

R

R

Ensemble des nombres réels. ♦ $\mathbb{R}$ est muni d'un *ordre total, qui est l'ordre usuel, noté « $\leq$ ». ♦ En tant qu'ensemble ordonné, il possède la *propriété de la borne supérieure* : toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure ; de même, toute partie minorée non vide admet une borne inférieure. ♦ $\mathbb{R}$ est *archimédien* : pour tout $x > 0$ et pour tout $y \geq 0$, il existe un entier n tel que $nx \geq y$. ♦ $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication, est un corps commutatif. C'est même un corps *ordonné : la relation d'ordre est compatible avec l'addition et la multiplication par des nombres positifs. ♦ En tant que corps, $\mathbb{R}$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel (de dimension 1) réel. Cet espace vectoriel est muni d'une norme naturelle : la valeur absolue. L'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet. ♦ Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés. ♦ Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$, de même que les parties convexes et les parties connexes, sont les intervalles. ♦ On note

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &=]-\infty; +\infty[& \mathbb{R}^* &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \mathbb{R}^+ &= [0; +\infty[& \mathbb{R}^{*+} &=]0; +\infty[\\ \mathbb{R}^- &=]-\infty; 0] & \mathbb{R}^{*-} &=]-\infty; 0[.\end{aligned}$$

REMARQUE : Il a fallu attendre le XIX^e siècle et les travaux de Dedekind, Bolzano et Weierstrass pour que l'ensemble $\mathbb{R}$ soit construit de manière rigoureuse. Une manière de procéder est la suivante, et part du constat (intuitif) qu'un réel quelconque pourra être approché par une suite de rationnels ; cette suite n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$, mais possède la propriété d'être une suite de Cauchy.

Une fois construit l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, on introduit, sur l'ensemble $\mathcal{C}$ des suites de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{Q}$, la relation d'équivalence « $\sim$ » définie par : $u \sim v$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$. L'ensemble $\mathcal{C} / \sim$ des classes d'équivalence modulo cette relation est noté $\mathbb{R}$. On montre alors que l'ensemble $\mathbb{R}$ ainsi construit peut être muni d'une structure de corps, ainsi que d'une relation d'ordre pour laquelle il possède la propriété de la borne supérieure.

Droite achevée Ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ des réels, auquel on adjoint les éléments $-\infty$ et $+\infty$. ♦ On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'un ordre, en prolongeant l'ordre habituel sur $\mathbb{R}$ par les relations, valables pour tout réel x : $-\infty < x < +\infty$. ♦ Les voisinages de $+\infty$ sont les parties de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]a; +\infty[$, et les voisinages de $-\infty$ celles contenant un intervalle de la forme $]-\infty; b[$. ♦ La topologie ainsi induite sur la droite achevée permet d'unifier un certain nombre de définitions (limite finie et limite infinie, limite en un point et limite en $+\infty$, etc.).

REMARQUE : On peut prolonger de nombreuses fonctions usuelles sur $\overline{\mathbb{R}}$. Ainsi, en posant $\text{Arc tan}(-\infty) = -\pi/2$ et $\text{Arc tan}(+\infty) = \pi/2$, on définit un prolongement de la fonction Arc tan , continu sur la droite achevée.

RACINE

Racines de l'unité Si n est un entier naturel non nul, une racine n -ième de l'unité est un complexe z tel que $z^n = 1$. ♦ On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \{\omega_n^k; k = 0, \dots, n-1\} \quad \text{où} \quad \omega_n = e^{2i\pi/n}.$$

♦ Une racine de l'unité est une racine n -ième pour un certain n , c'est-à-dire un élément de $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{U}_n$.

REMARQUE : Si $n \geq 2$, les racines n -ièmes de l'unité sont de somme nulle : $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^k = 0$.

♦ Si ω est une racine n -ième de l'unité, alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \neq 1 \\ n & \text{si } \omega = 1. \end{cases}$$

Racine n -ième d'un complexe z Complexe a vérifiant $a^n = z$. ♦ Une racine particulière peut être trouvée en notant $z = r e^{i\theta}$ et en posant $a_0 = \sqrt[n]{r} e^{i\theta/n}$. ♦ Si a_0 est une racine particulière, les racines n -ièmes de z sont

$$a_0, \quad \omega a_0, \quad \omega^2 a_0, \quad \dots, \quad \omega^{n-1} a_0$$

en posant $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Racine d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ Élément $a \in \mathbb{K}$ qui annule la fonction polynôme associée à P . On dit aussi que a est un *zéro* de P .

REMARQUE : L'élément a est racine de P si et seulement si P est divisible par $(X - a)$ dans $\mathbb{K}[X]$.

✎ MULTIPLICITÉ.

Racine d'une fraction rationnelle $F \in \mathbb{K}(X)$ Si (P, Q) est un représentant irréductible de F , on appelle racine de F toute racine de P . ♦ La fonction rationnelle associée s'annule alors en a .

RADICAL

Radical d'un nombre Synonyme, légèrement désuet, de racine de ce nombre.

Équation résoluble par radicaux Équation polynomiale $P(x) = 0$, dont on peut écrire les solutions en fonction des coefficients de P , et en utilisant les opérations usuelles : addition, multiplication, division, ainsi que les fonctions « racine n -ième » (pour n quelconque).

Exemple : L'équation $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ est résoluble par radicaux ; ses racines sont $-i\sqrt{\sqrt{2}-1}$, $+i\sqrt{\sqrt{2}+1}$, $-\sqrt{1+\sqrt{2}}$ et $+\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

REMARQUE : La théorie de Galois montre qu'à partir du degré $n = 5$, il existe des équations qui ne sont pas résolubles par radicaux.

Axe radical Soient γ et Γ deux cercles du plan, d'équations développées respectives

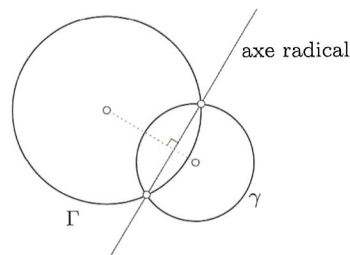
$$\begin{aligned}\gamma : & \quad x^2 + y^2 - 2cx - 2dy + e = 0 \\ \text{et} \quad \Gamma : & \quad x^2 + y^2 - 2Cx - 2Dy + E = 0.\end{aligned}$$

Notons r et R leurs rayons respectifs, ω et Ω leurs centres respectifs. Effectuons la différence entre les deux équations :

$$2(C - c)x + 2(D - d)y + (E - e) = 0.$$

On obtient l'équation d'une droite, appelée *axe radical des deux cercles γ et Γ* .

