

RUNGE Carl (1856–1927)
(Mathématicien et physicien allemand)

Phénomène de Runge Soient $[a; b]$ un segment et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique. Interpolons f par un polynôme P_n de degré $\leq n$, en $n+1$ points uniformément répartis sur $[a; b]$; le polynôme P_n peut mener à une très mauvaise approximation de f . Dans certains cas, cette approximation peut empirer lorsque n augmente, voire même vérifier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - P_n\|_{\infty} = +\infty.$$

Pour éviter ce phénomène désagréable, il convient de remplacer le choix d'une subdivision uniforme par celui d'abscisses mieux réparties, comme les abscisses de Tchebychev.

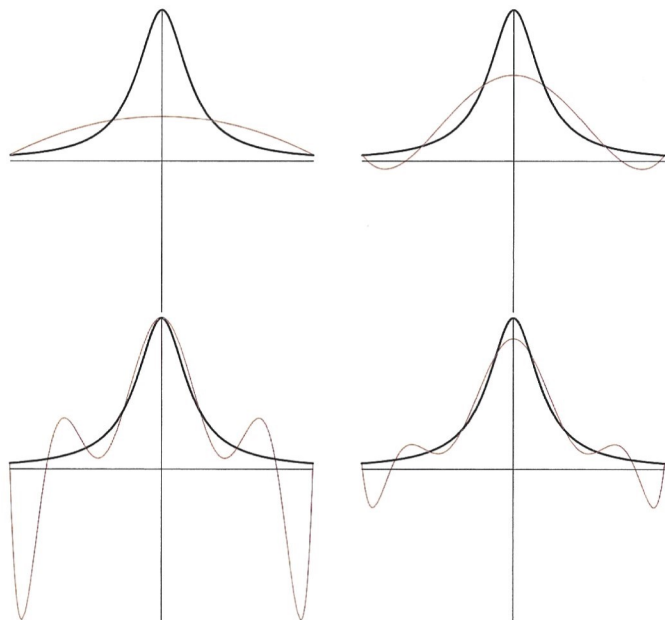


Fig. 93 — Le phénomène de Runge pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[-5; +5]$. Les polynômes de Lagrange d'ordre 3, 5, 8 et 9 sont représentés.

RUSSEL Bertrand (1872–1970)
(Logicien, philosophe et pacifiste britannique)
☞ PARADOXE.

S

SCALAIRE

Scalars en algèbre linéaire Éléments du corps de base $\mathbb{K}$, en opposition aux vecteurs, éléments de E .

Éléments scalaires d'une algèbre A Multiples, par un élément de $\mathbb{K}$, du neutre 1_A de la multiplication. ♦ Ces éléments commutent avec tous les autres (ils sont dits *centraux*). ☞ CENTRE.

Fonction scalaire Fonction à valeurs scalaires, par opposition aux fonctions à valeurs vectorielles.

Matrices scalaires Matrice multiple de l'identité.

Produit scalaire ☞ PRODUIT.

SCHMIDT Erhard (1876–1959)
(Mathématicien allemand)

Méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt ☞ GRAM.

SCHWARZ Hermann (1843–1921)
(Mathématicien allemand)

Inégalité de Cauchy-Schwarz ☞ CAUCHY-SCHWARZ.

Théorème de Schwarz Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Alors les dérivées partielles secondes croisées de f sont égales :

$$\forall a \in \Omega \quad \forall i, j \in [1; n] \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

☞ POINCARÉ.

SCINDÉ

Endomorphisme scindé Endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie dont le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.

REMARQUE : Un endomorphisme est scindé si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

☞ TRIGONALISABLE.

Polynôme scindé Un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ est dit scindé s'il peut se factoriser en produit de polynômes de degré 1, c'est-à-dire s'il peut se décomposer sous la forme $P = \lambda \prod_{i=1}^{\ell} (X - a_i)^{m_i}$, où les a_i sont éléments distincts de $\mathbb{K}$ et les m_i des entiers.

REMARQUE : Dans $\mathbb{C}[X]$, tous les polynômes sont scindés ($\mathbb{C}$ est dit algébriquement *clos).

☞ MULTIPLICITÉ.

Polynôme simplement scindé Polynôme scindé dont toutes les racines sont de multiplicité 1. Un tel polynôme se décompose sous la forme $P = \lambda \prod_{i=1}^d (X - a_i)$ où d est le degré de P , λ un scalaire non nul et $a_1, \dots, a_d$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$.

SEGMENT

Soient E un espace vectoriel et a, b deux vecteurs de E . Le segment $[a; b]$ est l'ensemble des barycentres à masses positives de a et b , ce que l'on peut écrire sous la forme

$$[a; b] = \{(1-t)a + tb; t \in [0; 1]\}.$$

REMARQUE : Les segments d'un espace vectoriel sont utiles pour pouvoir utiliser des théorèmes vrais sur des segments de $\mathbb{R}$. Ainsi, si E est un espace vectoriel normé, si f est une fonction continue sur E et à valeurs réelles, et si a et b sont deux points de E tels que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$, alors il existe un point $c \in E$ tel que $f(c) = 0$. Pour montrer cela, il suffit d'étudier la fonction $\varphi : t \mapsto f((1-t)a + tb)$ et d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

☞ CONVEXE, ÉTOILÉ.

SEMBLABLE

Matrices semblables Deux matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$. ♦ Du point de vue géométrique, cela signifie que A et B représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes : il existe un endomorphisme u d'un espace vectoriel E et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ telles que $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = \text{mat}_{\mathcal{C}}(u)$.

REMARQUE : Une matrice M est diagonalisable si, et seulement si, il existe une matrice diagonale D telle que M et D soient semblables. ♦ Elle est trigonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

SEMI-CONVERGENTE

Série semi-convergente Série convergente mais non absolument convergente.

Exemple : La série harmonique alternée $\sum (-1)^n/n$ est semi-convergente : elle converge en vertu du critère des séries alternées (sa somme vaut $-\ln 2$) mais $\sum 1/n$ diverge.

REMARQUE : On peut montrer — mais c'est un peu délicat — que, lorsqu'une série est semi-convergente, un changement d'ordre de ses termes peut changer la valeur de sa somme, voire la rendre divergente. Plus étonnant, si l'on se choisit un réel x , alors il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que la série $\sum a_{\varphi(n)}$ converge et a pour somme x .

Intégrale semi-convergente Si I est un intervalle semi-ouvert, par exemple $I = [a; b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction continue par morceaux, on dit que l'intégrale $\int_I f$ est semi-convergente lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ admet une limite en b mais que la fonction f n'est pas intégrable. On dit aussi que l'intégrale impropre $\int_I f$ converge.

Exemple : L'intégrale $\int_0^{+\infty} (\sin t)/t dt$ est semi-convergente. Sa valeur, au sens de limite de $\int_0^x (\sin t)/t dt$ lorsque x tend vers $+\infty$, est

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

SEMI-LINÉAIRE

Application semi-linéaire Application $f : E \rightarrow F$ entre deux espaces vectoriels complexes, vérifiant, pour tout vecteur $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C} : f(\lambda x + y) = \bar{\lambda} f(x) + f(y)$.

♦ Synonyme : *antilinéaire*.

☞ SESQUILINÉAIRE, PRODUIT SCALAIRE HERMITIEN.

