

Moyenne d'une variable aléatoire Synonyme (déconseillé) d'*espérance de cette variable.

Moyenne empirique Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, la variable aléatoire $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ est appelée moyenne empirique de $X_1, \dots, X_n$.

✎ ESTIMATEUR, LOI DES *GRANDS NOMBRES.

MULTIPLE

Multiple d'un entier, d'un polynôme ✎ DIVISEUR.

Pôle, racine multiple Pôle ou racine de multiplicité supérieure ou égale à deux.

MULTIPLICATEUR

Multiplicateur de Lagrange ✎ LAGRANGE.

MULTIPLICITÉ

Ordre de multiplicité d'un pôle d'une fraction rationnelle Si (P, Q) est un représentant irréductible d'une fraction rationnelle F , l'ordre de multiplicité d'une racine a de Q est appelé ordre de multiplicité du pôle a .

Ordre de multiplicité d'une racine Si P est un polynôme non nul, l'ordre de multiplicité de z en tant que racine du polynôme est le plus grand entier m tel que $(X - z)^m$ divise P , c'est-à-dire tel que P se factorise sous la forme $P = (X - z)^m \cdot Q$, le polynôme Q ne s'annulant pas en z . ♦ Dans $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ et plus généralement dans un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, c'est l'entier m vérifiant

$$P(z) = \dots = P^{(m-1)}(z) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(z) \neq 0.$$

♦ Une racine de multiplicité 1 est dite *simple*, une racine de multiplicité 2 est dite *double*. ♦ De même, si F est une fraction rationnelle et si P/Q en est un représentant irréductible, l'ordre de multiplicité d'une racine de P est appelé ordre de multiplicité de la racine a de F .

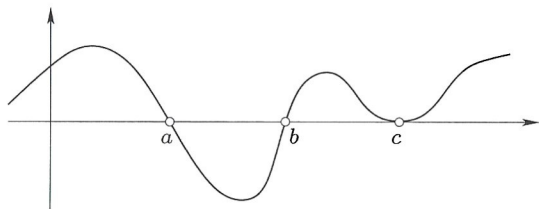


Fig. 65 — En a et b : racines simples. En c : racine (au moins) double, de multiplicité paire.

Ordre de multiplicité d'une valeur propre Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme ; l'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ est l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique de u . ♦ De même, si A est une matrice carrée, l'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ est l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique de A .

N

N

Ensemble des entiers naturels. ♦ C'est un ensemble infini. Muni de l'addition, il a une structure de monoïde commutatif. Muni de la multiplication, a une structure de monoïde commutatif. ♦ Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus *petit élément. Toute partie non vide et majorée admet un plus *grand élément. ♦ $\mathbb{N}$ est, par définition, dénombrable ; son cardinal est dénoté $\aleph_0$.

✎ ALEPH.

NABLA

Notation symbolique « ∇ » permettant d'écrire des opérateurs différentiels en analyse vectorielle dans $\mathbb{R}^3$. On peut le considérer comme un « vecteur » de coordonnées

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

On écrit alors symboliquement

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \nabla f & \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} \\ \text{rot } \mathbf{F} &= \nabla \wedge \mathbf{F} & \Delta f &= \nabla^2 f. \end{aligned}$$

REMARQUE : Ces notations sont surtout utilisées en physique, mais souffrent de quelques défauts (lors du passage d'un système de coordonnées à un autre, les « coordonnées » de ∇ ne se transforment pas comme celles d'un vecteur, mais comme celles d'une forme linéaire).

✎ DIVERGENCE, GRADIENT, LAPLACIEN, ROTATIONNEL.

NAPPE

Nappe paramétrée Surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ continue sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. ♦ L'image $S = \text{Im } f$ d'une nappe paramétrée (U, f) est appelée son *support*. ♦ La nappe est dite de *classe* $\mathcal{C}^k$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$.

✎ RÉGULIER, TANGENT.