REMARQUE : Si la distance $d(\omega, \Omega)$ est comprise entre $|R - r|$ et $R + r$, alors l'intersection $\gamma \cap \Gamma$ n'est pas vide ; l'intersection des deux cercles est également l'intersection de cette droite avec l'un des cercles. Du point de vue algébrique, cela permet de passer de la résolution d'un système de deux équations de degré 2 à celle d'un système comportant une équation de degré 2 et une autre de degré 1, système alors résoluble par une simple substitution.



RANG

Rang d'une application linéaire Soient E et F deux espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Si $\text{Im } u$ est de dimension finie, on appelle rang de f la dimension de l'image de u , et on note $\text{rg } u = \dim \text{Im } u$.

Rang d'une forme bilinéaire symétrique Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. On peut lui associer un endomorphisme symétrique u . Le rang de φ est, par définition, égal au rang de u . ♦ C'est donc également le rang de la matrice représentative de φ dans une base quelconque.

☞ FORME BILINÉAIRE SYMÉTRIQUE.

Rang d'un système linéaire Nombre d'équations linéairement indépendantes de ce système. ♦ Le rang d'un système linéaire est égal au nombre de pivots qu'il possède. ♦ Il est égal au rang de l'application linéaire associée, et au rang de la matrice associée.

☞ PIVOT, SYSTÈME LINÉAIRE.

Rang d'une matrice Rang d'une application linéaire associée à cette matrice, ou encore rang du système linéaire associé. ♦ C'est donc le nombre de colonnes linéairement indépendantes de la matrice, ainsi que le nombre de lignes linéairement indépendantes.

REMARQUES : Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, le rang de A et celui de sa transposée sont égaux. ♦ Le rang est invariant par multiplication par une matrice inversible : si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, si $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ et si $Q \in \text{GL}_q(\mathbb{K})$, alors $\text{rg } A = \text{rg } PA = \text{rg } AQ$.

☞ DÉCOMPOSITION PJ_rQ .

Théorème du rang Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel quelconque, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Alors

$$\dim E = \text{rg } u + \dim \text{Ker } u.$$

♦ Si E est de dimension quelconque et si $\text{Im } u$ est de dimension finie, alors $\text{Ker } u$ est de codimension finie et $\text{codim Ker } u = \text{rg } u$.

REMARQUES : Ces propriétés découlent du fait que, si E est un espace vectoriel quelconque et u une application linéaire de E vers un espace vectoriel F , alors tout supplémentaire S de $\text{Ker } u$ dans E est isomorphe à $\text{Im } u$. Plus précisément, si $E = \text{Ker } u \oplus S$, la restriction de u à S induit un isomorphisme de S vers $\text{Im } u$. Cette dernière propriété peut être utilisée chaque fois que l'on a envie d'utiliser la formule du rang, mais que l'on en est empêché parce que E est de dimension infinie. ♦ **Attention !** Ce n'est pas parce que $\dim E = \dim \text{Im } u + \dim \text{Ker } u$ qu'il faudrait croire que E est la somme directe du noyau et de l'image de u . D'une part parce que, dans le cas général, $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ ne sont pas de sous-espaces vectoriels du même espace vectoriel. D'autre part, parce que, même dans le cas où u serait un endomorphisme de E , ça resterait généralement faux.

☞ CODIMENSION, PIVOT, SYSTÈME LINÉAIRE.

RANGÉE

Ligne ou colonne d'une matrice.

☞ DÉVELOPPEMENT PAR RAPPORT À UNE RANGÉE.

RAPPORT

Rapport d'une homothétie Une homothétie d'un espace vectoriel E est une application de la forme $u = \lambda \text{Id}$. Le scalaire (non nul) λ est appelé rapport de l'homothétie.

☞ AFFINITÉ.

RATIONNEL

Corps des rationnels ☞ $\mathbb{Q}$.

Nombre rationnel Nombre de la forme $r = p/q$, où p et q sont des entiers et q est non nul. ♦ On peut toujours choisir le couple (p, q) tel que $q > 0$ et $p \wedge q = 1$, ce qui fournit le *représentant irréductible* de r .

Fonction rationnelle Si F est une fraction rationnelle et si (P, Q) en est un représentant irréductible, notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des *pôles de F , c'est-à-dire l'ensemble des racines de Q . On définit alors la fonction rationnelle $\hat{F}$ sur $\mathbb{K} \setminus \mathcal{P}$ par $\hat{F} : x \mapsto P(x)/Q(x)$.

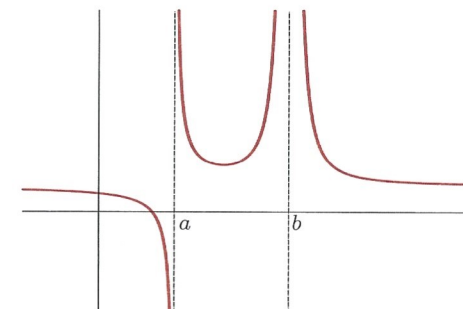


Fig. 84 — Graphe d'une fonction rationnelle. En a , un pôle d'ordre impair. En b , un pôle d'ordre pair.

Fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$ À partir de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (qui peut être $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou tout autre corps commutatif), il est possible de définir un corps, appelé *corps des fractions rationnelles sur $\mathbb{K}$* , et noté $\mathbb{K}(X)$. ♦ Les éléments de ce corps sont appelés fractions rationnelles. ♦ Toute fraction $F \in \mathbb{K}(X)$ s'écrit sous la forme $F = P/Q$, avec $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Le couple (P, Q) est appelé *représentant* de la fraction P/Q ; tout autre représentant (P_1, Q_1) de F vérifie $PQ_1 = QP_1$. ♦ Si P et Q sont premiers entre eux, (P, Q) est un *représentant irréductible* de F .