SEMI-NORME

Soit E un espace vectoriel. Une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une semi-norme si elle vérifie les axiomes d'homogénéité et d'inégalité triangulaire : pour tous $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K} :$

$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \quad \text{et} \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

Il ne lui manque plus que l'axiome de séparation pour pouvoir prétendre au statut de norme. ☞ NORME.

Exemple : Sur l'espace $E = \mathcal{C}_m([0; 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues par morceaux sur $[0; 1]$, l'application N définie par $N(f) = \int_0^1 |f|$ est une semi-norme.

SÉPARABLE

Équation différentielle à variables séparables Équation différentielle pouvant se récrire sous la forme $\varphi(x) x' = h(t)$. ♦ On peut caractériser implicitement les solutions $t \mapsto x(t)$ d'une telle équation, vérifiant $x(t_0) = x_0$, par l'équation

$$\int_{x_0}^{x(t)} \varphi(\xi) d\xi = \int_{t_0}^t h(s) ds.$$

REMARQUE : L'équation précédente est parfois écrite, de manière abusive mais commode, sous la forme

$$\int \varphi(x) dx = \int h(t) dt + C^{\text{te}}.$$

♦ La fonction $F : (x, t) \mapsto \int_x^t \varphi - \int_0^t h$ est une *intégrale première* de l'équation différentielle, c'est-à-dire une quantité conservée le long d'une solution de l'équation.

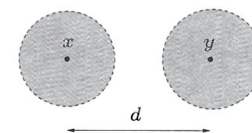
SÉPARATION (AXIOME DE)

☞ NORME.

SÉPARÉ

Espace séparé Espace topologique E vérifiant l'axiome de séparation : pour tous points x, y de E , il existe un voisinage $\mathcal{V}_x$ de x et un voisinage $\mathcal{V}_y$ de y tels que $\mathcal{V}_x \cap \mathcal{V}_y = \emptyset$.

Exemple : Les espaces vectoriels normés sont des espaces topologiques séparés. ♦ Plus généralement, les espaces métriques sont également des espaces topologiques séparés : si $d = d(x, y) > 0$, alors les boules $\mathcal{B}(x; d/3)$ et $\mathcal{B}(y; d/3)$ séparent les points x et y .



☞ ESPACE *TOPOLOGIQUE.

SÉQUENTIEL

Caractérisation séquentielle de l'adhérence Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E . L'adhérence de A est l'ensemble des vecteurs x de E pour lesquels il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A convergent vers x .

Caractérisation séquentielle de la compacité Soit K une partie non vide d'un espace vectoriel normé E . Alors K est compact si et seulement si toute suite à valeurs dans K admet une suite extraite dont la limite est dans K .

REMARQUE : Cette « caractérisation » est généralement prise comme définition d'un compact dans un espace vectoriel normé. Cependant, dans un cadre plus large (espace topologique séparé), on définit plutôt un compact par la propriété de *Borel-Lebesgue, et la propriété ci-dessus en devient alors une caractérisation.

Caractérisation séquentielle de la continuité Soient A une partie d'un espace vectoriel normé E et F un espace vectoriel normé. Soit $f : A \rightarrow F$ une application. Alors f est continue si et seulement si, quelle que soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A , convergente et dont la limite a est dans A , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$.

Caractérisation séquentielle de la densité Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une partie D de E est dense si et seulement si, pour tout point x de E , il existe une suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans D qui converge vers x .

Exemple : Tout réel peut être approché par une suite de rationnels : si $x \in \mathbb{R}$, la suite de terme général $d_n = \lfloor 10^n x \rfloor / 10^n$, à valeurs dans $\mathbb{Q}$, converge vers x .

Caractérisation séquentielle de la limite Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E , soit a un point adhérent à A et soit $f : A \rightarrow F$ une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé F . Alors les énoncés suivants sont équivalents :

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$;
- (b) pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A et de limite a , $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \ell$.

SÉRIE

Objet abstrait associé à une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace vectoriel normé.

♦ *Étudier* la série $\sum u_n$, c'est déterminer sa *nature* : la suite de ses sommes partielles, de terme général $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, est-elle convergente ou non ? Puis, dans le cas de la

convergence, déterminer la somme de la série, c'est-à-dire la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

REMARQUES : Il existe de très nombreux outils permettant de déterminer la nature d'une série. Ces outils sont même tellement efficaces qu'il est parfois avantageux, lorsque l'on étudie la nature d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d'étudier, de manière équivalente, la nature de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$. ♦ En revanche, le calcul explicite de la somme d'une série est souvent chose impossible. Citons quelques cas typiques où l'on sait calculer la somme d'une série $\sum u_n$:

- lorsque $\sum u_n$ est une série télescopique;
- lorsque $\sum u_n$ est une série géométrique;
- lorsque la série entière $\sum u_n x^n$ peut se calculer par divers moyens (dérivation, résolution d'équations différentielles, etc.), que son rayon est supérieur ou égal à 1 et que la somme de la série est continue à gauche en 1. ✎ ABEL.

✎ CONVERGENCE D'UNE SÉRIE.

Série entière Série d'applications du type $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de complexes.

REMARQUES : Si R est le rayon d'une telle série, alors sa somme converge normalement sur tout compact inclus dans $\mathcal{B}(0; R)$. ♦ La restriction de cette somme à la variable réelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R; +R[$ et ses dérivées successives se calculent en dérivant la somme terme à terme.

✎ DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE, RAYON.

Série positive Série de terme général réel et positif.

✎ COMPARAISON.

Série trigonométrique Série de fonctions de la forme

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n + c_{-n} e_{-n},$$

où pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a défini $e_n : t \mapsto e^{int}$.

REMARQUE : Si cette série converge uniformément, alors les coefficients de Fourier de sa somme sont précisément les c_n . ✎ INTÉGRATION TERME À TERME.

SESQUILINÉAIRE

Forme sesquilineaire Application $\varphi : E \times F \rightarrow \mathbb{C}$, où E et F sont des espaces vectoriels complexes, semi-linéaire à gauche (c'est-à-dire par rapport à la première variable), et linéaire à droite (c'est-à-dire par rapport à la seconde) :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x + x', y) &= \bar{\lambda} \varphi(x, y) + \varphi(x', y) \\ \varphi(x, \mu y + y') &= \mu \varphi(x, y) + \varphi(x, y').\end{aligned}$$

REMARQUE : Étymologiquement, sesquilineaire veut dire « une fois et demie »-linéaire : une fois à droite, une demi-fois à gauche.

✎ PRODUIT SCALAIRE HERMITIEN.

SIGMA

Lettre grecque, employée en majuscule (Σ) pour désigner des sommes discrètes (c'est-à-dire des sommes sur des ensembles finis ou dénombrables) ou en minuscule (σ) pour dénoter un caractère dénombrable.

σ -algèbre Synonyme de *tribu*. ✎ ALGÈBRE.

σ -additivité ✎ PROBABILITÉ.

SIGNATURE

Unique morphisme de groupe de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, +1\}$ vérifiant $\varepsilon(\tau) = -1$ si τ est une transposition.

Signature d'une permutation Toute permutation σ se décompose en un produit $\tau_1 \circ \dots \circ \tau_p$ de transpositions. ♦ Bien que ni cette écriture, ni même l'entier p , ne soient uniques, la parité de p ne dépend pas du choix de la décomposition. La signature de σ est alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.

