Q

$\mathbb{Q}$

Corps des nombres rationnels, c'est-à-dire des nombres de la forme p/q, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$. ✦ Quitte à diviser p et q par leur PGCD, on peut représenter, de manière unique, tout rationnel sous la forme d'une fraction *irréductible p/q, c'est-à-dire vérifiant $q > 0$ et $p \wedge q = 1$.

Remarques : $\mathbb{Q}$ est dénombrable. ✦ $\mathbb{Q}$ est un corps *ordonné : l'ordre usuel est compatible avec la multiplication par des nombres positifs. ✦ En tant qu'espace vectoriel normé (muni de la valeur absolue), $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. ✦ En tant que partie de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert, ni fermé. En revanche, il est dense dans $\mathbb{R}$, et d'intérieur vide. ✦ Le corps $\mathbb{Q}$ est défini à partir de l'anneau $\mathbb{Z}$ de la façon suivante : on considère dans un premier temps l'ensemble des couples (p, q) d'entiers, sur lequel on définit la relation d'équivalence :

$$(p, q) \sim (p', q') \iff pq' = p'q.$$

Les classes d'équivalence modulo cette relation d'équivalence sont les nombres rationnels : on note p/q la classe de (p, q). La même construction permet, à partir de l'anneau $\mathbb{K}[X]$, de construire le corps des fractions rationnelles. ☞ Rationnel.

QUADRATIQUE

☞ Forme quadratique.

QUADRIQUE

Surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$F(x, y, z) = \underbrace{a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + 2d\,xy + 2e\,xz + 2f\,yz}_{q(x,y,z)} + \underbrace{2g\,z + 2h\,y + 2i\,x}_{\varphi(x,y,z)} + j = 0.$$

L'étude de la partie quadratique $q(x, y, z)$ permet une première classification du genre de la quadrique, selon le signe (positif, négatif ou nul) des valeurs propres de l'endomorphisme symétrique associé.

- Si q est de rang 3, la quadrique est dite *à centre* : ce peut être un hyperboloïde ou un ellipsoïde, éventuellement *dégénérés* (réduit à un cône, un point, ou l'ensemble vide).
- Si q est de rang 2, la quadrique peut être un paraboloïde (elliptique ou hyperbolique selon le signe des autres valeurs propres), un cylindre elliptique ou hyperbolique (éventuellement dégénéré en l'union de deux plans sécants).
- Si q est de rang 1, la quadrique peut être un cylindre parabolique ou, dans le cas dégénéré : deux plans parallèles ou l'ensemble vide.

Remarque : Les sections planes de quadriques sont des coniques.

☞ Centre, Cône, Cylindre, Ellipsoïde, Hyperboloïde, Paraboloïde.

QUASI-CERTAIN

Un événement est quasi-certain lorsqu'il est de probabilité 1. On dit aussi qu'il a lieu *presque sûrement*.

QUASI-IMPOSSIBLE

Un événement est quasi-impossible lorsqu'il est de probabilité 0. On dit aussi qu'il est *négligeable*.

QUATERNIONS

☞ Hamilton.

QUOTIENT

Quotient d'un ensemble par une relation d'équivalence Soit A un ensemble, sur lequel on définit une relation d'équivalence. On appelle quotient de A par la relation « $\sim$ » l'ensemble des classes d'équivalences de A modulo $\sim$, et on le note $A/\sim$.

Exemple : Considérons l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. On définit la relation d'équivalence « $\sim$ » par : $x \sim y$ si et seulement si x et y sont congrus modulo 2. Alors $\mathbb{N}/\sim$ est composé de deux classes d'équivalence, la classe P des entiers pairs et la classe I des entiers impairs : $\mathbb{N}/\sim = \{P, I\}$.

Quotient de Rayleigh ☞ Rayleigh.

Anneau quotient Soient $(A, +, \times)$ un anneau et I un idéal de A. On définit la relation d'équivalence « $\sim$ » par $x \sim y$ si et seulement si $(x - y) \in I$. Le quotient de A par cette relation d'équivalence est noté A/I. On peut alors construire sur l'ensemble quotient A/I une loi $+$ et une loi $\times$ héritées des lois de A, en posant

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \qquad \text{et} \qquad \bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b}.$$

On munit ainsi A/I d'une structure d'anneau, qui est telle que la surjection *canonique $a \mapsto \bar{a}$ est un morphisme d'anneaux.

Remarque : Les lois $+$ et $\times$ sur A/I sont bien définies car, si $a \sim a'$ et $b \sim b'$, la classe de $a + b$ et celle de $a \times b$ sont égales à celles de $a' + b'$ et $a' \times b'$. Ainsi, le calcul de $\bar{a} + \bar{b}$ ne dépend que des classes $\bar{a}$ et $\bar{b}$ et non du choix des représentants a et b de ces classes.

Exemple : L'anneau quotient $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est obtenu en quotientant l'anneau $\mathbb{Z}$ par l'idéal $n\mathbb{Z}$; l'addition et la multiplication sont compatibles avec le passage au quotient, puisque si $\bar{a} = \bar{a}'$ et $\bar{b} = \bar{b}'$, c'est-à-dire si $a \equiv a' \ [n]$ et $b \equiv b' \ [n]$, alors

$$a + b \equiv a' + b' \ [n] \qquad \text{et} \qquad ab \equiv a'b' \ [n].$$

Groupe quotient Soit G un groupe. Soit H un sous-groupe de G vérifiant la propriété suivante : pour tout $h \in H$ et pour tout $g \in G$, ghg^{-1} est élément de H ; on dit alors que H est un sous-groupe *normal*, ou encore *distingué*. On définit la relation d'équivalence « $\sim$ » sur G par : $g \sim g'$ si et seulement si $g^{-1} g' \in H$. Enfin, on note G/H l'ensemble des classes d'équivalences modulo cette relation d'équivalence.

On peut construire sur l'ensemble G/H une loi $*$ induite par la loi de G, en posant $\overline{g_1} * \overline{g_2} = \overline{g_1 g_2}$ pour tous $g_1, g_2 \in G$. On munit ainsi le quotient G/H d'une structure de groupe, pour laquelle la surjection canonique $g \mapsto \bar{g}$ est un morphisme de groupes.

Remarques : Si H est un sous-groupe de G ne possédant pas la propriété d'être normal, il est toujours possible de définir l'ensemble quotient G/H, mais celui-ci ne peut pas hériter de loi induite par celle de G. En effet, le calcul de $\overline{g_1} * \overline{g_2}$ ne dépend pas des classes seules de g_1 et de g_2, mais du choix de leurs représentants : si $g_1 \sim g_1'$ et $g_2 \sim g_2'$, rien n'assure que $g_1 * g_2 \sim g_1' * g_2'$. ✦ Dans un groupe abélien, tout sous-groupe H est normal ; on peut donc construire le groupe quotient G/H pour tout sous-groupe H de G.

Exemple : Dans le groupe abélien $\mathbb{Z}$, le sous-groupe $n\mathbb{Z}$ est distingué et le quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a donc bien une structure de groupe, dont la loi $+$ est héritée de l'addition sur $\mathbb{Z}$.

☞ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.