REMARQUE : Le principe de la construction de $\mathbb{K}(X)$ est le même que celui de la construction de $\mathbb{Q}$ en partant de $\mathbb{Z}$. On définit, sur l'ensemble des couples (P, Q) de polynômes tels que $Q \neq 0$, la relation d'équivalence : $(P, Q) \sim (A, B)$ si et seulement si $PB = AQ$. Les classes d'équivalence modulo cette relation d'équivalence sont appelées fractions rationnelles, et notées P/Q lorsque (P, Q) est un représentant de la classe d'équivalence. ♦ On définit sur $\mathbb{K}(X)$ une addition et une multiplication, qui en font un corps commutatif. ♦ Cette construction se généralise et permet de plonger tout anneau intègre dans son *corps des fractions*.

☞ DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES, IRRÉDUCTIBLE, PÔLE.

RAYLEIGH John William STRUTT, Lord Rayleigh (1842–1919)

(Physicien anglais)

Quotient de Rayleigh Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E . Pour tout vecteur x non nul, le quotient de Rayleigh associé à x et u est

$$R_u(x) = \frac{\langle u(x) | x \rangle}{\langle x | x \rangle}.$$

♦ Ce quotient de Rayleigh, appliqué à un vecteur propre, donne la valeur propre correspondante. ♦ En utilisant des quotients de Rayleigh, il est possible d'obtenir numériquement des approximations des vecteurs propres et des valeurs propres de u .

REMARQUE : Notons $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres ordonnées de u ; alors pour tout $x \neq 0$, $\lambda_1 \leq R_u(x) \leq \lambda_n$. ♦ De plus, $R_u(x) = \lambda_n$ si et seulement si $u(x) = \lambda_n x$, et $R_u(x) = \lambda_1$ si et seulement si $u(x) = \lambda_1 x$. Notamment,

$$\max_{x \neq 0} \text{Sp}(u) = \sup_{x \neq 0} R_u(x) \quad \text{et} \quad \min_{x \neq 0} \text{Sp}(u) = \inf_{x \neq 0} R_u(x).$$

RAYON

Rayon de convergence Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. L'ensemble des réels $r \geq 0$ tels que $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $\mathbb{C}$, est un intervalle de $\mathbb{R}^+$. Si cet intervalle est borné, le rayon de $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure de cet ensemble. Sinon, il vaut $R = +\infty$. ♦ Le rayon d'une série est caractérisé par les propriétés suivantes :

- en tout point z tel que $|z| < R$, la suite $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 et la série $\sum a_n z^n$ converge absolument ;
- en tout point z tel que $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée et la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Lorsque $|z| = R$, on ne peut rien dire de général quant à la nature de la série $\sum a_n z^n$ ou de la suite $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

☞ CERCLE DE CONVERGENCE, DISQUE OUVERT DE CONVERGENCE.

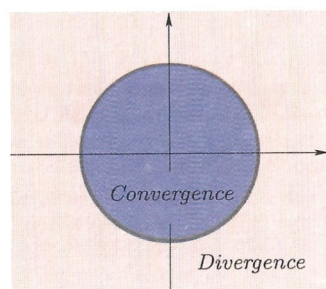


Fig. 85 — En bleu : domaine ouvert de convergence. En rose : domaine ouvert de divergence. En gris : cercle d'incertitude quant à la convergence ou la divergence.

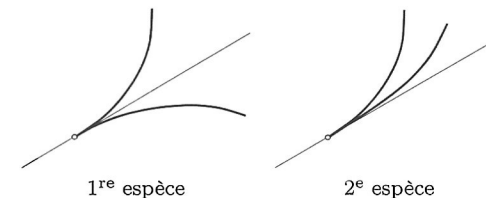
Rayon de courbure d'un arc En un point birégulier d'un arc de classe $\mathcal{C}^1$, le rayon de courbure est l'inverse de sa courbure : $R(s) = 1/c(s)$. ☞ CERCLE OSCULATEUR, FRENET.

Rayon spectral d'une matrice carrée A Réel positif $\rho(A)$ égal au maximum des modules des valeurs propres complexes de A : $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$.

☞ RAYLEIGH.

REBROUSSEMENT

Point de rebroussement de 1^{re}/2^e espèce Soit t_0 un point singulier d'un arc paramétré γ . Notons, s'ils existent, p et q le premier et le second entiers caractéristiques de γ en t_0 . Si p est pair, on dit que la courbe admet en t_0 un point de rebroussement. Ce point est dit de première espèce si q est impair, et de deuxième espèce si q est pair.



RÉCIPROQUE

Réciproque d'une application Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction bijective. Sa réciproque est l'unique fonction g de B dans A vérifiant $f \circ g = \text{Id}_B$ et $g \circ f = \text{Id}_A$. ♦ Dans le cas d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui n'est pas bijective, il peut être commode de restreindre cette fonction à un intervalle I sur lequel elle est injective. Dans le cas, l'application induite $\hat{f} : I \rightarrow f(I)$ définie par $\hat{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$ est bijective. Cela permet de définir une réciproque $\hat{f}^{-1}$ à cette fonction. Sur ce modèle, sont construits les fonctions circulaires réciproques et les fonctions hyperboliques réciproques.

f	I	$f(I)$	$\hat{f}^{-1}$
sin	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	$[-1; +1]$	Arc sin
cos	$[0; \pi]$	$[-1; +1]$	Arc cos
tan	$]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$	$\mathbb{R}$	Arc tan
sh	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Arg sh
ch	$[0; +\infty[$	$[1; +\infty[$	Arg ch
th	$\mathbb{R}$	$] -1; +1[$	Arg th

TABLE 9 — Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.

Réciproque d'une implication Si P et Q sont des propositions, on appelle réciproque de l'implication « $P \Rightarrow Q$ » l'implication « $Q \Rightarrow P$ ». ♦ Ces deux implications ne sont pas logiquement liées. ♦ On ne confondra pas avec la forme *contraposée.

RECOUVREMENT

Une famille $(U_i)_{i \in I}$ de parties d'un ensemble E est un recouvrement d'une partie A si et seulement si A est inclus dans l'union $\bigcup_{i \in I} U_i$. ♦ Un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ est appelée *recouvrement ouvert* si les U_i sont tous des ouverts. ♦ Les partitions sont des exemples de recouvrements.

