

O

O (PETIT/GRAND « O »)

☞ DOMINATION, NÉGLIGEABLE.

OPÉRER

Groupe opérant sur un ensemble ☞ ACTION, ORBITE.

OR

Nombre d'or Nombre $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ♦ C'est l'unique racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Il vérifie donc $1/\varphi = \varphi - 1$. ♦ Un *rectangle d'or*, c'est-à-dire un rectangle de côtés a et b tel que $a/b = \varphi$, est tel que, si on lui ôte un carré comme sur la figure ci-dessous, le rectangle restant est encore un rectangle d'or.

REMARQUES : Numériquement, $\varphi \approx 1,618034\dots$ et $1/\varphi \approx 0,618034\dots$. Le nombre d'or apparaît dans de nombreux problèmes de mathématiques, comme par exemple la limite des quotients successifs F_{n+1}/F_n de la suite de Fibonacci.

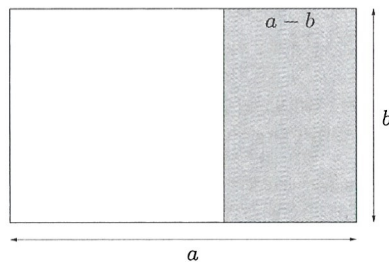


Fig. 68 — Un rectangle d'or. En gris, un second rectangle d'or, obtenu en retirant un carré du rectangle original. On a $\varphi = \frac{a}{b}$ et $\frac{a-b}{b} = \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$.

ORBITE

Orbite d'un système différentiel Synonyme de *trajectoire* : solution du système différentiel, ou image de cette solution.

Orbite d'un élément d'un ensemble sur lequel agit un groupe Si G est un groupe opérant sur un ensemble E (☞ ACTION), et si x est un élément de E , l'ensemble des éléments de la forme $g.x$ pour g parcourant G est appelé orbite de x . ♦ Les orbites de G sont donc les classes d'équivalences de la relation d'équivalence définie par : $x \sim y$ si, et seulement si, il existe $g \in G$ tel que $y = g.x$.

Exemples : Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut faire agir le groupe $G = GL_n(\mathbb{K})$ sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par l'application $\varphi_P : M \mapsto P^{-1}MP$. L'orbite d'une matrice est alors l'ensemble des matrices qui lui sont semblables. ♦ Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, toute orbite contient une matrice triangulaire supérieure (théorème de trigonalisation). ♦ Un groupe G opère à gauche sur lui-même par l'application $(g, h) \mapsto gh$. Pour cette action, l'orbite d'un élément h d'un groupe est donc l'ensemble $Gh = \{gh ; g \in G\} = G$.

ORDONNÉ

Corps ordonné Corps $(K, +, \cdot)$ muni d'une relation d'ordre total $\leq$ compatible avec l'addition et la multiplication par des nombres positifs : si $a \geq 0$ et si $x \leq y$, alors $ax \leq ay$.

Ensemble ordonné Paire $(X, \preceq)$ où X est un ensemble, et $\preceq$ une relation d'ordre sur X . ♦ Il est dit *totalelement ordonné* s'il est muni d'un *ordre total, et *bien ordonné* s'il est muni d'un bon ordre.

Exemples : $(\mathbb{Z}, \leq)$ est un ensemble totalelement ordonné. ♦ $(\mathbb{N}, \leq)$ est un ensemble bien ordonné.

Groupe (additif) ordonné Groupe $(G, +, \leq)$ tel que la relation d'ordre total « $\leq$ » est compatible avec l'addition : si $x, y, z \in G$ et si $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$.

ORDRE

Ordre d'un groupe Synonyme de cardinal de ce groupe. ♦ Si G est un groupe de cardinal fini, on dit que G est un groupe fini, et on note $|G|$ son ordre.

Ordre d'un élément d'un groupe Soient G un groupe et $g \in G$. L'ordre de g est, par définition, l'ordre du sous-groupe monogène $\text{gr}(g)$ engendré par $\{g\}$.

☞ GROUPE, SOUS-GROUPE ENGENDRÉ, GROUPE CYCLIQUE, GROUPE MONOGÈNE.

Ordre d'une matrice carrée Nombre de lignes (ou de colonnes) de cette matrice.

REMARQUE : On prendra soin de ne pas employer l'un pour l'autre les termes : *ordre* (définissant la taille de la matrice), *dimension* (jamais employé pour une matrice, mais pour un espace vectoriel dans lequel on effectue des représentations matricielles), *rang* (nombre de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes).

Ordre de multiplicité ☞ MULTIPLICITÉ.

Ordre d'une équation différentielle Degré maximal de dérivation de la fonction inconnue apparaissant dans l'équation.