REMARQUES : La signature de tout cycle de longueur d est égale à $(-1)^{d+1}$. ♦ Notons $M(\sigma)$ la matrice associée à une permutation, c'est-à-dire la matrice de l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à e_k associe $e_{\sigma(k)}$; cette matrice a pour coefficients $M_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$. Alors $\det M(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.

✎ PERMUTATION, GROUPE SYMÉTRIQUE, KRONECKER, TRANSPOSITION.

SIGNE

Fonction signe Fonction constante par morceaux, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

SIMILITUDE

Similitude affine Dans un espace affine euclidien $\mathcal{E}$, une similitude affine est une application affine dont la partie vectorielle est une similitude vectorielle. ♦ Elle peut donc s'écrire :

- soit comme une translation ;
- soit comme la composée d'une rotation de centre un point M et d'une homothétie de centre M ;
- soit comme une symétrie glissée, composée d'une symétrie et d'une translation par un vecteur invariant par la symétrie ;
- soit comme la composée d'une rotation de centre un point M , d'une homothétie de centre M et d'une symétrie par rapport à un hyperplan affine passant par M .

♦ Une similitude est caractérisée par le fait qu'elle préserve l'orthogonalité : si f est une similitude, si A, B, C et D sont des points de $\mathcal{E}$ et si $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, alors $\overline{f(A)f(B)} \perp \overline{f(C)f(D)}$. ♦ Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ assimilé au plan complexe, une similitude est une transformation de la forme $z \mapsto az + b$, avec $a \neq 0$, pour une similitude directe, ou $z \mapsto a\bar{z} + b$ avec $a \neq 0$ pour une similitude indirecte.

Similitude vectorielle Dans un espace vectoriel euclidien E , une similitude s est la composée $h \circ u = u \circ h$ d'une homothétie h de rapport positive et d'un automorphisme orthogonal u . ♦ La décomposition $s = h \circ u$ est alors unique. ♦ Si u est un automorphisme orthogonal direct, la similitude est dite *directe* : elle est donc composée d'une rotation et d'une homothétie. Dans le cas contraire, elle est dite *indirecte*.

REMARQUES : Une similitude est caractérisée par le fait qu'elle transforme toute base orthogonale en une base orthogonale. Si elle est directe, elle transforme toute base orthogonale directe en une base orthogonale directe. ♦ Le rapport de l'homothétie est le rapport $f(A)f(B)/AB$, pour tout couple de points distincts (A, B) .

Conjugaison par similitude Soient E un espace vectoriel et $a \in \mathcal{U}(E)$ un automorphisme de E . On appelle conjugaison par similitude l'automorphisme de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ défini par $C_a(u) = a \circ u \circ a^{-1}$ pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$. ♦ Les endomorphismes u et $C_a(u)$ sont dits *semblables*.

REMARQUE : Si u est un endomorphisme de E , alors u et $C_a(u)$ ont même spectre ; de plus, si λ est valeur propre de u , alors le sous-espace propre de $C_a(u)$ associé à λ est l'image par a de $E_\lambda(u) : E_{C_a(u)}(\lambda) = a(E_\lambda(u))$.

Invariant de similitude ✎ INVARIANT.

Relation de similitude ✎ SEMBLABLES.

SIMPLE

Arc simple Arc paramétré $\gamma : [a; b] \rightarrow E$ injectif. ♦ Un arc non simple possède un ou des points doubles (ou multiples).

Convergence simple ✎ CONVERGENCE.

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle. Notons $(z_1, \dots, z_n)$ ses pôles et $(m_1, \dots, m_n)$ leurs ordres de multiplicité respectifs. Alors, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ et une unique famille de scalaires $(a_{i,k})$ tels que

$$F = P + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{i,k}}{(X - z_i)^k}.$$

Le polynôme P est la *partie entière* de F et

$$\sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{i,k}}{(X - z_i)^k}$$

la *partie polaire* associée au pôle z_i .

REMARQUE : Si P est un polynôme de la forme $P = \lambda \prod_{i=1}^n (X - z_i)^{m_i}$, alors la décomposition de P'/P est particulièrement simple :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{X - z_i}.$$

✎ DÉRIVÉE LOGARITHMIQUE.

Limite simple ✎ CONVERGENCE SIMPLE.

Racine, valeur propre simple Racine, valeur propre, de *multiplicité égale à 1.

Simplement connexe ✎ CONNEXE.

SIMPLIFIABLE

Synonyme de *régulier* pour un élément d'un monoïde. ✎ ÉLÉMENT *RÉGULIER.

SIMPSON

Méthode de Simpson Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur un segment. La méthode de Simpson est une méthode de calcul approché de l'intégrale $\int_a^b f$, plus fine que la méthode des trapèzes. Pour cela, on choisit un entier $n \geq 2$ et on considère la subdivision régulière $(a_0, \dots, a_n)$ de $[a; b]$ définie par $a_k = a + kh$ et $h = (b - a)/n$. Sur chaque segment $[a_k; a_{k+1}]$, on remplace f par le polynôme de degré au plus 2 qui prend les mêmes valeurs que f aux points a_k, a_{k+1} et $\frac{1}{2}(a_k + a_{k+1})$.

REMARQUE : Si f est de classe $\mathcal{C}^3$, la différence entre l'intégrale et son approximation S_n par la méthode de Simpson à l'ordre n vérifie la majoration

$$\left| \int_a^b f - S_n \right| \leq \frac{\|f^{(3)}\|_\infty (b - a)^4}{192 n^3}.$$

De même, une majoration d'ordre $O(1/n^4)$ est vérifiée si f est de classe $\mathcal{C}^4$.

✎ INTERPOLATION, LAGRANGE.

SIMULTANÉE

Réduction simultanée de deux endomorphismes Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si u et v sont deux endomorphismes diagonalisables qui commutent, alors ils sont simultanément diagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ propre pour u et pour v . ♦ Ce théorème a une importance capitale en mécanique quantique.

Réduction simultanée de deux formes bilinéaires symétriques Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; soient φ une forme bilinéaire symétrique définie positive et ψ une forme bilinéaire symétrique quelconque. Alors il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E qui est orthonormale pour φ et orthogonale pour ψ , c'est-à-dire que $\varphi(e_i, e_i) = \delta_{ij}$ pour tous $i, j \in [1; n]$ et $\psi(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$.

SINGULIER

Point singulier Point (d'un arc, d'une nappe) qui n'est pas régulier.

✎ RÉGULIER, COURBE.

SINUS

Fonction sinus réelle La fonction sinus, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, peut être définie de plusieurs manières équivalentes : par une série entière, par une équation différentielle, par la géométrie.

– Pour tout x réel, $\sin x$ est la somme d'une série convergente :

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

– La fonction sinus est l'unique solution de l'équation différentielle linéaire du 2^e ordre, à coefficients constants : $x'' + x = 0$, vérifiant les conditions initiales $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$.

