considérons la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = 0$ et la relation de récurrence $z_{n+1} = z_n^2 + c$. L'ensemble des complexes c tels que la suite associée est bornée constitue l'ensemble $\mathfrak{M}$ de Mandelbrot. ✦ Cet ensemble possède de nombreuses propriétés intéressantes : c'est un ensemble fractal, connexe, dont le bord est de longueur infinie. ✦ De nombreuses propriétés arithmétiques lui sont attachées ; un certain nombre de conjectures restent encore à démontrer.

☞ JULIA.

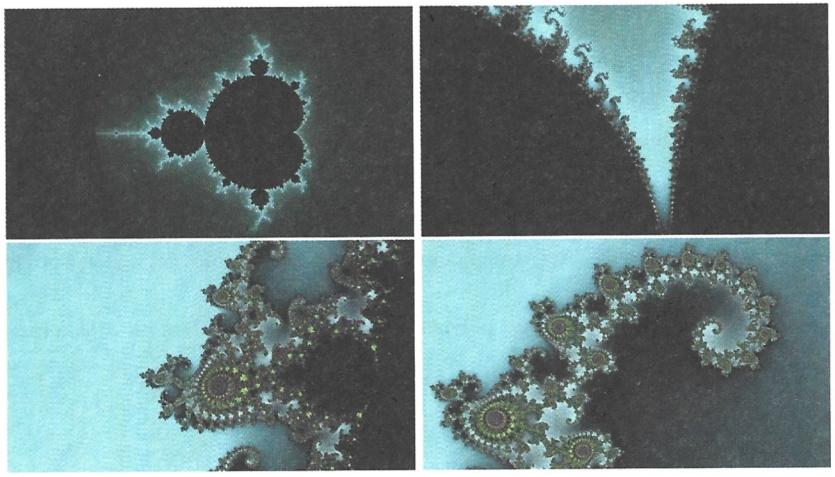


Fig. 62 — L'ensemble de Mandelbrot (en haut à gauche, en noir ; l'axe réel est axe de symétrie de l'ensemble) et quelques agrandissements successifs. Des reproductions (déformées) de l'ensemble tout entier sont visibles à très petite échelle. Tout ce qui est en couleur est en dehors de l'ensemble $\mathfrak{M}$; les différentes couleurs traduisent la vitesse de divergence de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

MARKOV *Andreï Andreïevitch* (1856–1922)

(Mathématicien russe)

Chaîne de Markov Considérons une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, prenant des valeurs dans un ensemble I d'indices (par exemple, $\mathrm{I} = [\![1\,;\,d]\!]$), dont l'interprétation est la suivante : le système étudié est dans l'état X_n au temps discret n. Cette suite possède la propriété (faible) de Markov si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous indices $j, i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n \in \mathrm{I}$,

$$\mathbf{P}\left[\mathrm{X}_{n+1} = j \mid \mathrm{X}_0 = i_0, \ldots, \mathrm{X}_{n-1} = i_{n-1}, \mathrm{X}_n = i_n\right] = \mathbf{P}\left[\mathrm{X}_{n+1} = j \mid \mathrm{X}_n = i_n\right].$$

En d'autres termes, pour déterminer le futur immédiat (X_{n+1}), seule la connaissance du présent (X_n) est utile, la connaissance du passé $(\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_{n-1})$ étant inutile : le système évolue avec une « mémoire courte » (une étape). La suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée chaîne de Markov. ✦ Cette chaîne de Markov est dite *homogène* si de plus, la loi d'évolution du système ne dépend pas du temps :

$$\forall i, j \in \mathrm{I} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbf{P}\left[\mathrm{X}_{n+1} = j \mid \mathrm{X}_n = i\right] = \mathbf{P}\left[\mathrm{X}_1 = j \mid \mathrm{X}_0 = i\right] = p_{ij}.$$

Dans ce cas, la matrice $\mathrm{P} = (p_{ij})$ est appelée *matrice de *transition* de la chaîne ; c'est une matrice *stochastique : la somme des coefficients sur chaque ligne vaut 1. L'étude asymptotique des états du système quand $n \to \infty$ est ramené à l'étude du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 de la matrice P.

REMARQUE : La notion de chaîne de Markov a été introduite par Andreï Markov qui étudiait la loi régissant la probabilité d'apparition d'une lettre de l'alphabet cyrillique, connaissant la lettre précédente, dans le roman en vers *Eugène Onéguine* de Pouchkine. Elle est devenue un concept essentiel dans de nombreux problèmes scientifiques, depuis le mouvement brownien (avec applications à la physique des particules aussi bien qu'à l'économie) et la physique statistique, jusqu'à des problèmes d'informatique théorique ou appliquée (*PageRank*) ou de biologie mathématique.

☞ TRANSITION.