REMARQUE : L'équation $3y'' + y'^2 + \cos y = 0$ est de degré 2. ♦ L'équation $3y'' + y'^2 = 0$ est de degré 2, mais doit plutôt être vue comme une équation de degré 1 en y' !

Relation d'ordre Une relation d'ordre sur un ensemble A est une relation binaire « $\preceq$ » qui est à la fois :

<i>réflexive</i>	$\forall x \in A$	$x \preceq x$;
<i>antisymétrique</i>	$\forall x, y \in A$	$(x \preceq y \text{ et } y \preceq x) \Rightarrow x = y$;
<i>transitive</i>	$\forall x, y, z \in A$	$(x \preceq y \text{ et } (y \preceq z) \Rightarrow x \preceq z$.

Exemples : La relation d'ordre usuelle « $\leq$ » sur $\mathbb{R}$ est évidemment une relation d'ordre. ♦ On peut munir l'ensemble $\mathbb{R}^2$ de l'ordre *lexicographique* : $(x, y) \leq (x', y')$ si et seulement si $x < x'$ ou $(x = x' \text{ et } y \leq y')$. En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, on construit donc un ordre total sur $\mathbb{C}$; cependant, $\mathbb{C}$, muni de cet ordre, n'est pas un corps ordonné (et cet ordre n'est pas utilisable en analyse, notamment). ♦ Soit X et Y deux ensembles; notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des couples (A, f) où A est une partie de X et $f : A \rightarrow Y$ une application définie sur A . L'ensemble $\mathcal{F}$ peut être muni de la relation $\preceq$ définie par : $(A, f) \preceq (B, g)$ si et seulement si $A \subset B$ et la restriction de g à A est égale à f . Cette relation est une relation d'ordre.

☞ SOLUTION MAXIMALE.

Ordre total Relation d'ordre $\preceq$ sur un ensemble A telle que deux éléments quelconques de A sont toujours comparables, c'est-à-dire vérifient $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.

Exemple : L'ordre habituel sur $\mathbb{R}$ est un ordre total.

Ordre partiel Relation d'ordre $\preceq$ sur un ensemble A , qui n'est pas totale, c'est-à-dire telle qu'il existe des éléments non comparables.

Exemple : Soit E un ensemble non vide. On peut le munir de la relation d'ordre « $\preceq$ » définie par : $A \preceq B$ si et seulement si $A \subset B$. Cet ordre est partiel dès que E est de cardinal au moins 2. En effet, si x et y sont des éléments distincts de E , les ensembles $\{x\}$ et $\{y\}$ ne sont pas comparables. ♦ On peut munir l'ensemble $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques positives

réelles d'une relation d'ordre partiel en écrivant que $A \leq B$ si et seulement si $B - A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Pour cet ordre, les matrices $\text{diag}(0, 0)$ et $\text{diag}(+1, -1)$ ne sont pas comparables.

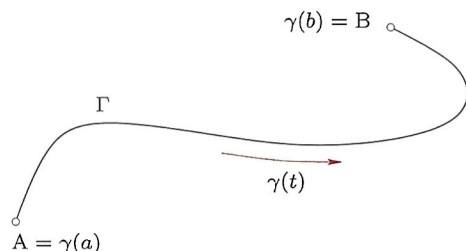
Bon ordre Relation d'ordre $\leq$ sur un ensemble A telle que toute partie B non vide de A admet un plus petit élément m , c'est-à-dire un élément $m \in B$ tel que $m \leq b$ pour tout $b \in B$.

Exemple : L'ordre naturel sur $\mathbb{N}$ est un bon ordre. ♦ En vertu de l'axiome du choix, on sait qu'il existe un bon ordre sur $\mathbb{R}$; cependant, on n'en connaît aucun de manière explicite.

☞ CHOIX.

ORIENTÉ

Arc orienté Si $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est un arc paramétré régulier, les paramétrages admissibles de γ peuvent être séparés en deux classes, selon que le changement de paramètre est strictement croissant ou strictement décroissant. *Orienter* l'arc, c'est choisir, arbitrairement, une de ces classes. Un arc paramétré orienté est représenté graphiquement par son support Γ , que l'on munit d'une flèche indiquant le sens de croissance du paramètre.



REMARQUE : Le choix d'une orientation pour un chemin permet de définir la courbure de manière algébrique (avec un signe).

Espace vectoriel orienté Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. L'ensemble $\mathcal{B}$ des bases de E peut être séparé en deux classes d'équivalences, en disant que deux bases B et C sont équivalentes lorsque $\det_B(C) > 0$. *Choisir une orientation*, c'est attribuer la dénomination (arbitraire) de *base directe* à tous les éléments de l'une des classes, et de *base indirecte* à tous les autres. L'espace E est alors dit orienté.