Nappe cartésienne Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ en lesquels la fonction F s'annule :

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; F(x, y, z) = 0\}.$$

En un point régulier de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire un point $M = (x, y, z)$ tel que $F(M) = 0$ et $\text{grad } F(M) \neq 0$, alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de M tel que $\mathcal{V} \cap \mathcal{S}$ puisse être envoyée sur un disque ouvert $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ par un homéomorphisme $\varphi : \mathcal{V} \cap \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{B}$. Localement, l'ensemble $\mathcal{S}$ est une *surface de $\mathbb{R}^3$.

REMARQUE : La régularité de F n'est cependant pas nécessaire pour définir une surface, mais des conditions plus générales sont difficiles à écrire.

Nappes équivalentes Deux nappes paramétrées $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^k$ sont équivalentes s'il existe un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme $\varphi : V \rightarrow U$ tel que $f = g \circ \varphi$. ♦ Les supports et les propriétés géométriques de deux nappes équivalentes sont les mêmes.

NATURE

Nature d'une suite ou d'une série Caractère convergent ou divergent de la suite ou de la série.

NÉGLIGEABLE

Suite négligeable devant une autre Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. La suite u est dite négligeable devant la suite α si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies \|u_n\| \leq \varepsilon |\alpha_n|.$$

On écrit alors $u_n = o(\alpha_n)$ ou $u = o(\alpha)$.

REMARQUE : Si la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas (au moins à partir d'un certain rang), cela revient à dire $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n / \alpha_n = 0$.

☞ CROISSANCES COMPARÉES, DOMINATION, HARDY.

Fonction négligeable devant une autre Soient E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E , $a \in E$ adhérent à A , f une application définie sur A à valeurs dans F , et φ une fonction définie sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est négligeable devant φ au voisinage de a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0 \quad \forall x \in \mathcal{B}(a; r) \cap A \quad \|f(x)\| \leq \varepsilon |\varphi(x)|.$$

On écrit alors $f(x) = o(\varphi(x))$ ou $f = o(\varphi)$.

REMARQUE : Si φ ne s'annule pas au voisinage de a , cela revient à dire que $\lim_{x \rightarrow a} f/\varphi = 0$.

☞ ÉQUIVALENT, VOISINAGE, DOMINATION.

Événement négligeable Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Un événement $A \in \mathcal{F}$ est dit négligeable s'il est de probabilité nulle : $P(A) = 0$. On dit aussi que A est *presque impossible*.

Exemples : Si $\Omega = \mathbb{R}$ et si l'on définit, pour tout événement A : $P(A) = \int_A e^{-\pi t^2} dt$, alors tout événement de la forme $\{x\}$ est négligeable. Par σ -additivité, $P(\mathbb{Q}) = 0$ donc $\mathbb{Q}$ est négligeable. ♦ Dans une séquence infinie de tirages à *pile* ou *face*, obtenus avec une pièce équilibrée, toute suite particulière $\omega = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{P, F\}$ est négligeable.

NEUTRE

Élément neutre pour une loi sur un ensemble Si E est un ensemble muni d'une loi « * », un élément *neutre à gauche* est un élément e de E vérifiant $e * x = x$ pour tout $x \in E$. ♦ Il est *neutre à droite* s'il vérifie $x * e = x$ pour tout $x \in E$. ♦ Enfin, il est dit *neutre* s'il est à la fois neutre à gauche et à droite.

REMARQUE : Si un élément neutre existe, alors il est unique.

Exemples : L'élément neutre de $(\mathbb{R}, +)$ est 0. ♦ L'élément neutre de $(\mathbb{R}, \cdot)$ est 1. ♦ L'élément neutre de $(\mathcal{L}(E), o)$ est l'application identité Id_E .

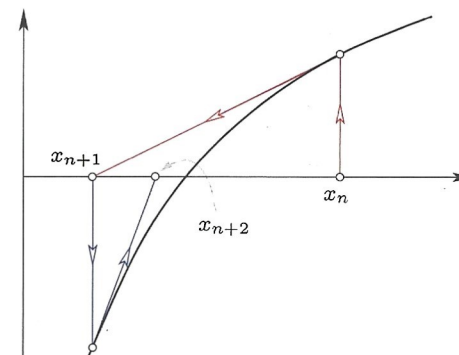
NEWTON sir Isaac (1643–1727)
(Mathématicien et physicien anglais)

Binôme de Newton ☞ BINÔME.