Inégalité de Markov Soit Y une variable aléatoire à valeurs positives, admettant une espérance. Alors, pour tout $t \geqslant 0$,

$$t\,\mathbf{P}\left[\mathrm{Y} \geqslant t\right] \leqslant \mathbf{E}(\mathrm{Y}).$$

✦ On peut l'écrire sous la forme suivante : soit X une variable aléatoire réelle admettant une variance. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left[|\mathrm{X}| > \varepsilon\right] \leqslant \frac{\mathbf{E}(\mathrm{X}^2)}{\varepsilon^2}.$$

✦ Cette inégalité permet notamment de démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

MATRICE

Soient p et q deux entiers. Une matrice à p lignes et q colonnes sur un corps $\mathbb{K}$, ou (p, q)-matrice, est un pq-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$, indicé par $[\![1\,;\,p]\!] \times [\![1\,;\,q]\!]$. La matrice $\mathrm{A} = (a_{ij})_{\substack{i\in[\![1\,;\,p]\!]\\ j\in[\![1\,;\,q]\!]}}$ est notée sous forme de tableau

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

✦ La $(1, q)$-matrice $(a_{k1}\ a_{k2}\ \ldots\ a_{kq})$ est la k-ième *ligne* de A. ✦ La $(p, 1)$-matrice ${}^{\mathrm{t}}(a_{1k}\ a_{2k}\ \ldots\ a_{pk})$ est la k-ième *colonne* de A. ✦ On définit la *somme* de deux matrices à même nombre de lignes et de colonnes $\mathrm{A} = (a_{ij})_{ij}$ et $\mathrm{B} = (b_{ij})_{ij}$, et le produit par un scalaire λ :

$$\lambda\mathrm{A} + \mathrm{B} = (\lambda a_{ij} + b_{ij})_{ij}.$$

Muni de ces deux opérations, l'ensemble $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ des matrices à p lignes et q colonnes sur $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie pq. ✦ Muni du *produit matriciel, l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées à n lignes et n colonnes est une algèbre (non commutative dès que $n \geqslant 2$). ✦ Les (p, q)-matrices représentent de manière univoque les applications linéaires d'un espace vectoriel E de dimension q dans un espace vectoriel F de dimension p, une fois ces espaces munis d'une base chacun.

☞ MATRICE REPRÉSENTATIVE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE.

☞ ADJOINT, TRANSCONJUGUÉE, TRANSPOSÉE.

Matrice carrée Une matrice est dite carrée lorsqu'elle possède autant de lignes que de colonnes. ✦ Les matrices carrées permettent notamment de représenter des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. ✦ L'*ordre* d'une matrice carrée est le nombre de ses lignes (ou de ses colonnes).

Matrice des variances-covariances Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires admettant une espérance et une variance. La matrice des variances-covariances est la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{ij} = \mathbf{Cov}(X_i, X_j)$. ✦ Elle est symétrique et ses coefficients diagonaux sont les variances $\mathbf{V}(X_i)$. ✦ C'est une matrice *symétrique positive (ses valeurs propres sont toutes positives). Si de plus il n'existe aucune relation affine presque sûre entre les variables, alors elle est définie positive.

Matrice diagonale Une matrice est diagonale lorsque seuls ses coefficients diagonaux sont non nuls. ✦ Les coefficients nuls de la matrice sont fréquemment omis, et on note habituellement une matrice diagonale sous la forme

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

☞ DIAGONALISABLE.

Matrices équivalentes Deux matrices A et B sont équivalentes s'il existe deux matrices P et Q inversibles telles que $A = P^{-1}BQ$.

REMARQUES : Les matrices A et B ne sont pas nécessairement carrées ; les matrices P et Q doivent avoir une taille compatible avec les produits effectués. ✦ Deux (p, q)-matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang. ☞ DÉCOMPOSITION PJ_rQ, RANG. ✦ Le relation $\mathscr{R}$ définie par $A\mathscr{R}b$ si et seulement si A et B sont équivalentes, est une relation d'équivalence ; les classes d'équivalences modulo $\mathscr{R}$ sont les ensembles de matrices de même rang.

Matrice hessienne ☞ HESSIENNE.

Matrice inversible Une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. On note alors $B = A^{-1}$. ✦ L'ensemble des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

REMARQUES : S'il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$, alors nécessairement $BA = I_n$ et B est l'inverse de A. De même, s'il existe une matrice B telle que $BA = I_n$, alors $AB = I_n$. ✦ La matrice représentative d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est inversible si et seulement si u est un automorphisme.

☞ GROUPE LINÉAIRE.

Matrice jacobienne ☞ JACOBI.

Matrice orhogonale ☞ ORTHOGONAL.

Matrice de passage Soient $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie n. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est la matrice représentative de la famille $\mathcal{C}$ dans la famille $\mathcal{B}$.

$$P = \operatorname{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}$$

REMARQUES : Avec ces notations, $c_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}\, b_i$; on retiendra que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ permet d'exprimer les vecteurs de la base $\mathcal{C}$ dans ceux de la base $\mathcal{B}$. ✦ Une telle matrice est inversible, et son inverse est $P^{-1} = \operatorname{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$. ✦ La matrice $P = \operatorname{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ est également la matrice représentative de l'identité dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ (dans cet ordre !) :

$$\operatorname{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \underset{\mathcal{C},\mathcal{B}}{\operatorname{mat}}(\mathrm{Id}).$$

Matrice représentative d'une famille de vecteurs Soit F un espace vectoriel de dimension finie p, muni d'une base $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_p)$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de F. La matrice représentative de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{C}$ est la (p, n)-matrice $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ telle que :

> pour tout $j \in [\![1\,;\,n]\!]$, les coefficients $m_{1j}, \dots, m_{pj}$ représentent les coefficients de x_j dans la base $\mathcal{C}$.