— Elle est reliée à la fonction exponentielle par

$$\sin x = \mathcal{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Elle est 2π -périodique et vérifie :

$$\sin x = 0 \iff x \in \pi\mathbb{Z}$$

$$\sin x = 1 \iff x \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1 \iff x \in -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}.$$

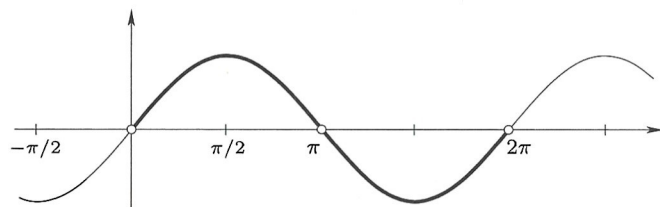


Fig. 94 — La fonction sinus entre $-\pi$ et 2π ; en gras, la fonction sinus restreinte à une période.

♦ Les autres propriétés de la fonction sinus (formules trigonométriques) sont rappelées à l'entrée « trigonométrie » page 304.

Fonction sinus dans le plan complexe La fonction sinus se prolonge dans le plan complexe tout entier, la série entière la définissant étant de rayon infini :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On a alors, pour tous a, b réels : $\sin(a + ib) = \sin a \operatorname{ch} b + i \cos a \operatorname{sh} b$. Enfin, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\sin(z + 2\pi) = \sin(z)$ et $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

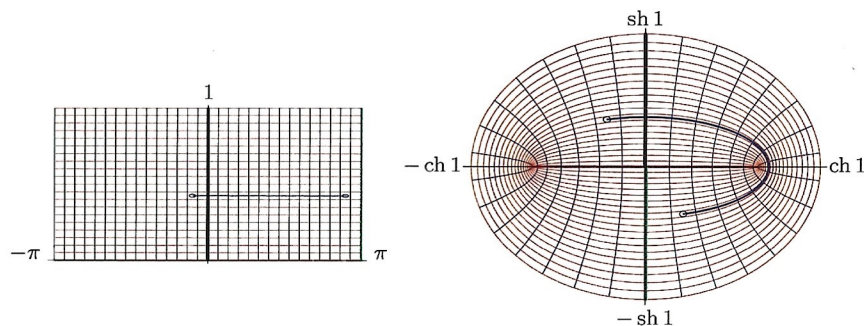


Fig. 95 — L'image du rectangle $[-\pi; \pi] \times [0; 1]$ du plan complexe par la fonction sinus. L'image de l'axe des réels est l'intervalle réel $[-1; +1]$, représenté en rouge. L'image du demi-axe imaginaire $i\mathbb{R}^+$ (en noir) est le demi-axe imaginaire. On a représenté également le demi-axe $\pi + i\mathbb{R}^+$ et son image (en vert), ainsi que deux points particuliers reliés par un chemin bleu, et leurs images par la fonction sinus.

Sinus hyperbolique ⇔ HYPERBOLIQUE.

SO

⇔ GROUPE *SPÉCIAL ORTHOGONAL.

SOLUTION

Solution d'une équation différentielle Soit F une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{R} \times E$ où E est un espace vectoriel de dimension finie). Une solution de l'équation différentielle $x' = F(t, x)$ est un couple (I, φ) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application dérivable, vérifiant

$$\forall t \in I \quad (t, \varphi(t)) \in U \quad \text{et} \quad \varphi'(t) = F(t, \varphi(t)).$$

Solution maximale d'une équation différentielle Sur l'ensemble des solutions d'une équation différentielle (E) munie de conditions initiales (CI) , on définit une relation d'ordre : $(I, \varphi) \preccurlyeq (J, \psi)$ si et seulement si $I \subset J$ et si φ est une restriction de ψ , c'est-à-dire $\varphi(t) = \psi(t)$ pour tout $t \in I$ (⇔ RELATION D'ORDRE). Sous des conditions très générales, le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme qu'il existe un élément maximal pour cette relation d'ordre, qu'on appelle solution maximale du problème de Cauchy.

♦ Toute solution de ce problème $(E + CI)$ est alors une restriction de cette solution maximale.

Exemple : Considérons l'équation réelle $x' = 1 + x^2$, assortie de la condition initiale $x(t_0) = x_0$. La fonction définie par $x(t) = \tan(t - a)$, où l'on a posé $a = t_0 - \operatorname{Arc} \tan x_0$, est définie sur l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2} + a; \frac{\pi}{2} + a[$, est solution de l'équation différentielle et satisfait la condition initiale; elle n'admet pas de prolongement sur un intervalle plus grand. C'est donc la solution maximale. ♦ Ainsi, toutes les solutions maximales de l'équation $x' = 1 + x^2$ ont une durée de vie égale à π .

⇔ CAUCHY-LIPSCHITZ.

SOMMABLE

Fonction sommable Synonyme de fonction intégrable.

Suite sommable Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels est sommable si la série $\sum u_n$ converge absolument.

Famille sommable Une famille $(a_i)_{i \in I}$ de réels positifs est dite sommable s'il existe un réel M tel que, pour tout sous-ensemble fini $I' \subset I$, on ait

$$\sum_{i \in I'} a_i \leq M.$$

Dans ce cas, on définit la somme de la famille comme la borne supérieure de ces sommes. Une famille sommable a toujours un support fini ou dénombrable : il y a au plus une quantité dénombrable d'éléments non nuls. On peut donc désormais supposer les familles indexées par un ensemble dénombrable. ♦ Une famille dénombrable $(a_i)_{i \in I}$ de réels ou de complexes est dite sommable si la famille $(|a_i|)_{i \in I}$ est sommable. ♦ Si $(a_i)_{i \in I}$ est sommable alors sa somme est

$$\sum_{i \in I} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I_n} a_i$$

où $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties finies de I , croissante pour la relation d'inclusion, et d'union égale à I (⇔ EXHAUSTIVE.) Le résultat est indépendant de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

choisie. ♦ La notion de sommabilité d'une famille généralise la notion de convergence absolue d'une série, sans que la notion d'ordre de sommation soit utilisée.

REMARQUE : On peut ainsi montrer qu'une suite est sommable si et seulement si la série associée converge absolument ; dans ce cas, la sommation des termes de la suite, dans un ordre quelconque, amène toujours à la même somme.

SOMME

Somme partielle d'une série Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. On appelle somme partielle d'indice p le nombre

$$S_p = \sum_{n=0}^p u_p = u_0 + \cdots + u_p.$$

La série $\sum u_n$ est dite convergente si la suite $(S_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge.

REMARQUE : Si la série n'est définie qu'à partir d'un certain indice d , on la note $\sum_{n \geq d} u_n$ et, dans ce cas, les sommes partielles sont définies, pour tout $n \geq d$, par

$$S_n = \sum_{k=d}^n u_k.$$

☞ RESTE.

Somme d'une série Si $\sum u_n$ est une série convergente, sa somme est la limite de la suite de ses sommes partielles ; on la note

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Somme de sous-espaces vectoriels La somme d'une famille finie $(E_1, \dots, E_n)$ de sous-espaces vectoriels de E , notée $F = \sum_{i=1}^n E_i$ ou $F = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $x = \sum_{i=1}^n x_i$ où, pour tout $i \in [1; n]$, x_i est élément de E_i .

Somme directe Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E . Considérons l'application S définie sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ par $S(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$. La famille $(E_1, \dots, E_n)$ est dite *libre* ou en somme directe si l'application S est injective, c'est-à-dire si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \quad \left(\sum_{k=1}^n x_k = 0 \right) \implies (x_1 = \cdots = x_n = 0).$$

La somme est alors notée $\bigoplus_{k=1}^n E_k$.