Méthode de Raphson-Newton Méthode itérative de résolution d'une équation de la forme $f(x) = 0$, où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application dérivable. Cette méthode consiste à choisir un premier élément x_0 , puis à définir la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

♦ L'interprétation graphique en est simple : on trace la tangente à la courbe passant par le point d'abscisse x_n ; l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses donne le point x_{n+1} .



♦ Sous certaines conditions, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergera (et même très rapidement) vers une solution de l'équation.

REMARQUES : C'est notamment le cas si f est deux fois dérivable, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire, et si f' et f'' ne s'annulent pas sur $]a; b[$. Selon le signe de f' et de f'' , on choisit alors $x_0 = a$ ou $x_0 = b$. ♦ Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et si f' et f'' ne s'annulent pas sur un intervalle I stable par f , l'application $g : x \mapsto x - f(x)/f'(x)$ est dérivable et de dérivée $g'(x) = f(x)/f''(x)^2$. Un réel vérifiant $f(x_0) = 0$ est donc un point fixe de g vérifiant de plus $g'(x) = 0$: la convergence est alors *quadratique*, et donc extrêmement rapide. ☞ ATTRACTIF, POINT FIXE.

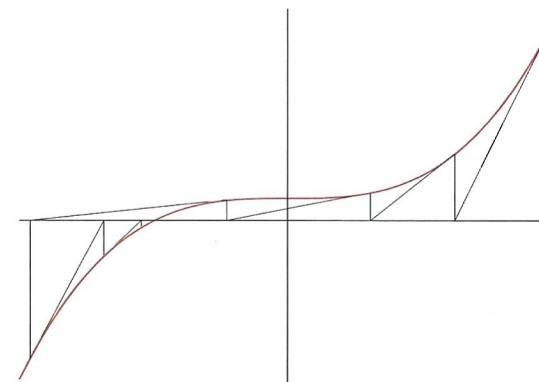


Fig. 66 — La méthode de Newton appliquée à la résolution de l'équation $x^3 + 1 = 0$, avec comme premier point $x_0 = 2$.

REMARQUES : Un moyen extrêmement rapide de calculer numériquement $\sqrt{a}$ lorsque a est un réel positif est d'appliquer la méthode de Newton à la fonction $x \mapsto x^2 - a$, et c'est essentiellement l'algorithme utilisé par les ordinateurs. ♦ De même, on peut calculer l'inverse d'un réel y non nul par la méthode de Newton appliquée à la fonction $x \mapsto 1 - xy$. L'intérêt, dans ce cas, est que l'on n'utilise plus que des sommes et des produits, la relation de récurrence étant $x_{n+1} = x_n(1 - y^2) + y$. ♦ Cette méthode s'étend au cas des fonctions $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$: on utilise tout simplement la même formule, même si l'interprétation graphique est moins visuelle. ♦ Dans le cas de l'équation $x^3 - 1 = 0$, il existe trois solutions distinctes : 1, j et $\bar{j}$. Selon le choix du point de départ $x_0 \in \mathbb{C}$, la méthode de Newton convergera vers l'une de ces trois solutions. Si l'on colorie alors le point x_0 selon la valeur de la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient l'étonnante figure 67, illustrant la nature fractale du bassin d'attraction de chaque solution.