En d'autres termes, pour tout $j \in [\![1\,;\,n]\!]$, le vecteur x_j se décompose de manière unique en

$$x_j = \sum_{i=1}^{p} m_{ij}\, c_i.$$

On peut ainsi lire, à même la matrice, le vecteur colonne représentant x_j dans la base $\mathcal{C}$:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & \cdots & m_{2j} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{p1} & \cdots & m_{pj} & \cdots & m_{pn} \end{pmatrix}$$

↑ vecteur x_j « vu dans $\mathcal{C}$ »

Matrice représentative d'un vecteur Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$. Soit x un vecteur de E : ce vecteur se décompose de manière unique sous la forme $x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, b_k$. Sa matrice colonne représentative (ou vecteur colonne représentatif) dans la base $\mathcal{B}$ est la $(n, 1)$-matrice de coefficient $m_{k1} = x_k$ pour $k = 1, \dots, n$. Ainsi,

$$X = \underset{\mathcal{B}}{\operatorname{mat}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, b_k.$$

Matrice représentative d'une application linéaire Soient E un espace vectoriel de dimension q, muni d'une base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_q)$, et F un espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_p)$. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. La matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la (p, q)-matrice $m = \operatorname{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ représentative de la famille $\big(f(b_1), \dots, f(b_q)\big)$ dans la base $\mathcal{C}$.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1q} \\ m_{21} & \cdots & m_{2j} & \cdots & m_{2q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{p1} & \cdots & m_{pj} & \cdots & m_{pq} \end{pmatrix}$$

↑ vecteur $f(b_j)$ « vu dans $\mathcal{C}$ »

✦ On a donc $f(b_j) = \sum_{i=1}^{p} m_{ij}\, c_i$ pour tout $j \in [\![1\,;\,q]\!]$. ✦ Afin de rappeler le rôle des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on écrit parfois

$$\mathrm{M} = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(b_1) & f(b_2) & \cdots & f(b_q) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,q} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{p,1} & m_{p,2} & \cdots & m_{p,q} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{matrix}$$

✦ Si x est un vecteur de E, représenté dans la base $\mathcal{B}$ par un vecteur colonne X, alors $y = f(x)$ est représenté dans $\mathcal{C}$ par le vecteur colonne $\mathrm{Y} = \mathrm{MX}$.

Remarque : En utilisant la base $\mathcal{C}^*$ duale de $\mathcal{C}$, les coefficients de la matrice s'écrivent formellement $m_{ij} = c_i^*\big(f(b_j)\big)$.

Matrice représentative d'un endomorphisme Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Très souvent, on choisit de représenter un endomorphisme par une matrice en utilisant la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée ; on note alors $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sa matrice représentative, c'est-à-dire

$$\mathrm{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

Remarque : En utilisant la base $\mathcal{B}^*$ duale de $\mathcal{B}$, les coefficients de la matrice s'écrivent formellement $m_{ij} = b_i^*\big(f(b_j)\big)$. ✦ Si E est muni d'une structure euclidienne et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E, alors le calcul des coordonnées selon les vecteurs de base se fait par produits scalaires : $m_{ij} = \langle e_i \,|\, f(e_j) \rangle$.

Matrice représentative d'une forme bilinéaire φ Matrice $\Phi \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\Phi_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel euclidien E. ✦ Si Φ est une forme bilinéaire symétrique, alors sa matrice représentative (dans n'importe quelle base) est symétrique.

Matrice stochastique Une matrice $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique sur les lignes si ses coefficients sont tous positifs et si la somme des coefficients sur chaque ligne est égale à 1. ✦ Si M est stochastique, alors le vecteur $\mathrm{X} = {}^{\mathrm{t}}(1\ 1\ \cdots\ 1)$ est vecteur propre pour la valeur propre 1. ✦ De plus, pour toute valeur propre λ de M, $|\lambda| \leqslant 1$. ✦ Une matrice $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *bistochastique* si elle est stochastique, ainsi que sa transposée.

☞ Markov, Transition.

Matrice symétrique ☞ Symétrique.

Matrice triangulaire (supérieure) Matrice carrée $\mathrm{A} = (a_{ij})_{i,j}$ telle que $a_{ij} = 0$ pour tous i, j tels que $i > j$. ✦ On la note symboliquement

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

✦ Une matrice carrée est dite *triangulaire supérieure stricte* si elle est triangulaire supérieure et si tous ses coefficients diagonaux sont nuls. ✦ Une matrice carrée est *triangulaire inférieure* si sa transposée est triangulaire supérieure.

Remarques : L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est stable par multiplication : si A et B sont triangulaires supérieures, alors le produit AB est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont donnés par $(\mathrm{AB})_{ii} = a_{ii}\, b_{ii}$. ✦ Une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Si c'est le cas, alors son inverse est encore triangulaire supérieure. ✦ Le spectre d'une matrice triangulaire supérieure est l'ensemble de ses coefficients diagonaux : $\mathrm{Sp\,A} = \{a_{ii}\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Matrices semblables ☞ Semblables.

MAXIMALE

☞ Solution maximale.

MAXIMUM

Maximum d'un ensemble ordonné Soit $(\mathrm{A}, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Un élément $m \in \mathrm{A}$ est appelé maximum de A, ou *plus grand élément* de A, s'il est supérieur à tous les éléments de A :

$$\forall a \in \mathrm{A} \qquad a \leqslant m.$$

✦ Un tel élément, s'il existe, est unique ; on le note $m = \max \mathrm{A}$.

Remarque : Contrairement à un majorant, le maximum d'une partie A doit nécessairement être dans A.

Exemples : Le maximum de $[\![1\,;\,2]\!]$ dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est 2. ✦ En revanche, l'intervalle $[\![1\,;\,2[\![$ n'admet pas de maximum. ✦ L'ensemble $\{r \in \mathbb{Q}\ ;\ 0 \leqslant r\sqrt{2}\}$ n'admet pas de maximum.

☞ Atteindre, Borne supérieure, Weierstrass (théorème sur les compacts).