☞ THÉORÈME DE *BOREL-LEBESGUE, COMPACT, PARTITION.

RECTIFIABLE

☞ LONGUEUR.

RÉCURRENCE

Principe de récurrence Si A est une partie de $\mathbb{N}$ telle que $0 \in A$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition « $n \in A$ » implique la proposition « $(n+1) \in A$ », alors $A = \mathbb{N}$. ♦ Cette propriété est parfois appelé *principe de récurrence faible*. ♦ Elle est équivalente au *principe de récurrence forte* : si A est une partie de $\mathbb{N}$ telle que $0 \in A$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition « $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\} \quad k \in A$ » implique la proposition « $(n+1) \in A$ », alors $A = \mathbb{N}$.

Raisonnement par récurrence Il consiste à appliquer le principe de récurrence pour démontrer une suite $(\mathcal{H}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ de propositions.

- *initialisation* : on commence par prouver la proposition $\mathcal{H}(0)$.
 - *hérédité* : on choisit un entier n quelconque et on suppose $\mathcal{H}(n)$ vérifiée ; on prouve alors que $\mathcal{H}(n+1)$ est vérifiée.
 - *conclusion* : le principe de récurrence permet d'affirmer que $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ♦ On peut également effectuer une démonstration par récurrence forte :
- On commence par prouver la proposition $\mathcal{H}(0)$;
 - On choisit un entier n quelconque et on suppose $\mathcal{H}(0), \mathcal{H}(1), \dots, \mathcal{H}(n)$ vérifiées ; on prouve alors que $\mathcal{H}(n+1)$ est vérifiée.
 - On conclut, par le principe de récurrence, que $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

REMARQUES : Alors, que choisir pour effectuer une récurrence ? La faible ou la forte ? En cas de doute, la forte semble un bon choix. En effet, au moment de prouver $\mathcal{H}(n+1)$, il est possible que l'on ait besoin non seulement de $\mathcal{H}(n)$, mais éventuellement de l'une ou de toutes les propositions de rang inférieur à n . De plus, la rédaction « forte » ne coûte pas beaucoup plus cher.

RÉDUCTION

Réduire une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice plus « simple » que A : matrice diagonale (☞ DIAGONALISATION), matrice triangulaire supérieure (☞ TRIGONALISABLE), matrice par blocs de Jordan (☞ JORDAN), matrices par bloc compagnon (☞ COMPAGNON). ♦ Réduire un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, c'est trouver une base dans laquelle sa matrice représentative a une des formes précédentes.

RÉDUITE

Équation réduite d'une conique ou d'une quadrique Équation obtenue en effectuant une rotation (permettant d'éliminer les termes quadratiques croisés xy , yz ou xz , c'est-à-dire diagonaliser la partie quadratique) et une translation (afin d'éliminer les termes linéaires en x , y et z si du moins les termes quadratiques correspondants ne sont pas nuls).

Exemple : L'équation réduite d'une ellipse est de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. ♦ Celle d'une parabole est $x^2 + 2py = 0$; le terme linéaire en y ne peut être éliminé par translation car la partie quadratique en y^2 est associé à une valeur propre nulle.

Variable aléatoire réduite Variable aléatoire de variance égale à 1. ♦ Si X est une variable aléatoire admettant une variance, alors $X/\sigma(X)$ est une variable réduite.

♦ Notamment, la variable aléatoire

$$X^* = \frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est à la fois *centrée et réduite.

☞ THÉORÈME *CENTRAL-LIMITE.

RÉFLEXION

Réflexion vectorielle Dans un espace vectoriel euclidien E , une réflexion est une symétrie par rapport à un hyperplan H de E , parallèlement à son supplémentaire orthogonal $D = H^\perp$ (D est une droite vectorielle). ♦ Une réflexion est donc une symétrie orthogonale.

REMARQUE : La matrice représentative d'une réflexion dans une base *adaptée à $E = H \oplus D$ est la matrice diagonale $M = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1)$. Notamment, le déterminant d'une réflexion est toujours égal à -1 .

Réflexion affine Application affine dont la partie vectorielle est une réflexion. ♦ C'est donc une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan affine.

REMARQUE : Si A et B sont deux points distincts de E , il existe une réflexion affine et une seule échangeant A et B .

RÉFLEXIVE

Relation *binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E telle que, pour tout $x \in E$, on ait $x\mathcal{R}x$.

☞ CLASSE D'ÉQUIVALENCE, RELATION, ORDRE.

RÈGLE

Règle de d'Alembert ☞ D'ALEMBERT.

RÉGLÉE

Surface réglée Surface qui est réunion d'une famille de droites (dépendant d'un paramètre continu). ♦ Chaque droite est appelée *génératrice* de la surface.

Exemple : Un hyperboloïde à une nappe, un cylindre, un cône, un parabololoïde hyperbolique, sont des surfaces réglées.

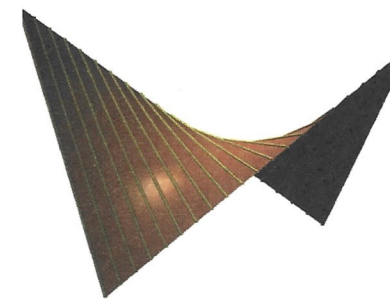


Fig. 86 — Une surface réglée : le parabololoïde hyperbolique. Une famille de génératrices est représentée (en jaune). Voir également les *hyperboloïdes à une nappe.

RÉGRESSION LINÉAIRE

Droite de régression linéaire Supposons que l'on observe un couple (x, y) de caractères, au cours de n observations. On obtient une série de mesures $\{(x_i, y_i) ; 1 \leq i \leq n\}$. On souhaite établir un lien affine approché : $y \approx ax + b$, en déterminant a et b pour que

cette loi approchée soit optimale. La méthode des *moindres carrés de Gauss consiste à noter $\varepsilon_i = y_i - ax_i - b$ et à minimiser l'erreur quadratique $\sum_i \varepsilon_i^2$. L'unique solution à ce problème est la droite de régression linéaire en y , d'équation

$$y - \bar{y} = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$$

en notant

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

et

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad \sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

REMARQUE : L'erreur moyenne commise $\frac{1}{n} \sum \varepsilon_i^2$ vaut $(1 - \rho^2) \sigma_y^2$; elle est d'autant plus faible que ρ est proche de ± 1 . ♦ Lorsque ρ est proche de ± 1 , on dit qu'il existe une forte corrélation linéaire entre x et y , le signe de ρ indiquant si x et y évoluent dans le même sens ($\rho > 0$) ou en sens contraire ($\rho < 0$). ✎ CORRÉLATION. ♦ La formule se mémorise facilement en remarquant que la droite passe par le point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$, que le coefficient de corrélation linéaire est adimensionnel et est presque le coefficient directeur mais que, pour l'homogénéité, le rapport σ_y/σ_x est le bienvenu.