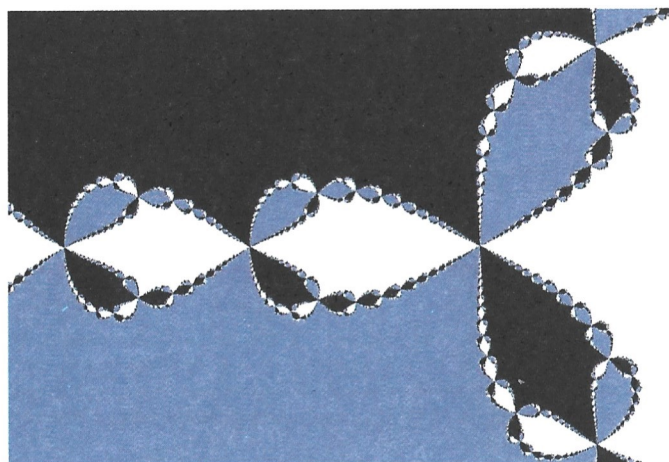


Fig. 67 — Les points z_0 du plan complexe sont colorés en noir si la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1, en blanc si elle converge vers j et en bleu si elle converge vers $\bar{j}$.

NILPOTENT

Endomorphisme nilpotent Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe un entier p tel que $u^p = 0$. Le plus petit entier vérifiant cette propriété est appelé *indice de nilpotence* de u . ♦ Si E est de dimension finie n et si u est nilpotent, alors l'indice de nilpotence de u est inférieur ou égal à n . ♦ Si E est de dimension finie, alors u est nilpotent si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice représentative de u est triangulaire supérieure stricte.

Exemples : L'endomorphisme $D_n : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}_n[X]$, qui à un polynôme associe sa dérivée, est nilpotent d'ordre $n + 1$. ♦ En revanche, la dérivation dans $\mathbb{K}[X]$ n'est pas nilpotente.

REMARQUES : Si E est de dimension finie n et si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent d'ordre p , il existe un vecteur x non nul tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Il est aisé de montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre, ce qui prouve notamment que $p \leq n$. ♦ Si E est de dimension finie n et si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent d'ordre exactement n , alors il existe une base de la forme $\mathcal{B} = (x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x))$ dans laquelle la matrice représentative de u est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

♦ Dans le cas général, mais c'est un peu plus délicat à prouver, il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme ci-dessous. ✎ JORDAN.

Matrice nilpotente Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier p tel que $A^p = 0$. Le plus petit entier vérifiant cette propriété est l'*indice de nilpotence* de A .

REMARQUE : Une matrice carrée A est nilpotente si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

NIVEAU

Courbe de niveau d'une fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (Synonyme : *ligne de niveau*) Soit F une fonction de deux variables à valeurs réelles ou, ce qui revient au même, une

fonction définie sur le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la courbe de niveau $\mathcal{C}_a$ de paramètre a est l'ensemble $F^{-1}(\{a\})$. Si f est une application différentiable et si $M \in \mathcal{C}_a$ est un point régulier de F , alors l'ensemble $\mathcal{C}_a$ est, localement, au voisinage de M , une courbe du plan

Exemple : Citons quelques courbes de niveau importantes.

- Si A est un point du plan et u un vecteur non nul, les lignes de niveau de $F : M \mapsto \text{AM} \cdot u$ sont les droites de vecteur normal u .
- Si A est un point du plan et u un vecteur non nul, les lignes de niveau de $F : M \mapsto \text{Det}(\text{AM}, u)$ sont les droites de vecteur directeur u .
- Si A et B sont des points distincts du plan, les lignes de niveau de l'application $F : M \mapsto (\text{AM}), (\text{BM})$ (angle non orienté entre deux droites) sont les cercles passant par A et B , privés de ces points, ainsi que la droite (AB) , privée de A et de B .
- Si A et B sont des points distincts du plan, les lignes de niveau de l'application $F : M \mapsto (\text{AM}, \text{BM})$ (angle orienté entre vecteurs) sont les arcs de cercle d'extrémités A et B , privés de ces extrémités, ainsi que la droite (AB) privée du segment $[A; B]$ et le segment ouvert $]A; B[$.
- Si D est une droite du plan et F un point n'appartenant pas à D , les lignes de niveau de $F : M \mapsto \frac{\text{MF}}{d(M; D)}$ sont les coniques de foyer F et de directrice D , ainsi que l'ensemble vide.

REMARQUE : Lors de la résolution d'un système différentiel autonome à deux variables, l'existence d'une intégrale première contraint les orbites à vivre sur les lignes de niveau d'une fonction. ✎ AUTONOME.