Maximum d'une fonction à valeurs réelles Soit $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble A. On dit que f atteint son maximum $\mathrm{M} = f(a)$ en un point a de A si M est le maximum de $\mathrm{Im}\, f$, c'est-à-dire si $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in \mathrm{A}$. ✦ Le terme maximum est synonyme de *maximum global*, ou *maximum absolu*.

Remarque : Le réel $f(a)$ est parfois appelé maximum de la fonction, mais il est plus correct de dire que c'est le maximum de $\mathrm{Im}\, f$. Dans certains ouvrages, c'est le point a qui est appelé maximum de f. L'usage est, pour tout dire, quelque peu fluctuant, mais le contexte permet généralement de comprendre si maximum désigne a ou $f(a)$.

☞ Weierstrass (théorème sur les compacts).

Maximum local d'une fonction à valeurs réelles Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E et soit $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. Soit a un élément de A. On dit que f admet un maximum local (ou : *maximum relatif*) $\mathrm{M} = f(a)$ en a s'il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de a tel que la restriction de f à $\mathscr{V}$ admette un maximum en a. En d'autres termes, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathrm{A}$ tel que $\|x - a\| \leqslant \varepsilon$, on ait $f(x) \leqslant f(a)$.

Exemple : Tout réel, non entier, est maximum local de la fonction partie entière $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$. Tout entier est également maximum local de f. Cette fonction, non constante, est donc telle que tout point est maximum local !

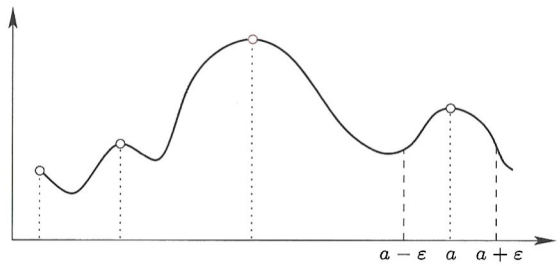
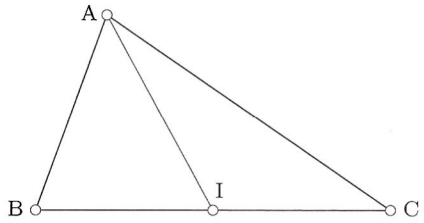


Fig. 63 — Maximum global (en rouge) et maxima locaux (en noir) d'une fonction numérique. Autour du maximum local a, un intervalle $[\,a-\varepsilon\,;\,a+\varepsilon\,]$ sur lequel a est un maximum absolu.

☞ Point *intérieur, Point *critique.

MÉDIANE

Soit (ABC) un triangle du plan. La médiane issue de A est la droite (AI) où I est le milieu de [B ; C]. ✦ Les trois médianes d'un triangle non plat sont concourantes, et leur intersection est le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 1) et (C, 1) (**isobarycentre* du triangle).



☞ Triangle.

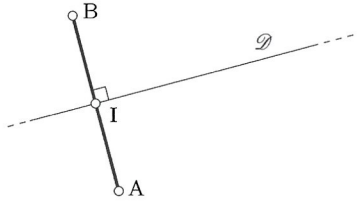
MÉDIATRICE

Soient A et B deux points distincts du plan euclidien $\mathscr{E}$. La médiatrice du segment [A ; B] est la droite des points équidistants à A et B :

$$\mathscr{D} = \big\{\mathrm{M} \in \mathscr{E}\ ;\ \mathrm{AM} = \mathrm{BM}\big\}.$$

✦ C'est donc également l'ensemble des points M vérifiant $\mathbf{AB} \perp \mathbf{IM}$, où I est le milieu du segment [A ; B].

☞ Cercle circonscrit, Triangle.



MÉTHODE

Méthode de Laplace ☞ Laplace.

Méthode de variation de la constante ☞ Variation.

Méthode du point fixe ☞ Théorème du point *fixe.

Méthode des éléments finis Nom générique de méthodes de résolution numérique de divers problèmes de mathématiques, et notamment des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles. Elle est basée sur l'approximation de la dérivée $f'(x)$ d'une fonction en un point, par exemple par un taux d'accroissement $\big[f(x+\varepsilon)-f(x)\big]/\varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est le *pas* de la méthode, ou par une formule plus sophistiquée.

MÉTRIQUE

Espace métrique Espace E muni d'une *distance d sur E.

Métrique de Minkowski L'espace $\mathbb{R}^4$, muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) peut être muni de la forme bilinéaire symétrique φ définie par

$$\varphi(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ +1 & \text{si } i = j \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant 3, \\ -1 & \text{si } i = j = 4. \end{cases}$$

✦ La matrice représentative de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est donc diagonale : $\Phi = \mathrm{diag}(+1, +1, +1, -1)$. ✦ N'étant pas positive, la forme bilinéaire φ ne définit pas un produit scalaire, mais un *pseudo-produit scalaire* ; c'est l'outil fondamental de la mathématisation de la Relativité restreinte d'Einstein. ✦ L'ensemble des points $a \in \mathbb{R}^4$ vérifiant $\varphi(a, a) = 0$, d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$, est appelé *cône de lumière* ; la quatrième variable correspond au temps (divisé par la vitesse de la lumière).

MINEUR

Si $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée de coefficients $(m_{k\ell})_{k,\ell}$, on appelle mineur associé à l'élément m_{ij} le déterminant, souvent noté M_{ij}, de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant dans M la i-ième ligne et la j-ième colonne.

$$\mathrm{M}_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

☞ Cofacteur, Comatrice, Déterminant, Développement.