REMARQUE : Un espace complexe ne peut être orienté.

ORTHOCENTRE

Orthocentre d'un triangle Point de concours des trois hauteurs d'un triangle non plat.

☞ TRIANGLE.

ORTHOGONAL

Orthogonal d'une partie A d'un espace préhilbertien E Espace vectoriel des vecteurs de E orthogonaux à tout vecteur de A :

$$A^\perp = \{x \in E; \forall a \in A \quad \langle a|x \rangle = 0\}.$$

Base orthogonale Dans un espace vectoriel préhilbertien, base formée de vecteurs orthogonaux deux à deux.

Endomorphisme orthogonal Dans un espace vectoriel euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, endomorphisme préservant le produit scalaire, c'est-à-dire tel que, pour tous $x, y \in E$, on ait

$$\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle.$$

♦ Un endomorphisme est orthogonal si, et seulement si, il vérifie $u^*u = uu^* = \text{Id}$.

♦ Les endomorphismes orthogonaux sont exactement les isométries vectorielles, c'est-à-dire qu'ils sont caractérisés par la propriété : $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$. ♦ Un endomorphisme est orthogonal si et seulement si sa matrice représentative, dans une base orthonormée est une matrice orthogonale.

Famille orthogonale Famille $(x_i)_{i \in I}$ d'un espace vectoriel préhilbertien telle que $\langle x_i | x_j \rangle = 0$ si $i \neq j$.

Groupe orthogonal Groupe $O(E)$ des endomorphismes orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien E , ou groupe $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ♦ Le sous-groupe de $O(E)$ formé des endomorphismes de déterminant $+1$ est noté $O^+(E)$ ou $SO(E)$, et appelé *groupe spécial orthogonal*. ☞ SPÉCIAL.

Matrice orthogonale Matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tMM = M^tM = I_n$.

REMARQUES : Une matrice orthogonale représente, dans une base orthonormée, un endomorphisme orthogonal. ♦ Ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: c'est donc également la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, d'une base orthonormée, ou encore la matrice de passage entre deux bases orthonormées. ♦ Une telle matrice est nécessairement inversible, son déterminant vaut -1 ou $+1$, et son spectre est vide ou inclus dans $\{-1; +1\}$.

Parties orthogonales Parties A et B d'un espace vectoriel préhilbertien telles que

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad \langle a | b \rangle = 0.$$

On écrit $A \perp B$.

Polynômes orthogonaux ☞ POLYNÔME.

Procédé d'orthogonalisation ☞ GRAM-SCHMIDT.

Projecteur orthogonal ☞ PROJECTION.

Somme directe orthogonale Si U et V sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel préhilbertien E , et si U est orthogonal à V , alors ils sont en somme directe, et leur somme $U \oplus V$ est notée $U \overset{\perp}{\oplus} V$. ♦ Si $V_1, \dots, V_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E , on dit qu'ils sont en somme directe orthogonale s'ils sont orthogonaux deux à deux. Ils sont alors en somme directe et leur somme est notée

$$V_1 \overset{\perp}{\oplus} V_2 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} V_n \quad \text{ou} \quad \bigoplus_{i=1, \dots, n}^\perp V_i.$$

Exemple : Si l'on munit l'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par $\langle A | B \rangle = \text{tr}({}^tA \cdot B)$, alors E est la somme directe orthogonale de l'espace des matrices symétriques et de celui des matrices antisymétriques.

Supplémentaires orthogonaux Sous-espaces vectoriels U et V d'un espace préhilbertien E tels que E soit la somme directe orthogonale de U et de V : $E = U \overset{\perp}{\oplus} V$.

Exemple : Si U est de dimension finie, alors son orthogonal $U^\perp$ est un supplémentaire orthogonal de U . ♦ Dans le cas général, si U admet un supplémentaire orthogonal, alors celui-ci est unique, et c'est $U^\perp$.

REMARQUES : Si E est la somme directe orthogonale de U et de V , alors U et V sont nécessairement fermés. ♦ Si U est de codimension finie, on ne peut hélas rien affirmer sur son orthogonal, qui n'est pas nécessairement un supplémentaire orthogonal de U . Ainsi, dans

l'espace E des fonctions continues sur $[0; 1]$ et à valeurs réelles, muni du produit scalaire $\langle f|g \rangle = \int_0^1 fg$, le sous-espace vectoriel U des fonctions s'annulant en 0 est un hyperplan de E et admet donc des supplémentaires; cependant, il n'admet pas de supplémentaire orthogonal, car on peut montrer que $U^\perp = \{0\}$.