✎ THÉORÈME DES FONCTIONS *IMPLICITES.

NOMBRE

✎ ALGÈBRE, CONSTRUCTIBLE, DÉCIMAL, DÉRIVÉ, OR, PREMIER, TRANSCENDANT.

NORMAL

Endomorphisme normal Endomorphisme d'un espace vectoriel préhilbertien commutant avec son adjoint.

Exemple : Les endomorphismes autoadjoints et les endomorphismes orthogonaux sont normaux.

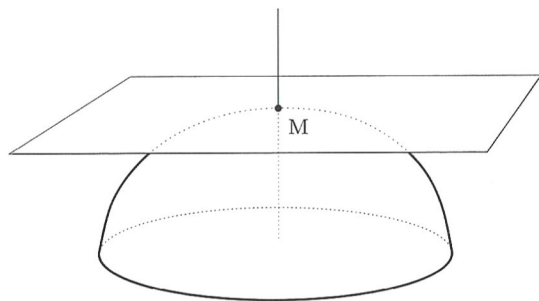
REMARQUES : Un endomorphisme est normal si et seulement s'il vérifie $\|u^*(x)\| = \|u(x)\|$ pour tout $x \in E$. ♦ Si E est de dimension finie, si u est normal et si son polynôme caractéristique est scindé, alors u est diagonalisable dans une base orthonormée. ♦ Si E est un espace euclidien et si u est normal, alors il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc pouvant être une matrice scalaire, ou bien de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Loi normale ✎ LOI.

Matrice normale Matrice commutant avec sa transposée ou sa transconjugée (cas complexe) : $M^t \bar{M} = {}^t M M$.

Exemple : Les matrices symétriques réelles et les matrices complexes hermitiennes sont des cas particuliers de matrices normales.

Normale à une surface en un point M Si M est un point régulier d'une surface $\mathcal{S}$, la normale à $\mathcal{S}$ en M est la droite orthogonale au plan tangent en M à cette surface et passant par M .

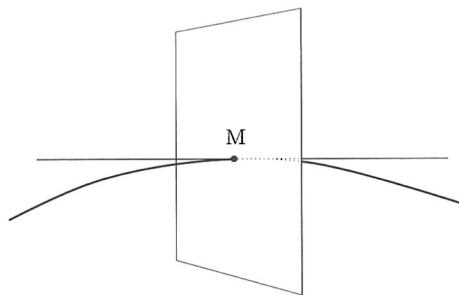


♦ Si la surface est définie par l'équation $F(x, y, z) = 0$, où F est de classe $\mathcal{C}^1$, la normale est donc portée par $\text{grad } F(M)$. ♦ Si la surface est définie par un paramétrage $(u, v) \mapsto f(u, v)$, et si $M = f(u_0, v_0)$, la normale en M est portée par le vecteur

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Paramétrage normal $\Leftrightarrow$ PARAMÉTRAGE.

Plan normal à une courbe de $\mathbb{R}^3$ en un point M Si la courbe γ admet une tangente en un point M , c'est le plan orthogonal en M à cette tangente.



Sous-groupe normal Soit G un groupe. Un sous-groupe H de G est dit normal, ou *distingué*, si pour tout $h \in H$ et pour tout $g \in G$, ghg^{-1} est élément de H . ♦ Cette propriété est essentielle pour pouvoir définir un groupe quotient. $\Leftrightarrow$ GROUPE *QUOTIENT.

Vecteur normal $\Leftrightarrow$ REPÈRE DE *FRENET.

Vecteur normal principal $\Leftrightarrow$ REPÈRE DE *FRENET DANS L'ESPACE.

NORME

Soit E un K -espace vectoriel. On appelle norme sur E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés :

1. pour tout $x \in E$, $N(x) \in \mathbb{R}^+$;
2. pour tout $x \in E$, $(N(x) = 0) \Rightarrow (x = 0)$;
3. pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;
4. pour tout $x, y \in E$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

La propriété 2 est appelée *axiome de séparation*, la 3 est l'*axiome d'homogénéité* et la 4 l'*inégalité triangulaire*.