MINIMUM

Minimum d'un ensemble ordonné Soit $(A, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Un élément $m \in A$ est appelé minimum de A, ou *plus petit élément* de A, s'il est inférieur à tous les éléments de A :

$$\forall a \in A \qquad m \leqslant a.$$

✦ Un tel élément, s'il existe, est unique ; on le note $m = \min A$.

☞ Atteindre, Borne inférieure, Maximum, Weierstrass (théorème sur les compacts).

Minimum d'une fonction à valeurs réelles Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble A. On dit que f atteint son minimum m en un point a de A si $f(a) = m$ est le minimum de $\operatorname{Im} f$, c'est-à-dire si $f(a) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in A$. ✦ Le terme minimum est synonyme de *minimum global*, ou *minimum absolu*.

☞ Maximum, Weierstrass (théorème sur les compacts).

Minimum local d'une fonction à valeurs réelles Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E et soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction numérique. Soit a un élément de A. On dit que f admet un minimum local (ou : *minimum relatif*) $m = f(a)$ en a s'il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de a tel que la restriction de f à $\mathscr{V}$ admette un minimum en a. En d'autres termes, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in A$ tel que $\|x - a\| \leqslant \varepsilon$, on ait $f(a) \leqslant f(x)$.

☞ Maximum local.

MINKOWSKI *Hermann* (1864–1909)

(Mathématicien et physicien (théoricien) allemand)

Inégalité de Minkowski Si (E, φ) est un espace préhilbertien, et si on note $q(x) = \varphi(x, x)$ la forme quadratique associée, alors

$$\sqrt{q(x+y)} \leqslant \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}.$$

✦ Cette inégalité permet de prouver l'inégalité triangulaire pour $\sqrt{q}$, et donc le fait que $\sqrt{q}$ est une norme.

Métrique de Minkowski ☞ Métrique.

MINORANT

Minorant d'une partie A de $\mathbb{R}$ Nombre réel m tel que $m \leqslant a$ pour tout élément a de A. ✦ Tout réel $m' \leqslant m$ est encore un minorant de A.

Remarque : Un minorant de A n'est pas nécessairement un élément de A.

Minorant d'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$ Minorant de l'image de f.

☞ Borne inférieure.

Minorant d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle Réel m tel que $M \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

MINORÉ

Partie minorée de $\mathbb{R}$ Partie de $\mathbb{R}$ qui admet un minorant.

Suite minorée Suite réelle dont l'ensemble des termes admet un minorant. ✦ Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.

Fonction minorée Fonction réelle admettant un minorant.

Remarque : Toute fonction $f : [a ; b[\to \mathbb{R}$ décroissante et minorée admet une limite en b, qui est également sa borne inférieure. Toute fonction $f :]a ; b] \to \mathbb{R}$ croissante et minorée admet une limite en a, qui est également sa borne supérieure.

MIXTE

☞ Produit mixte.

MÖBIUS *Augustus Ferdinand* (1790–1868)

(Mathématicien et astronome allemand)

Fonction de Möbius On définit sur $\mathbb{N}^*$ la fonction μ de Möbius par :

- $\mu(1) = 1$;
- $\mu(n) = 0$ si n possède un diviseur, autre que 1, et carré d'un entier ;
- $\mu(n) = (-1)^k$ si $n = p_1 \cdots p_k$, produit de k facteurs premiers distincts.

✦ Si $a \wedge b = 1$, alors $\mu(ab) = \mu(a)\,\mu(b)$. ✦ Pour tout $n \geqslant 2$, $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$.

Formule d'inversion de Möbius Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ (ou dans n'importe quel groupe additif), vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) = \sum_{d|n} g(d),$$

alors il est possible d'inverser cette relation et d'obtenir g en fonction de f :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad g(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d).$$

MODULE

Module d'un nombre complexe Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe ; décomposons-le sous la forme $z = x + \mathrm{i}y$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Alors le module de z est

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

✦ La fonction module définit une norme sur $\mathbb{C}$. ✦ L'espace vectoriel normé $\left(\mathbb{C}, |\cdot|\right)$ est complet.

☞ $\mathbb{C}$, Unimodulaire.

MODULO

☞ Classe d'*équivalence, Congruence.

MOINDRES CARRÉS

Théorème des moindres carrés de Gauss Soient p et n deux entiers, $p \geqslant n$. Soient $A \in \mathfrak{M}_{pn}(\mathbb{R})$ une matrice rectangulaire, et B un vecteur colonne à p composantes. L'équation $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$, n'admet pas toujours de solution (il y a « trop de contraintes » sur X, elle est surdéterminée). Cependant, la norme (euclidienne) de la différence, $\|AX - B\|^2$, est minimale si et seulement si X vérifie le système ${}^tAAX = {}^tAB$. ✦ Si A est de rang n, ce système est un système de Cramer et admet donc une unique solution.

Remarques : La méthode des moindres carrés, plus générale que celle exposée ici, a été mise au point par Gauss au début de sa carrière de mathématicien pour retrouver la petite planète Cérès, découverte par Piazzi, et que ces distraits d'astronomes avaient perdue. ✦ Elle permet également de déterminer la droite de *régression linéaire.

MOIVRE *Abraham de* (1667–1754)
(Mathématicien français)

Formule de de Moivre Pour tout réel t et tout entier naturel n,

$$(\cos t + \mathrm{i}\sin t)^n = \cos nt + \mathrm{i}\sin nt.$$

✦ Cette formule permet de *linéariser des expressions polynomiales en $\cos t$ et $\sin t$.

☞ Linéariser, Tchebychev.