REMARQUE : Un cas particulier notable : deux sous-espaces vectoriels V et W de F sont en somme directe si et seulement si $V \cap W = \{0\}$.

☞ SUPPLÉMENTAIRE.

Somme directe orthogonale ☞ ORTHOGONAL.

SOUS-ESPACE PROPRE

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et λ un scalaire. Le sous-espace propre de u associé à λ est l'espace $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$.

♦ Si ce sous-espace n'est pas réduit à $\{0\}$, alors λ est appelé valeur propre de u et les vecteurs *non nuls* de $E_\lambda(u)$ sont appelés vecteurs propres de u .

☞ DIAGONALISABLE, POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE, VALEUR PROPRE, VECTEUR PROPRE.

SOUS-ESPACE VECTORIEL

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel de E est une partie F de E qui, munie des opérations d'addition et de multiplication scalaire induites, est elle-même un espace vectoriel.

REMARQUE : Une partie F de E est un sous-espace vectoriel si et seulement si il est non vide et stable par combinaisons linéaires. En pratique, il suffit de vérifier que $0 \in F$ et que, pour tous $x, y \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'élément $\lambda x + y$ appartient à F .

Sous-espace vectoriel engendré par une partie Soit A une partie d'un espace vectoriel E . Le sous-espace vectoriel engendré par A est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A ; on le note $\text{Vect}(A)$. ♦ C'est également l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant A .

REMARQUE : $\text{Vect}(A)$ est également l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A .

Sous-espace caractéristique Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle sous-espace caractéristique associé à λ le sous-espace vectoriel

$$F_\lambda(u) \stackrel{\text{déf.}}{=} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})^k.$$

REMARQUE : Ces sous-espaces sont très utiles pour étudier un endomorphisme non diagonalisable. ♦ Si E est de dimension finie n , la suite (croissante) de terme général $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})^k$ est stationnaire et atteint sa valeur limite à un rang p au plus égal à n ; ainsi,

$$F_\lambda(u) \stackrel{\text{déf.}}{=} \bigcup_{k=1}^p \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})^k = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})^p.$$

SOUS-GROUPE

Sous-groupe d'un groupe $(G, \cdot)$ Partie H de G , contenant l'élément neutre e de G , et stable par produit et par passage au symétrique.

REMARQUE : Un sous-groupe de G , muni de la loi induite, a une structure de groupe. ♦ Pour montrer que H est un sous-groupe de G , il suffit de montrer que $e \in H$ et que, pour tous $x, y \in H$, l'élément xy^{-1} est dans H .

Sous-groupe engendré Soit X une partie d'un groupe G ; le sous-groupe engendré par X est le plus petit sous-groupe de G contenant X ; il est noté $\langle X \rangle$ ou $\text{gr}(X)$. ♦ Si g est un élément de G , on note parfois $\text{gr}(g)$, au lieu de $\text{gr}(\{g\})$, le sous-groupe engendré par $\{g\}$. ☞ MONOGÈNE.

Exemple : Si g est un élément de G , alors $\text{gr}(g) = \{g^n ; n \in \mathbb{Z}\}$.

Sous-groupes de $\mathbb{R}$ Les sous-groupes du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sont de deux types. Si G est un tel sous-groupe, notons $\alpha = \inf \{x \in G ; x > 0\}$.

– Si $\alpha > 0$, alors $G = \alpha\mathbb{Z}$.

– Si $\alpha = 0$, alors G est un sous-groupe dense.

Exemple : L'ensemble $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = \{a + b\sqrt{2} ; (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, qui contient notamment 1 et $\sqrt{2}$. Si ce sous-groupe était de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha > 0$, il existerait donc un entier k tel que $1 = \alpha k$ et un entier k' tel que $\sqrt{2} = \alpha k'$, d'où l'on déduirait que $\sqrt{2} = k'/k$ serait rationnel : contradiction. On en déduit que $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Sous-groupe propre Sous groupe H d'un groupe G tel que $H \neq G$ et $H \neq \{e\}$.

SOUS-SUITE

☞ SUITE *EXTRAITE.

SPÉCIAL

Critère spécial des séries alternées ☞ CRITÈRE DES SÉRIES ALTERNÉES.

Fonctions spéciales Nom générique donné à de nombreuses fonctions (définies de manière compliquée...). Ces fonctions sont généralement définies comme solutions d'équations différentielles (par exemple, les fonctions de Bessel) ou d'équations fonctionnelles (fonction ζ de Riemann ou fonction Γ d'Euler), comme sommes de séries entières, ou comme primitives non exprimables en termes de fonctions usuelles. (☞ GAMMA, ZETA.)

Exemple : Citons par exemple la fonction *logarithme intégral*, définie pour tout $x > 1$ par

$$\text{Li}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\ln t} \right]$$

et la fonction *sinus intégral* définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Ces fonctions sont utilisées dans des domaines variés, allant de la théorie des nombres à la physique mathématique, en passant par l'analyse réelle et complexe.

☞ LOGARITHME INTÉGRAL, THÉORÈME DES NOMBRES *PREMIERS.

Groupe spécial linéaire Synonyme de groupe linéaire unimodulaire : groupe multiplicatif des endomorphismes d'un espace vectoriel E , de déterminant 1, ou groupe multiplicatif des matrices carrées de déterminant 1. ♦ Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, le groupe spécial linéaire des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\text{SL}_n(\mathbb{K})$. ♦ On peut étendre cette notion aux matrices à coefficients dans un anneau commutatif, comme $\mathbb{Z}$.

Exemple : Le groupe $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ des matrices 2×2 à coefficients entiers et de déterminant 1 est lié aux transformations homographiques du « réseau plan » $\mathbb{Z}^2$. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ est

élément de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ et son inverse est $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

☞ TRANSVECTIONS, UNIMODULAIRE.

Groupe spécial orthogonal Sous-groupe de $O(E)$ formé des automorphismes orthogonaux de déterminant +1. Il est noté $\text{SO}(E)$ ou $O^+(E)$. On l'appelle également *groupe des rotations*. ♦ Sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ formé des matrices orthogonales de déterminant +1. Il est noté $\text{SO}_n(\mathbb{R})$.

Groupe spécial unitaire Sous-groupe de $U(E)$ formé des endomorphismes unitaires et de déterminant égal à 1 d'un espace vectoriel hermitien. Il est noté $\text{SU}(E)$.

SPECTRAL

Rayon spectral ☞ RAYON.

Théorème spectral Tout endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien est diagonalisable dans une base orthonormée. ♦ Toute matrice carrée réelle symétrique est diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale.

REMARQUE : Il existe une version complexe de ce théorème. Tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace hermitien est diagonalisable dans une base orthonormée et ses valeurs propres sont réelles. ♦ Toute matrice vérifiant ${}^t\bar{A} = A$ est diagonalisable au moyen d'une matrice unitaire U et ses valeurs propres sont réelles.

☞ RAYLEIGH.

SPECTRE

Ensemble des *valeurs propres d'une matrice A ou d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie. ♦ On le note $\text{Sp}(A)$ ou $\text{Sp}(u)$.

REMARQUE : Si E est de dimension infinie et si $u \in \mathcal{L}(E)$, le spectre de u est l'ensemble de ses *valeurs spectrales et contient toutes les valeurs propres de u .

☞ DIAGONALISATION, POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE, VALEUR PROPRE, VECTEUR PROPRE.