Exemples : L'espace $\mathbb{R}^n$ peut être muni de normes classiques, en définissant pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \quad \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

♦ Sur $E = \mathbb{K}[X]$, les applications $P \mapsto N_1(P) = \int_0^1 |P|$, $P \mapsto N_2(P) = \sum_{n=0}^{\infty} |P(n)|/n!$ et $P \mapsto N_3(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^1 |P(t)| t^n dt$ sont des normes.

$\Leftrightarrow$ SEMI-NORME.

Norme d'algèbre Soit A une algèbre. Une norme d'algèbre sur A est une norme $\|\cdot\|$ d'espace vectoriel telle que, pour tous $x, y \in A$, on ait

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|.$$

L'algèbre A est alors appelée *algèbre normée*.

Exemple : Munissons $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ d'une norme $\|\cdot\|$ quelconque. On peut alors munir l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre en posant $\|A\| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$ pour toute matrice A .

$\Leftrightarrow$ NORME MATRICIELLE, NORME SUBORDONNÉE.

Norme euclidienne Si E est un espace vectoriel euclidien, on appelle norme euclidienne la norme définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$.

Normes équivalentes Deux normes N et N' sur un espace vectoriel E sont dites équivalentes s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha N \leq N' \leq \beta N$.

REMARQUES : Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes. ♦ Si N et N' sont deux normes sur E , et si l'on peut exhiber une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $N(u_n)$ tende vers 0 mais pas $N'(u_n)$, alors N et N' ne sont pas équivalentes.

$\Leftrightarrow$ NORME *DOMINÉE PAR UNE AUTRE.

Norme infinie Soit $f : A \rightarrow F$ une fonction définie sur un ensemble A , à valeurs dans un espace vectoriel normé F , et bornée. On note alors

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \in A} \|f(a)\|.$$

Sur l'ensemble $\mathcal{B}(A, F)$ des applications bornées de A dans F , cette application est une norme, appelée norme infinie ou *norme de la convergence uniforme*.

$\Leftrightarrow$ CONVERGENCE UNIFORME.

Norme matricielle Norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\|MN\| \leq \|M\| \cdot \|N\|$ pour toutes matrices M et N . ♦ Une norme matricielle est donc une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\Leftrightarrow$ NORME SUBORDONNÉE, RAYON SPECTRAL.

Norme produit Soient $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_k, \|\cdot\|_k)$ des espaces vectoriels normés. Alors, on peut munir $E = E_1 \times \dots \times E_k$ de la norme N définie par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E \quad N(x) = \sup_i \|x_i\|_i.$$

♦ Il existe d'autres façons simples de construire une norme sur E , par exemple

$$N_1(x) = \|x_1\|_1 + \dots + \|x_k\|_k \quad N_2(x) = \sqrt{\|x_1\|_1^2 + \dots + \|x_k\|_k^2}.$$

♦ Ces normes sont équivalentes entre elles.

Norme subordonnée Soient E et F deux espaces vectoriels. On appelle norme subordonnée (aux normes sur E et F respectivement) la norme définie sur l'espace $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F par

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

♦ Une telle norme, définie sur $\mathcal{L}_c(E)$, vérifie $\|u \circ v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$: c'est donc une norme d'algèbre.

REMARQUE : En particulier (mais c'est un peu délicat à montrer), les normes subordonnées aux normes usuelles sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$ s'écrivent

$$\begin{aligned}\|A\|_\infty &= \sup_{\|X\|_\infty=1} \|AX\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \\ \|A\|_1 &= \sup_{\|X\|_1=1} \|AX\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \\ \|A\|_2 &= \sup_{\|X\|_2=1} \|AX\|_2 = \sqrt{\rho(A^* A)},\end{aligned}$$

où ρ représente le *rayon spectral.

✎ NORME D'ALGÈBRE.

Norme du sup ✎ NORME INFINIE.