MOMENTS

Moments d'une fonction Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. On dit que f admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ si la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exemple : La fonction $f : x \mapsto 1/(1+x^2)^2$ admet des moments d'ordre 1 et 2, mais pas d'ordre supérieur.

Moment d'une variable aléatoire Soient X une variable aléatoire et k un entier naturel non nul. Le moment d'ordre k d'une variable aléatoire, s'il existe, est défini comme l'espérance de X^k : $\mu_k(\mathrm{X}) = \mathbf{E}(\mathrm{X}^k)$. ✦ Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et si la famille $\big(|n|^k\, \mathbf{P}\,[\mathrm{X}=n]\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, alors X admet un moment d'ordre k et

$$\mu_k(\mathrm{X}) = \mathbf{E}(\mathrm{X}^k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^k\, \mathbf{P}\,[\mathrm{X}=n]\,.$$

✦ Si X est une variable aléatoire à densité et si $x \mapsto |x|^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors X admet un moment d'ordre k et

$$\mu_k(\mathrm{X}) = \mathbf{E}(\mathrm{X}^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x.$$

☞ Espérance, Transfert.

Moments centrés Si X est une variable aléatoire qui admet un moment d'ordre $k \geqslant 2$, alors elle admet des moments d'ordre $1, 2, \ldots, k$; notamment, elle admet une espérance. On définit alors le moment centré d'ordre k par $\hat{\mu}(\mathrm{X}^k) = \mathbf{E}\Big(\big[\mathrm{X} - \mathbf{E}(\mathrm{X})\big]^k\Big)$.

Remarque : Le moment centré d'ordre 2, s'il existe, est égal à la variance.

☞ Espérance, Variance.

MONGE *Gaspard* (1746–1818)
(Mathématicien et homme politique français)

Notations de Monge Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Monge proposa de noter les dérivées partielles secondes de f par les lettres r, s et t :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Remarque : En vertu du théorème de Schwarz, la dérivée $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ est égale à s et la matrice hessienne de f est donc

$$\mathrm{H}_f = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

L'étude de la possibilité d'existence d'un extremum local de f en un point critique (x_0, y_0) commence par l'étude du signe du déterminant $\Delta = rt - s^2$ de cette matrice.

☞ Extremum local, Hessienne, Taylor.

MONOGÈNE

☞ Groupe monogène.

MONOÏDE

Couple $(\mathrm{E}, *)$ où E est un ensemble, muni d'une *loi de composition interne $*$, *associative* et *unitaire*, c'est-à-dire vérifiant $(x*y)*z = x*(y*z)$ pour tous $x, y, z \in \mathrm{E}$, et telle qu'il existe un élément $e \in \mathrm{E}$, appelé *élément *neutre*, vérifiant $x*e = e*x = x$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.

Exemple : $(\mathbb{N}, +)$ est un monoïde commutatif (dit *additif* pour rappeler que l'opération est une addition !) ✦ Si E est un ensemble, $(\mathfrak{P}(\mathrm{E}), \cup)$ est un monoïde commutatif, dont l'élément neutre est l'ensemble vide $\varnothing$.

☞ Symétrisable, Symétrique.

MONÔME

Polynôme dont un seul coefficient est non nul.

Exemple : $3\mathrm{X}^5$ et $\sqrt{2}\,\mathrm{X}^7$ sont des monômes.

MONOTONE

Application monotone Application d'un ensemble ordonné $(\mathrm{A}, \leqslant)$ dans un ensemble ordonné $(\mathrm{B}, \preccurlyeq)$ et qui est, soit croissante, soit décroissante. ✦ Elle est dite *strictement monotone* si elle est strictement croissante, ou strictement décroissante.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application croissante, et soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, car la suite de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$ est de signe constant.

Théorème de convergence monotone Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, définies sur un même intervalle I, continues par morceaux, à valeurs positives, et intégrables sur I. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est-à-dire que $f_n \leqslant f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et converge simplement vers une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Si la suite de terme général $\int_\mathrm{I} f$ est majorée, alors f est intégrable et

$$\int_\mathrm{I} f = \lim_{n\to\infty} \int_\mathrm{I} f_n.$$

✦ Ce théorème est également appelé *théorème de Beppo Levi*.

MORCEAUX

Fonction affine par morceaux Fonction numérique $f : [\,a\,;\,b\,] \to \mathbb{K}$ définie sur un segment telle qu'il existe un entier n et des réels

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

vérifiant : la restriction de f à chaque intervalle $]\,x_i\,;\,x_{i+1}\,[$ est affine. ✦ Si I est un intervalle quelconque, une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ est dite affine par morceaux sur I si sa restriction à tout segment de I est affine par morceaux.

Exemple : La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est affine par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Fonction continue par morceaux Fonction $f : [a\,;b] \to \mathrm{F}$ définie sur un segment et à valeurs dans un espace vectoriel F telle qu'il existe un entier n et des réels

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

vérifiant : la restriction de f à chaque intervalle $]\,x_i\,;\,x_{i+1}\,[$ est continue et admet un prolongement par continuité sur $[\,x_i\,;\,x_{i+1}\,]$.

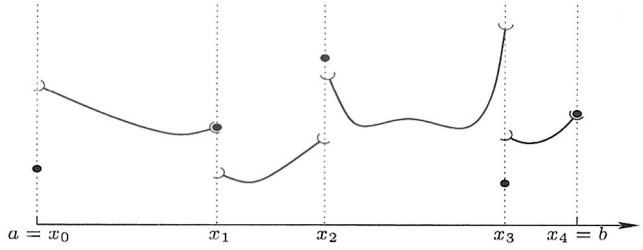


Fig. 64 — Une fonction continue par morceaux. Ici, $n = 4$. Le prolongement sur chaque segment est indépendant de la valeur réelle de la fonction en chaque point $x_0, \ldots, x_n$.