SPHÈRE

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, la sphère $\mathcal{S}(a; R)$ de centre a et de rayon $R \geq 0$ est l'ensemble des vecteurs x de E vérifiant $\|x - a\| = R$.

REMARQUE : La sphère $\mathcal{S}(a; R)$ est une partie fermée et bornée de E . Si E est de dimension finie, elle est donc compacte; mais, dans le cas général, ce n'est pas forcément vrai. Ainsi, dans $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme définie par $\|P\| = \max |a_k|$ si $P = \sum a_k X^k$, la sphère unité n'est pas compacte : la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet aucune sous-suite de Cauchy, et à plus forte raison aucune sous-suite convergente.

STABLE

Partie stable Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Une partie A est dite stable par f si elle est incluse dans le domaine de définition de f et si $f(A) \subset A$.

☞ POINT *FIXE.

Sous-espace vectoriel stable Un sous-espace vectoriel V de E est stable par un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ si $u(V) \subset V$.

☞ ENDOMORPHISME INDUIT.

STATIONNAIRE

Suite stationnaire Suite constante à partir d'un certain rang.

Exemples : Toute suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est stationnaire. ♦ Toute suite stationnaire est évidemment convergente.

Point stationnaire Synonyme de point critique. ☞ CRITIQUE.

STIRLING James (1692-1770)

(Mathématicien écossais)

Formule de Stirling $n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

REMARQUE : Cette formule peut se généraliser à des nombres non entiers, grâce à la fonction Γ d'Euler :

$$\Gamma(x+1) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} e^{x \ln x - x} \sqrt{2\pi x}.$$

STOCHASTIQUE

Synonyme d'aléatoire.

Matrice stochastique Matrice carrée $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients appartiennent à $[0; 1]$ et dont la somme des coefficients sur chaque ligne vaut 1. ♦ Une matrice M est dite *bistochastique* si elle est stochastique et si sa transposée est elle-même stochastique ; la somme des coefficients sur chaque colonne de M est donc égale à 1.

☞ MATRICE DE *TRANSITION.

STOLZ Otto (1842-1905)

(Mathématicien autrichien)

☞ THÉORÈME DE CONVERGENCE RADIAL D'*ABEL.

STONE *Marshall Harvey* (1903–1989)
(Mathématicien américain)

Théorème de Stone-Weierstrass Autre nom du premier théorème d'approximation de Weierstrass : le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales est dense dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$ des fonctions continues sur $[a; b]$, muni de la norme de la convergence uniforme.

REMARQUE : Dans la version étendue par Stone, le théorème de Weierstrass est plus général. Soit A un compact d'un espace vectoriel normé E . Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur A à valeurs réelles. On suppose que $\mathcal{A}$ contient une fonction constante non nulle et possède la propriété suivante : si x et y sont deux éléments distincts de A , alors il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Dans ce cas, $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$.

☞ WEIERSTRASS.

STRICT

Inclusion stricte On dit que A est strictement inclus dans B , et on écrit $A \subsetneq B$, lorsque $A \subset B$ et $A \neq B$.

Inégalité stricte Inégalité $a \leq b$ dans le cas où $a \neq b$. On écrit alors $a < b$.

REMARQUE : Si f et g sont deux fonctions définies sur un même ensemble E , écrire « $f \leq g$ » signifie que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in E$. Écrire « $f < g$ » est déconseillé : c'est dangereux, car ambigu. Dans le sens précédent (i.e. si l'on établit une relation d'ordre sur l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{R}$), cela signifie que $f \leq g$ et que $f \neq g$, c'est-à-dire : $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in E$ et il existe au moins un $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) < g(x_0)$. Cela peut également être une convention commode pour signifier que $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in E$.

Sous-espace vectoriel strict Un sous-espace vectoriel strict d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel F tel que $F \neq E$.

SUBDIVISION

Étant donné un segment $[a; b]$ de $\mathbb{R}$, une subdivision est une suite finie $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ telle que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$. ♦ Le *pas* de cette subdivision est le plus grand des nombres $a_{k+1} - a_k$.

SUBORDONNÉE

Norme subordonnée Soient E et F deux espaces vectoriels. On appelle norme subordonnée (aux normes sur E et F respectivement) la norme définie sur l'espace $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F par l'une des formules suivantes :

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

♦ Lorsque les espaces de départ et d'arrivée E et F sont égaux et munis de la même norme, la norme subordonnée définie sur $\mathcal{L}_c(E)$ vérifie $\|u \circ v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$: c'est donc une norme d'algèbre.

Exemple : On munit l'espace $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ de la norme infinie et on considère l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(f) = \int_0^\pi f(t) \cos(t) dt.$$

Alors φ est continue et $\|\varphi\| = 2$.

☞ CONTINUITÉ D'UNE APPLICATION LINÉAIRE, NORME D'ALGÈBRE, NORME MATRICIELLE.

SUITE

Suite à valeurs dans un ensemble E Application u définie sur $\mathbb{N}$ ou, plus généralement, sur une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{N}$, et à valeurs dans E . ♦ Les éléments de la suite sont les images $u(n)$ des entiers de $\mathcal{P}$. ♦ On note plus volontiers u_n au lieu de $u(n)$. ♦ Lorsque u_n est donné par une formule explicite, on parle de terme général de la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. ♦ Si E est un espace vectoriel normé, et notamment si $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, *étudier* une suite signifie déterminer si cette suite est convergente ou non et, le cas échéant, trouver sa limite.

Exemple : La suite de terme général $u_n = \sin(1/n)$ converge vers 0.

Suite de Cauchy ☞ CAUCHY, COMPLET, ESPACE DE *BANACH.

Suite extraite ☞ EXTRAITE.

Suite récurrente Une suite récurrente d'ordre 1 est définie par son premier terme u_0 , et par une relation de la forme $u_{n+1} = f(n, u_n)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sous réserve que l'expression $f(n, u_n)$ soit correctement définie, ce procédé garantit l'existence et l'unicité d'une suite vérifiant cette relation de récurrence. ♦ Une suite récurrente d'ordre p est définie par ses p premiers termes $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$ et par une relation de récurrence de la forme $u_{n+p} = f(n, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ♦ Définir une suite par récurrence est parfois le seul moyen à disposition, quand une formule générale explicitant u_n n'est pas connue.

SUPPLÉMENTAIRE

Deux sous-espaces vectoriels V et W de E sont dits supplémentaires (dans E) si $E = V \oplus W$; c'est-à-dire que l'on a les deux conditions : $E = V + W$, et $V \cap W = \{0\}$.

♦ Si E est de dimension finie et si $E = V \oplus W$, alors $\dim(E) = \dim(V) + \dim(W)$.

♦ Tout sous-espace vectoriel V d'un espace vectoriel E de dimension finie admet au moins un supplémentaire (et même une infinité si $V \neq E$ et $V \neq \emptyset$).

REMARQUE : C'est également vrai lorsque E est de dimension infinie, à condition d'accepter l'axiome du choix. ☞ CHOIX.

☞ GRASSMAN, SUPPLÉMENTAIRE *ORTHOGONAL, SOMME DIRECTE.

SUPPORT

Support d'un arc Si $\gamma : [a; b] \rightarrow E$ est un arc paramétré, on appelle support de l'arc son image $\Gamma = \text{Im } \gamma$, c'est-à-dire la « trace » géométrique qu'il laisse dans l'espace E .