Norme de la convergence en moyenne Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des applications continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, intégrables sur I . Pour toute fonction de $\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{K})$, on pose

$$N_1(f) = \int_I |f|.$$

L'application N_1 est une norme sur $\mathcal{L}_c^1(I, \mathbb{K})$, appelée norme de la convergence en moyenne. ♦ Si on l'étend à l'espace $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux et intégrables, elle devient une *semi-norme.

✎ CONVERGENCE EN MOYENNE.

Norme de la convergence en moyenne quadratique On définit sur l'espace $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{K})$ des fonctions continues et de carré intégrable sur un intervalle I la norme de la convergence en moyenne quadratique

$$N_2(f) = \left(\int_I |f|^2 \right)^{1/2}.$$

♦ On peut l'étendre en une semi-norme sur l'espace $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux et de carré intégrable sur I .

✎ CONVERGENCE EN MOYENNE QUADRATIQUE.

NORMÉ

Algèbre normée ✎ ALGÈBRE.

Espace vectoriel normé ✎ ESPACE VECTORIEL.

Vecteur normé Synonyme de vecteur unitaire, c'est-à-dire vecteur de norme égale à 1. ♦ Si u est un vecteur non nul, alors $\frac{1}{\|u\|} u$ est un vecteur normé.

NOYAU

Noyau d'un morphisme d'anneaux Si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, son noyau est $\text{Ker } \varphi = \{a \in A ; \varphi(a) = 0_B\}$. ♦ C'est un idéal de A (mais pas un sous-anneau).

Noyau d'un morphisme de groupes Si $\varphi : G \rightarrow H$ est un morphisme de groupes multiplicatifs, son noyau est l'ensemble des éléments de G dont l'image est le neutre de H : $\text{Ker } \varphi = \{g \in G ; \varphi(g) = e_H\}$. ♦ C'est un sous-groupe de G . ♦ Le morphisme φ est injectif si et seulement si son noyau est réduit au neutre : $\text{Ker } \varphi = \{e_G\}$.

REMARQUE : Si H est un groupe abélien, son opération interne est généralement notée additivement, son élément neutre est noté 0 et $\text{Ker } \varphi = \{g \in G ; \varphi(g) = 0\}$.

Noyau d'une application linéaire Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire, son noyau $\text{Ker } f$ est l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est nulle : $\text{Ker } f = f^{-1}(\{0\})$. ♦ C'est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ E . ♦ L'application linéaire $f : E \rightarrow F$ est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0_E\}$.

Lemme de décomposition des noyaux Soient E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E . Soient P et Q deux polynômes premiers entre eux. Alors

$$\text{Ker } PQ(u) = \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u).$$

♦ De même, si $P_1, \dots, P_r$ sont des polynômes premiers entre eux deux à deux et si l'on pose $P = P_1 \cdots P_r$, alors

$$\text{Ker } P(u) = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker } P_k(u).$$

REMARQUE : Ce théorème est particulièrement utile lorsque P est un polynôme annulateur de u . Dans ce cas, il donne une décomposition de l'espace E en somme de noyaux ; les projecteurs sur chaque sous-espace vectoriel sont alors des polynômes en u . ♦ Si de plus P est scindé (ce qui est toujours le cas si le corps de base est $\mathbb{C}$), alors E s'écrit sous la forme

$$E = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id})^{m_k}.$$

Chaque espace $\text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id})^{m_k}$ (où m_k est la multiplicité de la valeur propre λ_k) est un sous-espace *caractéristique, et est stable par u . Cette écriture est un premier pas dans le travail de réduction d'un endomorphisme (diagonalisable ou non).

✎ SOUS-ESPACES *CARACTÉRISTIQUES, DÉCOMPOSITION DE *JORDAN.

NUMÉRIQUE

Dont la valeur est un nombre (réel ou complexe). Ainsi, une série numérique est une série réelle ou complexe, par opposition à une série dans un espace vectoriel normé, ou à une série de fonctions. ♦ Une *fonction numérique* est, plus spécifiquement, une fonction à valeurs réelles.