✦ Si I est un intervalle, une application $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, est dite continue par morceaux si sa restriction à tout segment de I est continue par morceaux.

Exemples : La fonction « partie entière » est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. ✦ La fonction $x \mapsto 1/x$ n'est pas continue par morceaux car elle n'admet, ni à gauche ni à droite, de prolongement par continuité en 0.

Fonction de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux Soit $f : [a\,;b] \to \mathrm{E}$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $[a\,;b]$, avec $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$, telle que, pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, la restriction de f à $]\,a_i\,;\,a_{i+1}\,[$ est de classe $\mathscr{C}^k$ et admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[\,a_i\,;\,a_{i+1}\,]$. ✦ Si I est un intervalle quelconque, f est de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux sur I si la restriction de f à tout segment de I est de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux.

MORPHISME

Application préservant une certaine structure entre l'espace de départ et l'espace d'arrivée. ✦ Si un ensemble A est muni d'une loi de composition interne « $*$ » et si B est muni d'une autre loi interne « $\star$ », un morphisme de A vers B est une application $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ telle que $f(a * b) = f(a) \star f(b)$ pour tous $a, b \in \mathrm{A}$. ✦ Plus la structure des espaces de départ et d'arrivée est riche, plus l'application doit vérifier de contraintes. ✦ Un morphisme bijectif est appelé *isomorphisme*. ✦ Un morphisme de A vers lui-même est appelé *endomorphisme*. ✦ Un endomorphisme bijectif est appelé *automorphisme*.

Remarque : En fait, la définition d'un isomorphisme est plutôt : $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un isomorphisme si c'est un morphisme de A vers B et s'il existe un morphisme $g : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id_B}$ et $g \circ f = \mathrm{Id_A}$. En d'autres termes, c'est un morphisme bijectif tel que son inverse soit encore un morphisme. ✦ Cependant, tant que l'on ne considère que des morphismes entre structures algébriques sans se soucier de topologie, comme c'est le cas ici, la définition « isomorphisme = morphisme bijectif » est valide.

Morphisme d'algèbres Soient A et B deux $\mathbb{K}$-algèbres. Un morphisme d'algèbres est une application linéaire entre A et B vérifiant de plus $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ pour tous $x, y \in \mathrm{A}$. ✦ C'est donc à la fois un morphisme d'espaces vectoriels et un morphisme d'anneaux.

Exemple : Soient E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E. L'application $\Phi_u : \mathbb{K}[\mathrm{X}] \to \mathscr{L}(\mathrm{E})$ définie par $\Phi_u : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(u)$ est un morphisme d'algèbre. Son noyau est l'idéal des polynômes annulateurs de E. ☞ Idéal, Polynôme minimal.

Morphisme d'anneaux Application φ d'un anneau A vers un anneau B, qui est un morphisme de groupes de $(\mathrm{A}, +)$ vers $(\mathrm{B}, +)$, et un morphisme de $(\mathrm{A}, \cdot)$ vers $(\mathrm{B}, \cdot)$:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \qquad \varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b),$$

et vérifiant de plus $\varphi(1_\mathrm{A}) = 1_\mathrm{B}$.

Morphisme de corps Application φ d'un corps commutatif K dans un corps commutatif L, et qui est un morphisme d'anneau.

Morphisme d'espaces vectoriels Synonyme de : application linéaire. Application $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ d'un K-espace vectoriel E vers un K-espace vectoriel F, telle que $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$ pour tous $x, y \in \mathrm{E}$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Morphisme de groupes Application $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ d'un groupe G dans un groupe H telle que $\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y)$ pour tous $x, y \in \mathrm{G}$. ✦ Il vérifie donc $\varphi(e_\mathrm{G}) = e_\mathrm{H}$, et $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$ pour tout $x \in \mathrm{G}$. ✦ Plus généralement, si $x \in \mathrm{G}$ et si $n \in \mathbb{Z}$, alors $\varphi(x^n) = \varphi(x)^n$.

Exemples : L'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ définie par $\varphi(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ vérifie $\varphi(\theta + \mu) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\mu)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu}$ pour tous $\theta, \mu \in \mathbb{R}$. C'est donc un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{U}, \cdot)$. Son noyau est le sous-groupe $2\pi\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$. ✦ L'application det : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^*$ qui à une matrice inversible associe son déterminant est un morphisme du groupe $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \cdot)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Remarque : Pour montrer que $\varphi(e_\mathrm{G}) = e_\mathrm{H}$, il suffit de remarquer que le seul élément *idempotent d'un groupe est l'élément neutre.

Automorphisme Morphisme bijectif d'un ensemble sur lui-même.

Endomorphisme Morphisme d'un ensemble vers lui-même.

Isomorphisme Morphisme bijectif.

MOYENNE

Inégalité de la moyenne Soit $f : [a\,;b] \to \mathrm{F}$ une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé, et supposée continue par morceaux. Alors

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leqslant (b-a) \sup_{x \in [\,a\,;\,b\,]} \|f(x)\|.$$

Égalité de la moyenne Soient $f, g : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues par morceaux ; on suppose que f est à valeurs positives : $f \geqslant 0$. Si l'on note m le minimum de g sur $[a\,;b]$ et M son maximum, alors il existe un réel $\theta \in [\,m\,;\,\mathrm{M}\,]$ tel que

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t = \theta \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

✦ Si de plus g est continue, il existe $x \in [a\,;b]$ tel que $\theta = g(x)$, ce qui donne

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t = g(x) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque : Si f n'est pas identiquement nulle, le nombre $\theta = g(x)$ est la moyenne de g sur $[a\,;b]$, pondérée par le « poids » f :

$$\theta = \frac{\int_a^b g(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Moyenne d'une variable aléatoire Synonyme (déconseillé) d'*espérance de cette variable.