Support d'une famille Soit I un ensemble et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments d'un ensemble E muni d'une addition. Le support de $(x_i)_{i \in I}$ est l'ensemble des indices i tels que $x_i \neq 0$:

$$\text{supp}(x_i)_{i \in I} = \{i \in I; x_i \neq 0\}.$$

♦ Lorsque cet ensemble est fini, on dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est à *support fini* ou encore *presque nulle*.

☞ PRESQUE NULLE.

Support d'une fonction Soient E un espace vectoriel normé et $f : E \rightarrow \mathbb{K}$. Le support de f est l'adhérence de l'ensemble des points en lesquels la fonction a une valeur non nulle :

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in E; f(x) \neq 0\}}.$$

♦ Une fonction est dite à *support compact* si elle est nulle en dehors d'un compact.

REMARQUES : Si f est une fonction de la variable réelle, dire que f est à support compact revient à dire qu'elle est nulle en dehors d'un certain segment. ♦ Dans le cas général, c'est équivalent au fait que le support de f est compact.

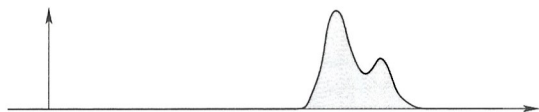


Fig. 96 — Fonction à support compact.

Support d'une nappe Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une nappe paramétrée, son support est son image $S = \text{Im } f$.

SURJECTIVITÉ

Soient A et B deux ensembles et soit f une application de A dans B . On dit que f est surjective si l'image $f(A)$ de f est égale à B . ♦ En d'autres termes, f est surjective si, pour tout élément $b \in B$, il existe un élément $a \in A$ tel que $f(a) = b$.

REMARQUE : Si A est un ensemble fini et si $f : A \rightarrow B$ est surjective, alors B est fini et $\text{Card } B \leq \text{Card } A$. ♦ Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire surjective, alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.

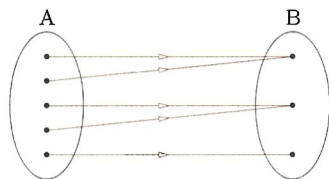
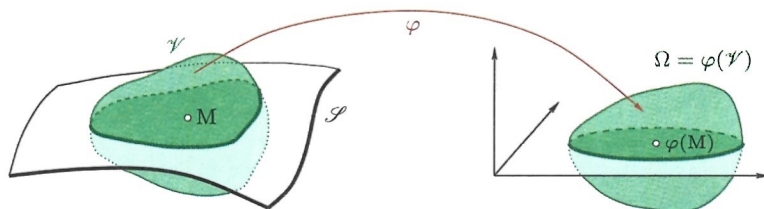


Fig. 97 — Application surjective

☞ IMAGE, RANG.

SURFACE

De même que la notion de courbe, la notion de surface a plusieurs significations, parfois incompatibles. ♦ La première notion est celle de surface paramétrée $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application continue (☞ NAPPE PARAMÉTRÉE). ♦ La seconde est une définition locale de la surface, qui est une partie $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ qui, localement en chaque point, ressemble à un disque de $\mathbb{R}^2$. En termes plus précis, pour tout $M \in \mathcal{S}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de M et un homéomorphisme $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \Omega$, où Ω est un voisinage ouvert de $\varphi(M)$, tels que la restriction de φ à $\mathcal{V} \cap \mathcal{S}$ a pour image un disque contenu dans un plan.



♦ En pratique, une surface peut être décrite au moyen de coordonnées (par exemple dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ ou dans toute autre base); les trois méthodes principales sont :

- une équation de la forme $z = f(x, y)$;
- une équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$;
- un paramétrage $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$(u, v) \mapsto M(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

La première méthode est un cas particulier de chacune des deux autres; elle ne permet pas de décrire toutes les surfaces (la sphère par exemple). La seconde méthode est plus générale; la surface $\mathcal{S}$ prend alors le nom de **nappe cartésienne*. Avec la troisième méthode, la surface est appelée **nappe paramétrée*.

REMARQUE : La définition locale, en termes d'homomorphismes, exclut la possibilité de points doubles; cependant, aucune définition raisonnable ne décrit correctement la notion de surface dans tous les cas envisageables, les points de vue et les attentes d'un mathématicien pouvant être très différents de ceux d'un autre.

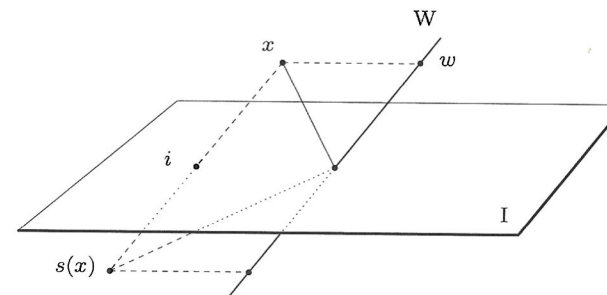
☞ NAPPE CARTÉSIENNE, NAPPE PARAMÉTRÉE.

SYMÉTRIE

Une symétrie vectorielle est un endomorphisme s d'un espace vectoriel E tel que $s \circ s = \text{Id}$. ♦ Géométriquement, il est caractérisé par deux sous-espaces supplémentaires

$$E = I \oplus W \quad I = \text{Ker}(s - \text{Id}) \quad \text{et} \quad W = \text{Ker}(s + \text{Id}).$$

Tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique dans la somme directe $E = I \oplus W$: $x = i + w$. On pose alors $s(x) = i - w$. ♦ Les vecteurs de I sont invariants par s : $s(i) = i$ pour tout $i \in I$. Les vecteurs de W sont inversés par s : $s(w) = -w$ pour tout $w \in W$.



♦ Enfin, si l'on note p la projection sur I parallèlement à W , on a

$$s = 2p - \text{Id}.$$

Symétrie orthogonale Soit s une symétrie d'un espace préhilbertien E . Si les espaces $I = \text{Ker}(s - \text{Id})$ et $W = \text{Ker}(s + \text{Id})$ sont orthogonaux, on dit que s est une symétrie orthogonale. ♦ Dans un espace vectoriel euclidien, un endomorphisme est une symétrie orthogonale si et seulement si deux des trois conditions suivantes sont satisfaites (la troisième l'étant alors automatiquement) : c'est une symétrie ($s^2 = \text{Id}$); c'est un endomorphisme symétrique ($s^* = s$); c'est un endomorphisme orthogonal ($ss^* = \text{Id}$).

☞ PROJECTION.

SYMÉTRIQUE

Application n -linéaire symétrique Application multilinéaire φ définie sur le produit cartésien $E \times E \times \dots \times E$ et à valeurs dans un espace vectoriel F , vérifiant, pour tout couple $(i, j) \in [1; n]^2$ tel que $i \neq j$ et pour tout $(x_1, \dots, x_p)$,

$$f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p).$$

$\uparrow$
 i

$\uparrow$
 j

♦ En d'autres termes, pour tout permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Élément symétrique dans un monoïde Si $(E, *)$ est un monoïde d'élément neutre e , un *symétrique à gauche* de $x \in E$ est un élément y de E tel que $y * x = e$. ♦ Un *symétrique à droite* est un élément z de E tel que $x * z = e$. ♦ Un *symétrique* de x est un élément symétrique à gauche et à droite de x .