RÉGULARISÉE

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux; sa régularisée est l'application $\tilde{f}$ définie par

$$\tilde{f}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-)),$$

où l'on a noté

$$f(t^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(t+h) \quad \text{et} \quad f(t^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(t-h).$$

Si f est continue, alors elle est égale à sa régularisée : $\tilde{f} = f$.

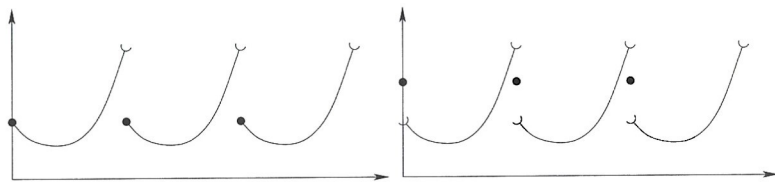


Fig. 87 — Une fonction continue par morceaux (à gauche) et sa régularisée (à droite).

✎ DIRICHLET.

RÉGULIER

Arc régulier Arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ dont tous les points sont réguliers, c'est-à-dire dont la dérivée ne s'annule jamais.

Élément régulier Soit $(A, *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne. Un élément a de A est dit régulier, ou encore *simplifiable* si, pour tous éléments $b, c \in A$, on a

$$a * b = a * c \implies b = c \quad \text{et} \quad b * a = c * a \implies b = c.$$

REMARQUE : S'il ne vérifie que la première propriété, il est dit *simplifiable à gauche*; s'il ne vérifie que la seconde, il est dit *simplifiable à droite*.

Nappe régulière Nappe paramétrée dont tous les points sont réguliers.

Point régulier d'un arc γ de classe $\mathcal{C}^1$ Point $M(t)$ en lequel la dérivée $\gamma'(t)$ ne s'annule pas. ♦ En un tel point, l'arc admet une tangente, dirigée par $\gamma'(t)$.

Point régulier d'une courbe Sur une courbe $\Gamma : F(x, y) = 0$, point en lequel la dérivée $\text{grad } F$ ne s'annule pas. ♦ En un tel point, l'arc admet une tangente, et le gradient dirige la normale. La tangente en un point régulier M_0 a donc pour équation $\langle \text{grad } F(M_0) | M_0 M \rangle = 0$.

Point régulier d'une nappe paramétrée Point d'une nappe $(u, v) \mapsto f(u, v)$ de classe $\mathcal{C}^1$ en lequel la famille de vecteurs $\left\{ \frac{\partial f}{\partial u}(M), \frac{\partial f}{\partial v}(M) \right\}$ est libre. ♦ En un

tel point, la surface admet un plan tangent, de direction $\text{Vect} \left(\frac{\partial f}{\partial u}(M), \frac{\partial f}{\partial v}(M) \right)$.

♦ La normale au plan tangent est portée par le vecteur $\frac{\partial f}{\partial u}(M) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(M)$.

Point régulier d'une surface cartésienne Point M d'une surface $F(x, y, z) = 0$ tel que $\text{grad } F(M) \neq 0$. ♦ En un tel point, la surface admet un plan tangent, dont un vecteur normal est le gradient de F .

Surface régulière Surface paramétrée dont tous les points sont réguliers.

RELATIF

Maximum/minimum relatif Synonyme de maximum ou minimum local.

✎ MAXIMUM, MINIMUM.

Fermé relatif / Ouvert relatif ✎ TOPOLOGIE RELATIVE.

RELATION

Relation binaire ✎ BINAIRE.

Relations coefficients-racines Soit $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ un polynôme complexe, avec $a_n \neq 0$. Notons $(x_1, \dots, x_n)$ ses racines, et $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ les valeurs de ses fonctions symétriques élémentaires évaluées en $(x_1, \dots, x_n)$. (Le choix de l'ordre des racines n'a aucune importance dans ces évaluations.) Alors

$$\forall k \in [1; n] \quad \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

✎ FONCTIONS *SYMÉTRIQUES.

Relation d'équivalence ✎ ÉQUIVALENCE.

Relation d'ordre ✎ ORDRE.

RELATIVE (TOPOLOGIE)

☞ TOPOLOGIE RELATIVE.

RELÈVEMENT

Si $f : I \rightarrow \mathbb{U}$ est une application de classe $\mathcal{C}^k$, un relèvement est une application $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^k$, telle que

$$\forall t \in I \quad f(t) = e^{i\varphi(t)}.$$

♦ Si φ et ψ sont deux relèvements, alors ils diffèrent d'un multiple de 2π .

Théorème du relèvement Si $f : I \rightarrow \mathbb{U}$ est une application de classe $\mathcal{C}^k$, alors il existe des relèvements de classe $\mathcal{C}^k$.

RÉPARTITION

Fonction de répartition Soit X une variable aléatoire. Sa fonction de répartition est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = \mathbf{P}[X \leq x].$$

REMARQUE : La fonction de répartition caractérise la loi, c'est-à-dire qu'elle suffit pour déterminer entièrement les probabilités du type $\mathbf{P}[X \in A]$, lorsque A un événement de $\mathbb{R}$ (par exemple un intervalle ou une réunion d'intervalles et, de manière plus générale, un borélien). ♦ Cette fonction est croissante et continue à droite : $F(x+0) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle n'est pas forcément continue à gauche : $F(x) - F(x-0) = \mathbf{P}[X = x]$. ♦ Elle tend vers 0 en $-\infty$, et vers 1 en $+\infty$. ♦ Si X est une variable aléatoire admettant une densité f , alors $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

REPRÉSENTATION

Théorème de représentation d'une forme linéaire Soit E un espace vectoriel euclidien. Pour toute forme linéaire φ sur E , il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que

$$\varphi(x) = \langle a | x \rangle \quad \forall x \in E.$$

♦ L'application qui à un vecteur a associe la forme linéaire $\varphi_a : x \mapsto \langle a | x \rangle$ est un isomorphisme entre l'espace E et son dual E^* .