Moyenne empirique Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, la variable aléatoire $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ est appelée moyenne empirique de $X_1, \dots, X_n$.

☞ Estimateur, Loi des *grands nombres.

MULTIPLE

Multiple d'un entier, d'un polynôme ☞ Diviseur.

Pôle, racine multiple Pôle ou racine de multiplicité supérieure ou égale à deux.

MULTIPLICATEUR

Multiplicateur de Lagrange ☞ Lagrange.

MULTIPLICITÉ

Ordre de multiplicité d'un pôle d'une fraction rationnelle Si (P, Q) est un représentant irréductible d'une fraction rationnelle F, l'ordre de multiplicité d'une racine a de Q est appelé ordre de multiplicité du pôle a.

Ordre de multiplicité d'une racine Si P est un polynôme non nul, l'ordre de multiplicité de z en tant que racine du polynôme est le plus grand entier m tel que $(X - z)^m$ divise P, c'est-à-dire tel que P se factorise sous la forme $P = (X - z)^m \cdot Q$, le polynôme Q ne s'annulant pas en z. ✦ Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et plus généralement dans un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, c'est l'entier m vérifiant

$$P(z) = \cdots = P^{(m-1)}(z) = 0 \qquad \text{et} \qquad P^{(m)}(z) \neq 0.$$

✦ Une racine de multiplicité 1 est dite *simple*, une racine de multiplicité 2 est dite *double*. ✦ De même, si F est une fraction rationnelle et si P/Q en est un représentant irréductible, l'ordre de multiplicité d'une racine de P est appelé ordre de multiplicité de la racine a de F.

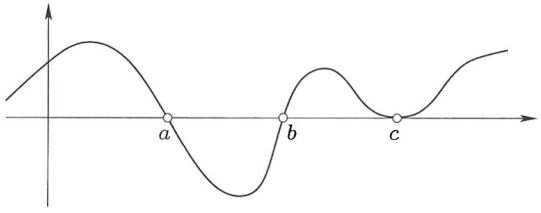


Fig. 65 — En a et b : racines simples. En c : racine (au moins) double, de multiplicité paire.

Ordre de multiplicité d'une valeur propre Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme ; l'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ est l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique de u. ✦ De même, si A est une matrice carrée, l'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ est l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique de A.

N

$\mathbb{N}$

Ensemble des entiers naturels. ✦ C'est un ensemble infini. Muni de l'addition, il a une structure de monoïde commutatif. Muni de la multiplication, a une structure de monoïde commutatif. ✦ Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus *petit élément. Toute partie non vide et majorée admet un plus *grand élément. ✦ $\mathbb{N}$ est, par définition, dénombrable ; son cardinal est dénoté $\aleph_0$.

☞ Aleph.

NABLA

Notation symbolique « ∇ » permettant d'écrire des opérateurs différentiels en analyse vectorielle dans $\mathbb{R}^3$. On peut le considérer comme un « vecteur » de coordonnées

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

On écrit alors symboliquement

$$\mathbf{grad}\, f = \nabla f \qquad \operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$
$$\mathbf{rot}\, \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F} \qquad \triangle f = \nabla^2 f.$$

Remarque : Ces notations sont surtout utilisées en physique, mais souffrent de quelques défauts (lors du passage d'un système de coordonnées à un autre, les « coordonnées » de ∇ ne se transforment pas comme celles d'un vecteur, mais comme celles d'une forme linéaire).

☞ Divergence, Gradient, Laplacien, Rotationnel.

NAPPE

Nappe paramétrée Surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par une application $f : U \to \mathbb{R}^3$ continue sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. ✦ L'image $S = \operatorname{Im} f$ d'une nappe paramétrée (U, f) est appelée son *support*. ✦ La nappe est dite de *classe* $\mathscr{C}^k$ si f est de classe $\mathscr{C}^k$.

☞ Régulier, Tangent.

Nappe cartésienne Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, et notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ en lesquels la fonction F s'annule :

$$\mathscr{S} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ F(x, y, z) = 0\big\}.$$

En un point régulier de $\mathscr{S}$, c'est-à-dire un point $M = (x, y, z)$ tel que $F(M) = 0$ et $\mathbf{grad}\, F(M) \neq 0$, alors il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de M tel que $\mathscr{V} \cap \mathscr{S}$ puisse être envoyée sur un disque ouvert $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ par un homéomorphisme $\varphi : \mathscr{V} \cap \mathscr{S} \to \mathcal{B}$. Localement, l'ensemble $\mathscr{S}$ est une *surface de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : La régularité de F n'est cependant pas nécessaire pour définir une surface, mais des conditions plus générales sont difficiles à écrire.

Nappes équivalentes Deux nappes paramétrées $f : U \to \mathbb{R}^3$ et $g : V \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^k$ sont équivalentes s'il existe un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $\varphi : V \to U$ tel que $f = g \circ \varphi$. ✦ Les supports et les propriétés géométriques de deux nappes équivalentes sont les mêmes.

NATURE

Nature d'une suite ou d'une série Caractère convergent ou divergent de la suite ou de la série.