Symétrie orthogonale $\Leftrightarrow$ SYMÉTRIE.

Théorème de projection orthogonale $\Leftrightarrow$ PROJECTION.

Vecteurs orthogonaux Dans un espace vectoriel préhilbertien, vecteurs dont le produit scalaire est nul.

ORTHONORMÉE

Base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E Base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $\langle e_i|e_j \rangle = \delta_{ij}$ pour tous i, j de $[1; n]$.

REMARQUE : Dans une telle base, les calculs sont particulièrement simples. En effet, si $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$, et si l'on note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

alors $\langle x|y \rangle = {}^t X \cdot Y$ si E est euclidien, et $\langle x|y \rangle = {}^t \overline{X} \cdot Y$ si E est hermitien. De plus, $x_k = \langle e_k|x \rangle$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a donc, au total :

$$x = \sum_{k=1}^n \langle e_k|x \rangle e_k \quad \langle x|y \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k = \sum_{k=1}^n \langle x|e_k \rangle \langle e_k|x \rangle$$

Ces formules sont à rapprocher respectivement de la formule de Dirichlet, de la forme polaire de la formule de Parseval et de la définition d'un coefficient de Fourier.

Famille orthonormée d'un espace vectoriel préhilbertien E Famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E telle que $\langle x_i|x_j \rangle = \delta_{ij}$ pour tous $i, j \in I$. $\blacklozenge$ Une telle famille est nécessairement libre.

$\Leftrightarrow$ BASE *HILBERTIENNE.

OSULATEUR

Cercle osculateur Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré plan de classe $\mathcal{C}^2$ au moins, paramétré par une abscisse curviligne, et soit $M(s)$ un point birégulier de cet arc. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega = M(s) + R(s)N(s)$, où $R(s)$ est le rayon de courbure et $N(s)$ le vecteur normal en $M(s)$, est appelé cercle osculateur de γ en $M(s)$. $\blacklozenge$ Le cercle $\mathcal{C}$ est, parmi tous les cercles passant par $M(s)$, celui qui « épouse » au mieux l'arc au voisinage de $M(s)$ (il s'en éloigne en $o(s^2)$).

$\Leftrightarrow$ COURBURE, FRENET.

OUVERT

Soit E un espace vectoriel normé. Une partie $A \subset E$ est dite ouverte dans E (on dit aussi que A est un ouvert) si A est un voisinage de chacun de ses points, ou encore, si chacun des points de A est intérieur à A . En d'autres termes :

$$\forall a \in A \quad \exists r > 0 \quad \mathcal{B}(a; r) \subset A.$$

$\Leftrightarrow$ BOULES, ÉTOILÉ, FERMÉ, POINT *INTÉRIEUR, TOPOLOGIE RELATIVE, VOISINAGE.

P

PAIR

Fonction paire Fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0, et telle que, pour tout $x \in I$, on ait $f(-x) = f(x)$.

REMARQUES : Si f est paire et dérivable, sa dérivée est impaire. $\blacklozenge$ Si f est impaire et dérivable, alors sa dérivée est paire. $\blacklozenge$ Si f est développable en série entière $\sum a_n x^n$, alors f est paire si et seulement si $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie paire d'une fonction Toute fonction $f :]-A; +A[\rightarrow \mathbb{K}$ peut s'écrire, de manière unique, comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire; en notant $\hat{f} : x \mapsto f(-x)$, cette décomposition s'écrit $f = \frac{1}{2}(f + \hat{f}) + \frac{1}{2}(f - \hat{f})$, ou encore

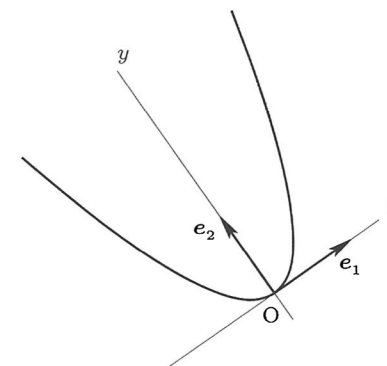
$$\forall x \in I \quad f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

La partie paire de f est $\frac{1}{2}(f + \hat{f})$.

PARABOLE

Conique à un seul axe de symétrie, d'équation $x^2 = 2py$ dans un repère orthonormé d'axe Oy confondu avec cet axe de symétrie, et d'origine le sommet de la parabole.

$\blacklozenge$ C'est une conique connexe et non bornée.



REMARQUE : Une parabole est obtenue par section d'un cône de révolution par un plan parallèle à une génératrice du cône.