REMARQUES : Du point de vue matriciel, la correspondance entre φ et a est particulièrement simple, puisqu'il ne s'agit que d'une transposition. Plus précisément, si l'on munit E d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, la matrice représentative de φ dans E est une matrice ligne : $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (a_1 \quad \dots \quad a_n)$. On note alors a le vecteur dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $a_1, \dots, a_n$:

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (a_1 \quad \dots \quad a_n) \quad \text{et} \quad \text{mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

alors, pour tout vecteur x de E , on a bien

$$\varphi(x) = (a_1 \quad \dots \quad a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \langle a | x \rangle \quad \text{avec} \quad \text{mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

♦ Si E n'est pas de dimension finie, ce résultat n'est plus valable ; ainsi, dans l'espace $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f | g \rangle = \int_0^1 fg$, la forme $\varphi : f \mapsto f(0)$ n'est pas représentable sous forme d'un produit scalaire. ♦ Le théorème de Riesz ci-après donne des conditions suffisantes sur E et φ pour représenter φ par un produit scalaire.

Théorème de représentation de Riesz Soit H un espace préhilbertien complet (espace de Hilbert) et soit $\varphi : H \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe un vecteur $a \in H$ tel que $\varphi(x) = \langle a | x \rangle$ pour tout $x \in H$.

RÉPULSIF

Point fixe répulsif ☞ ATTRACTIF.

RESTE

Reste d'une série Soit $\sum u_n$ une série convergente. Notons $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles et $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ sa somme. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n , noté R_n , par

$$S = S_n + R_n, \quad (*)$$

c'est-à-dire que

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k,$$

(cette dernière quantité étant nécessairement convergente). ♦ La relation $(*)$ montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

☞ CONVERGENCE (D'UNE SÉRIE), SOMME.

Reste intégral ☞ TAYLOR.

RESTRICTION

Restriction au départ Soient A et B des ensembles, et soit f une application de A vers B . Si A' est une partie de A , la restriction de f à A' est l'application $\hat{f} : A' \rightarrow B$ définie par $\hat{f}(a) = f(a)$ pour tout $a \in A'$. ♦ On la note parfois $f|_{A'}$.

Exemple : La restriction de la fonction $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au segment $[0; \pi]$ est injective.

☞ INDUIT.

Restriction à l'arrivée Soient A et B des ensembles, et soit f une application de A vers B . Si B' est une partie de B qui contient $f(A)$, alors on peut restreindre f à l'arrivée, en définissant la *corestriction* de f à B' , qui est l'application $\tilde{f} : A \rightarrow B'$ définie par $\tilde{f}(a) = f(a)$ pour tout $a \in A$. ♦ On la note parfois $f|^{B'}$.

Exemple : Soient E et F des espaces vectoriels, W un sous-espace vectoriel de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que $\text{Im } u \subset W$. Alors, la restriction à l'arrivée de u à W est l'application

$$u|_W : E \longrightarrow W \\ x \longmapsto u|_W(x) = u(x).$$

REMARQUE : En fait, on n'a pas fait grand-chose à part changer la dénomination de l'ensemble d'arrivée. Au contraire, une restriction au départ est une véritable opération. Cependant, la restriction à l'arrivée doit, autant que possible, être correctement écrite. Elle permet, en choisissant $B = f(A)$, de rendre, sans effort, une application surjective. ☞ INDUIT.

Corestriction Synonyme de restriction à l'arrivée.

☞ ENDOMORPHISME INDUIT, APPLICATION *INDUITE.

RÉVOLUTION

Surface de révolution Surface engendrée par une courbe (appelée *directrice* ou *génératrice*), tournant autour d'une droite fixe, appelée *axe de révolution*.

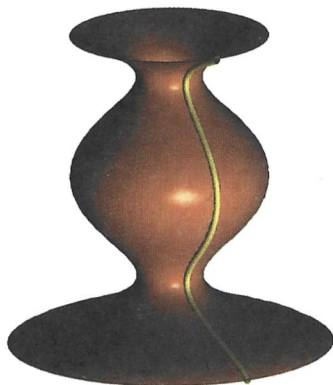


Fig. 88 — Une surface de révolution, avec, en jaune, une courbe directrice.

Exemples : Un ellipsoïde de révolution est un ellipsoïde ayant deux axes de même longueur. ♦ Un cylindre de révolution est un cylindre dont une directrice est une droite parallèle à l'axe. ♦ Un hyperboloïde de révolution à une nappe est une surface de révolution définie par une directrice qui est une droite ni parallèle, ni sécante à l'axe. ♦ Dans un cône de révolution, une directrice est une droite sécante à l'axe.

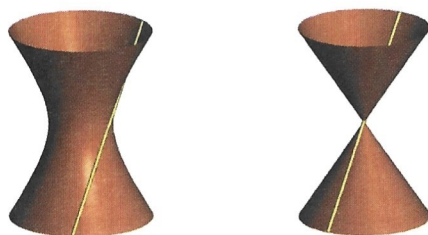


Fig. 89 — Un hyperboloïde de révolution à une nappe et un cône de révolution; une directrice est tracée sur chacun.

RIEMANN Georg Friedrich Bernhard (1826–1866)
(Mathématicien allemand)

Fonction ζ de Riemann ↔ ZÉTA.

Formule de Green-Riemann ↔ GREEN.

Hypothèse de Riemann ↔ ZÉTA.

Lemme de Riemann-Lebesgue Soit $[a; b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos nt \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin nt \, dt = 0.$$

REMARQUES : On peut changer le paramètre discret n en un paramètre continu λ et obtenir le même résultat. ♦ Ce lemme est assez simple à démontrer dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ (ou $\mathcal{C}^1$ par morceaux). ♦ On peut l'étendre au cas des fonctions continues (ou continues par morceaux) par des arguments de densité. ↔ DENSITÉ, WEIERSTRASS. ♦ Elle peut être vue comme une conséquence du théorème de Parseval en théorie de Fourier.