Endomorphisme symétrique Dans un espace vectoriel euclidien E , endomorphisme vérifiant $u^* = u$, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in E \quad \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle.$$

♦ On dit également que u est *auto-adjoint*.

☞ POSITIF, RAYLEIGH, SPECTRAL.

Endomorphisme symétrique positif Endomorphisme u symétrique d'un espace vectoriel euclidien E vérifiant $\langle u(x) | x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$. ♦ On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs de E . ♦ Un endomorphisme symétrique tel que $-u$ est positif est dit *négatif*.

☞ POSITIF.

Endomorphisme symétrique défini positif Endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E vérifiant $\langle u(x) | x \rangle > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$. ♦ On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs de E . ♦ Un endomorphisme symétrique tel que $-u$ est défini positif est dit *défini négatif*.

Fonctions symétriques élémentaires sur $\mathbb{K}^n$ Ce sont les fonctions $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ définies par :

$$\sigma_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in P_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k},$$

où l'on a noté P_k l'ensemble, de cardinal $\binom{n}{k}$, des parties à k éléments de $[1; n]$.

Exemples : Pour $n = 3$, on a

$$\begin{aligned} \sigma_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \sigma_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 \\ \sigma_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

REMARQUE : Tout polynôme symétrique à n indéterminées peut s'écrire, de manière unique, sous la forme

$$P(\sigma_1(X_1, \dots, X_n), \sigma_2(X_1, \dots, X_n), \dots, \sigma_n(X_1, \dots, X_n)),$$

où P est un polynôme à n indéterminées.

☞ RELATIONS COEFFICIENTS-RACINES.

Groupe symétrique Si n est un entier naturel, on note $\mathfrak{S}_n$ le n -ième groupe symétrique standard, c'est-à-dire le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. ♦ Tout groupe de permutation sur un ensemble de cardinal n est isomorphe à $\mathfrak{S}_n$.

☞ CYCLE, PERMUTATION, SIGNATURE, TRANSPOSITION.

Matrice symétrique Une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si elle est égale à sa transposée : $M = {}^tM$, c'est-à-dire si $m_{ij} = m_{ji}$ pour tous $i, j \in [1; n]$.

☞ THÉORÈME *SPECTRAL.

Matrice symétrique positive Matrice symétrique réelle vérifiant ${}^tXAX \geq 0$ pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. ♦ C'est également la matrice représentative, dans une base orthonormée, d'un endomorphisme symétrique positif. ☞ POSITIF.

Matrice symétrique définie positive Matrice symétrique réelle vérifiant ${}^tXAX > 0$ pour tout vecteur colonne X non nul. ♦ C'est également la matrice représentative d'une forme bilinéaire symétrique définie positive, et la matrice, dans une base orthonormée, d'un endomorphisme symétrique défini positif.

Polynôme symétrique à plusieurs indéterminées Soient n un entier naturel non nul et P un polynôme à n indéterminées $X_1, \dots, X_n$. Ce polynôme est dit symétrique si, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = P(X_1, \dots, X_n).$$

Exemple : Dans le cas $n = 3$, les polynômes suivants sont symétriques :

$$XYZ, \quad (XY + YZ + ZX)^2, \quad XYZ(X + Y + Z)^3,$$

☞ FONCTIONS *SYMÉTRIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Relation symétrique ☞ RELATION, RELATION D'ÉQUIVALENCE.

SYMÉTRISABLE

Un élément x d'un monoïde $(E, *)$ est dit symétrisable s'il admet un symétrique pour la loi $*$. ♦ Il est dit symétrisable à gauche s'il admet un symétrique à gauche. ♦ Il est dit symétrisable à droite s'il admet un symétrique à droite.

REMARQUE : Symétrisable est équivalent à symétrisable à gauche et à droite.

SYSTÈME

Système autonome ☞ AUTONOME.

Système fondamental de solutions Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soit $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ une fonction continue. On appelle système fondamental de solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $x' = a \cdot x$ toute base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de l'ensemble des solutions de cette équation.

☞ WRONSKIEN.

Système linéaire Système d'équations linéaires. Si p et n sont des entiers non nuls, un système linéaire de p équations à n inconnues $x_1, \dots, x_n$ est un système de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

♦ Du point de vue géométrique, ce système peut s'écrire sous la forme d'une équation linéaire $f(x) = b$, où $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $b \in \mathbb{R}^p$. ♦ Du point de vue matriciel, il s'écrit $AX = B$, en notant

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}).$$

REMARQUE : Un système linéaire de p équations à n inconnues, de rang r , admet pour ensemble de solutions un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - r$. ✎ THÉORÈME DU *RANG.

✎ AFFINE (SOUS-ESPACE), HOMOGÈNE, PIVOT, RANG.

Système différentiel Système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{cases} x'_1 = \varphi_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = \varphi_n(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

♦ Un tel système est dit *autonome* si les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont indépendantes de t . ✎ AUTONOME.

SYSTÈME COMPLET D'ÉVÉNEMENTS

Un système complet d'événements est une famille finie $(A_1, \dots, A_k)$ ou dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), dont la réunion est l'univers tout entier : $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$.

Exemple : Soit X une variable aléatoire discrète, pouvant prendre des valeurs x_k pour $k \in \mathbb{N}$. Alors la famille $([X = x_k])_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

✎ FORMULE DES *PROBABILITÉS TOTALES.

Système quasi-complet d'événements Famille finie $(A_1, \dots, A_k)$ ou dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements tels que $P(A_i \cap A_j) = 0$ si $i \neq j$ dont la réunion est presque certaine : $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = 1$.

REMARQUE : Les systèmes quasi-complets jouent le même rôle que les systèmes complets d'événements, au sens où ce qui est « en trop » ou ce qui « manque » est de probabilité nulle. Ainsi, la formule des probabilités totales est valide pour un système quasi-complet d'événements.

T

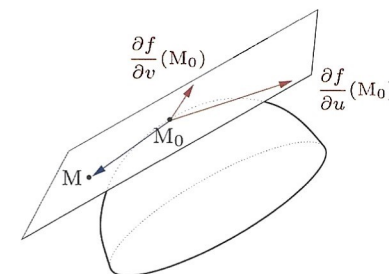
TANGENT

Plan tangent à une nappe paramétrée de l'espace En un point régulier M_0 d'une nappe paramétrée (U, f) , plan affine passant par M_0 et dirigé par les vecteurs

$$\frac{\partial f}{\partial u}(M_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(M_0).$$

♦ Son équation est donc

$$\det \left(M_0 M, \frac{\partial f}{\partial u}(M_0), \frac{\partial f}{\partial v}(M_0) \right) = 0.$$



Plan tangent à une surface implicite En un point régulier M_0 d'une surface d'équation cartésienne implicite $F(x, y, z) = 0$, plan affine passant par M_0 et orthogonal au vecteur $\text{grad } F(M_0)$. ♦ C'est donc le plan d'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0.$$

TANGENTE

Tangente à un arc Si γ est un arc et $M = \gamma(t)$ un point régulier de γ , la droite portée par le vecteur $T(t) = \gamma'(t)$ et passant par le point M est appelée tangente en M . ♦ C'est la droite *limite de la famille de cordes $(M, \gamma(s))$, lorsque s tend vers t .

✎ VECTEUR TANGENT.