Série de Riemann Série numérique de la forme $\sum 1/n^\alpha$, où α est un réel. ♦ Cette série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

↔ ZETA (FONCTION DE RIEMANN).

Sommes de Riemann Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On se donne une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a; b]$. La somme de Riemann associée à f et σ est

$$S(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(a_k).$$

♦ Si f est continue par morceaux, et si l'on se donne une suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subdivisions dont le pas tend vers 0, alors la suite des sommes de Riemann associée converge vers $\int_a^b f$. C'est d'ailleurs un moyen de définir une telle intégrale.

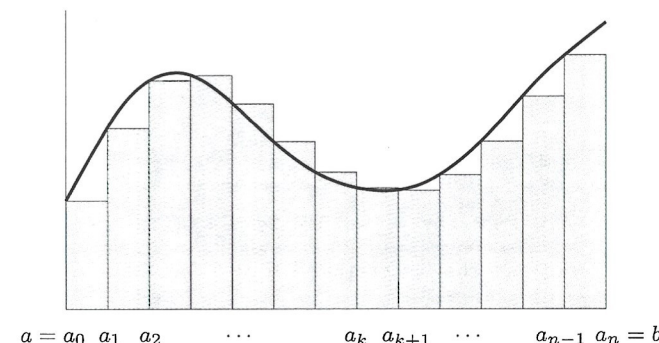


Fig. 90 — Découpage « horizontal » permettant de calculer une approximation, sous forme de somme de Riemann, de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. On comparera utilement avec le découpage opéré par Lebesgue, figure 50 page 162.

RIESZ Frigyes, dit Frédéric (1880–1956)
(Mathématicien hongrois)

Théorème de représentation de Riesz ↔ REPRÉSENTATION.

RISQUE QUADRATIQUE

Écart quadratique moyen entre un estimateur T_n et le paramètre θ qu'il estime : $r(T_n) = \mathbf{E}((T_n - \theta)^2)$. ♦ Il est égal à la somme du carré du biais de T_n et de sa variance :

$$r(T_n) = [\mathbf{E}(T_n) - \theta]^2 + \mathbf{V}(T_n).$$

ROLLE Michel (1652–1719)
(Mathématicien français)

Théorème de Rolle Soient a et b des réels tels que $a < b$. Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, et vérifiant $f(a) = f(b)$. Alors, il existe un réel $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

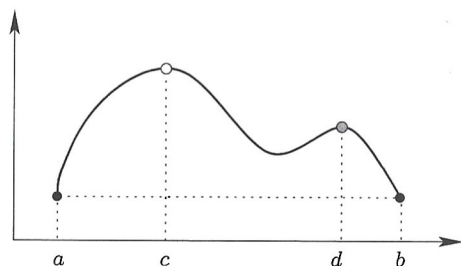


Fig. 91 — Le théorème de Rolle garantit l'existence d'un point c d'annulation de la dérivée, mais pas son unicité; ici, $f'(d)$ s'annule également.

ACCROISSEMENTS FINIS.

ROTATION

Matrice de rotation d'ordre 2 Matrice de la forme $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

REMARQUE : Une telle matrice est orthogonale et de déterminant +1. ♦ Les matrices de rotation vérifient les relations $R(\theta) \cdot R(\varphi) = R(\theta + \varphi)$ et $R'(\theta) = R(\theta + \pi/2)$.

Rotation vectorielle Soit E un espace vectoriel euclidien. Une rotation de E est un automorphisme orthogonal de déterminant +1. On note $SO(E)$ l'ensemble des rotations, appelé *groupe spécial orthogonal*, ou *groupe des rotations*.

Rotation vectorielle du plan Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2. Une rotation (vectorielle) est un automorphisme orthogonal direct f de E . ♦ Il existe alors un réel θ tel que, dans toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E , la matrice représentative de f soit la matrice de rotation $R(\theta)$.

MATRICE DE ROTATION.

Rotation vectorielle de l'espace Soit E un espace euclidien de dimension 3. Une rotation (vectorielle) est un automorphisme orthogonal direct ρ de E . ♦ Il existe alors un réel θ et une base orthonormée $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de E tels que la matrice représentative de ρ soit la matrice

$$R_3(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

REMARQUES : Si ρ n'est pas l'identité, on n'a que deux choix possibles pour choisir le vecteur u : ce sont les deux vecteurs unitaires de l'axe de la rotation, qui est la droite invariante $D = \text{Ker}(\rho - \text{Id})$. ♦ L'angle (non orienté) d'une rotation de l'espace peut être déterminé par la relation $\text{tr } \rho = 1 + 2 \cos \theta$.

Rotation affine du plan Une rotation affine est un déplacement du plan admettant un unique point fixe, ou bien l'identité. ♦ Si Ω est un point du plan, et si θ est un réel, la rotation affine de centre Ω et d'angle θ est l'application affine r définie par $\Omega r(M) = \rho(\Omega M)$, où ρ est la rotation vectorielle d'angle θ .

Rotation affine de l'espace Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3. Une rotation affine est un déplacement f admettant au moins un point invariant. ♦ Dans ce cas, soit f est l'identité, soit l'ensemble des invariants de f est une droite, dont la direction est l'axe de rotation de l'endomorphisme φ associé à f .

DEMI-TOUR.

ROTATIONNEL

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$. Notons $f = (f_x, f_y, f_z)$ ses composantes. Son rotationnel est la quantité vectorielle

$$\text{rot } f = \nabla \wedge f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

REMARQUES : C'est une quantité intrinsèque : un observateur la calculant dans une autre base orthonormée directe, qui se déduit donc de la base canonique $\mathcal{B}$ par une simple rotation, trouvera le même vecteur. ♦ Il mesure le défaut de symétrie de la jacobienne. La première composante, par exemple, mesure l'écart entre les coefficients en vert dans la jacobienne :

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_z}{\partial y} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

♦ Si l'on note $\omega = f_x dx + f_y dy + f_z dz$, la condition $\text{rot } f = 0$ est équivalente à : ω est fermée. Si U est un ouvert étoilé, cette condition équivaut encore, par le théorème de Poincaré, à : ω est exacte, c'est-à-dire qu'il existe $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\omega = dF$. Cette dernière équation se réécrit également $f = \text{grad } F$. ♦ Au total, les points de vue suivants sont équivalents sur un ouvert étoilé :

- $\text{rot } f = 0$;
- ω est fermée;
- ω est exacte;
- la jacobienne J_f de f est symétrique;
- il existe $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $f = \text{grad } F$;
- si A et B sont deux points de U , et si γ est un chemin d'origine A et d'extrémité B alors l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega = \int_\gamma f \cdot d\ell$ ne dépend que de A et de B et pas du choix de γ .

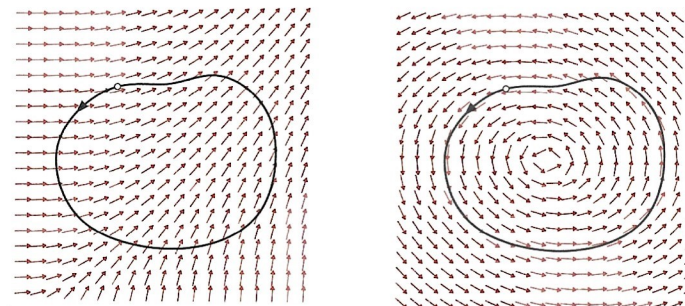


Fig. 92 — Allure d'un champ de rotationnel nul (à gauche) et d'un champ de rotationnel non nul (à droite), dans un espace de dimension 2. Sur un chemin fermé, la circulation du champ est nulle dans le premier cas, mais pas forcément dans le second.

ALEMBERT, DIVERGENCE, GRADIENT, LAPLACIEN, NABLA.

RUNGE Carl (1856–1927)
(Mathématicien et physicien allemand)

Phénomène de Runge Soient $[a; b]$ un segment et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique. Interpolons f par un polynôme P_n de degré $\leq n$, en $n+1$ points uniformément répartis sur $[a; b]$; le polynôme P_n peut mener à une très mauvaise approximation de f . Dans certains cas, cette approximation peut empirer lorsque n augmente, voire même vérifier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - P_n\|_{\infty} = +\infty.$$

Pour éviter ce phénomène désagréable, il convient de remplacer le choix d'une subdivision uniforme par celui d'abscisses mieux réparties, comme les abscisses de Tchebychev.

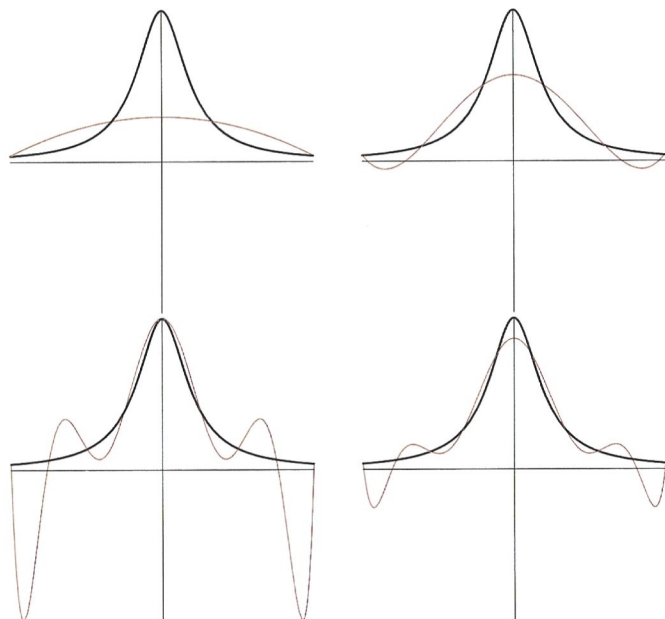


Fig. 93 — Le phénomène de Runge pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[-5; +5]$. Les polynômes de Lagrange d'ordre 3, 5, 8 et 9 sont représentés.

RUSSEL Bertrand (1872–1970)
(Logicien, philosophe et pacifiste britannique)
☞ PARADOXE.

S

SCALAIRE

Scalaire en algèbre linéaire Éléments du corps de base $\mathbb{K}$, en opposition aux vecteurs, éléments de E .

Éléments scalaires d'une algèbre A Multiples, par un élément de $\mathbb{K}$, du neutre 1_A de la multiplication. ♦ Ces éléments commutent avec tous les autres (ils sont dits *centraux*). ☞ CENTRE.

Fonction scalaire Fonction à valeurs scalaires, par opposition aux fonctions à valeurs vectorielles.

Matrices scalaires Matrice multiple de l'identité.

Produit scalaire ☞ PRODUIT.

SCHMIDT Erhard (1876–1959)
(Mathématicien allemand)

Méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt ☞ GRAM.

SCHWARZ Hermann (1843–1921)
(Mathématicien allemand)

Inégalité de Cauchy-Schwarz ☞ CAUCHY-SCHWARZ.

Théorème de Schwarz Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Alors les dérivées partielles secondes croisées de f sont égales :

$$\forall a \in \Omega \quad \forall i, j \in [1; n] \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

☞ POINCARÉ.

SCINDÉ

Endomorphisme scindé Endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie dont le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

REMARQUE : Un endomorphisme est scindé si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

☞ TRIGONALISABLE.

Polynôme scindé Un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ est dit scindé s'il peut se factoriser en produit de polynômes de degré 1, c'est-à-dire s'il peut se décomposer sous la forme $P = \lambda \prod_{i=1}^d (X - a_i)^{m_i}$, où les a_i sont éléments distincts de $\mathbb{K}$ et les m_i des entiers.

REMARQUE : Dans $\mathbb{C}[X]$, tous les polynômes sont scindés ($\mathbb{C}$ est dit algébriquement *clos).

☞ MULTIPLICITÉ.

Polynôme simplement scindé Polynôme scindé dont toutes les racines sont de multiplicité 1. Un tel polynôme se décompose sous la forme $P = \lambda \prod_{i=1}^d (X - a_i)$ où d est le degré de P , λ un scalaire non nul et $a_1, \dots, a_d$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$.

SEGMENT

Soient E un espace vectoriel et a, b deux vecteurs de E . Le segment $[a; b]$ est l'ensemble des barycentres à masses positives de a et b , ce que l'on peut écrire sous la forme

$$[a; b] = \{(1-t)a + tb; t \in [0; 1]\}.$$