

♦ Du point de vue géométrique, ce système peut s'écrire sous la forme d'une équation linéaire  $f(x) = b$ , où  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  et  $b \in \mathbb{R}^p$ . ♦ Du point de vue matriciel, il s'écrit  $AX = B$ , en notant

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}).$$

REMARQUE : Un système linéaire de  $p$  équations à  $n$  inconnues, de rang  $r$ , admet pour ensemble de solutions un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n - r$ . ✎ THÉORÈME DU \*RANG.

✎ AFFINE (SOUS-ESPACE), HOMOGÈNE, PIVOT, RANG.

**Système différentiel** Système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{cases} x'_1 = \varphi_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = \varphi_n(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

♦ Un tel système est dit *autonome* si les fonctions  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  sont indépendantes de  $t$ . ✎ AUTONOME.

## SYSTÈME COMPLET D'ÉVÉNEMENTS

Un système complet d'événements est une famille finie  $(A_1, \dots, A_k)$  ou dénombrable  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'événements deux à deux incompatibles ( $A_i \cap A_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ ), dont la réunion est l'univers tout entier :  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ .

Exemple : Soit  $X$  une variable aléatoire discrète, pouvant prendre des valeurs  $x_k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ . Alors la famille  $([X = x_k])_{k \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements.

✎ FORMULE DES \*PROBABILITÉS TOTALES.

**Système quasi-complet d'événements** Famille finie  $(A_1, \dots, A_k)$  ou dénombrable  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'événements tels que  $P(A_i \cap A_j) = 0$  si  $i \neq j$  dont la réunion est presque certaine :  $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = 1$ .

REMARQUE : Les systèmes quasi-complets jouent le même rôle que les systèmes complets d'événements, au sens où ce qui est « en trop » ou ce qui « manque » est de probabilité nulle. Ainsi, la formule des probabilités totales est valide pour un système quasi-complet d'événements.

## T

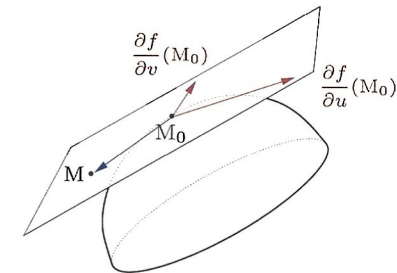
### TANGENT

**Plan tangent à une nappe paramétrée de l'espace** En un point régulier  $M_0$  d'une nappe paramétrée  $(U, f)$ , plan affine passant par  $M_0$  et dirigé par les vecteurs

$$\frac{\partial f}{\partial u}(M_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(M_0).$$

♦ Son équation est donc

$$\det \left( M_0 M, \frac{\partial f}{\partial u}(M_0), \frac{\partial f}{\partial v}(M_0) \right) = 0.$$



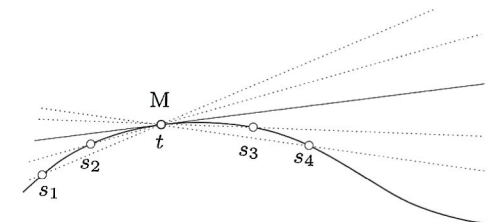
**Plan tangent à une surface implicite** En un point régulier  $M_0$  d'une surface d'équation cartésienne implicite  $F(x, y, z) = 0$ , plan affine passant par  $M_0$  et orthogonal au vecteur  $\text{grad } F(M_0)$ . ♦ C'est donc le plan d'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0.$$

### TANGENTE

**Tangente à un arc** Si  $\gamma$  est un arc et  $M = \gamma(t)$  un point régulier de  $\gamma$ , la droite portée par le vecteur  $T(t) = \gamma'(t)$  et passant par le point  $M$  est appelée tangente en  $M$ . ♦ C'est la droite \*limite de la famille de cordes  $(M, \gamma(s))$ , lorsque  $s$  tend vers  $t$ .

✎ VECTEUR TANGENT.



**Tangente à une courbe** Une courbe  $\Gamma$  du plan, d'équation implicite  $F(x, y) = 0$ , admet en un point régulier  $M_0$  une tangente, qui est la droite orthogonale à  $\text{grad } F(M_0)$  et passant par  $M_0$ , et d'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(M_0)(y - y_0) = 0.$$

☞ THÉORÈME DES FONCTIONS \*IMPLICITES.

**Fonction tangente** Fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$  par  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ . Cette fonction est continue sur tout intervalle de la forme  $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ , pour  $k \in \mathbb{Z}$ . ♦ Les autres propriétés de la fonction tangente (formules trigonométriques) sont appelées à l'entrée « trigonométrie » page 304.

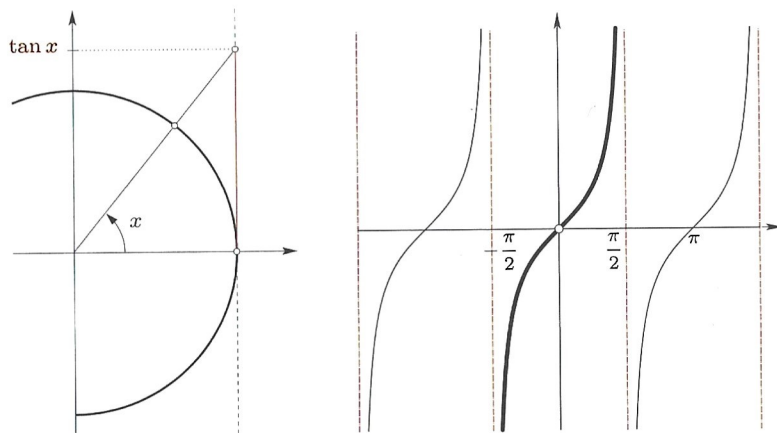


Fig. 98 — Construction géométrique de la tangente de  $x$ , et graphe de la fonction entre  $-\pi/2$  et  $3\pi/2$ .

**Fonction tangente hyperbolique** ☞ HYPERBOLIQUE.

## TAUTOLOGIE

Énoncé dont la valeur de vérité est toujours *vrai*, indépendamment de la valeur des prédicats qui la composent.

Exemple : L'énoncé «  $((P \Rightarrow Q) \text{ et } P) \Rightarrow Q$  » est une tautologie.

**TAYLOR** Brook (1685-1731)  
(Mathématicien anglais)

Les formules de Taylor sont des développements d'une fonction  $f$  à valeurs dans un espace vectoriel normé au voisinage d'un point, sous la forme générique

$$f(a + h) = T_n(h) + R_n(h),$$

où  $T_n$  est un polynôme, appelé *polynôme de Taylor* d'ordre  $n$ , et  $R_n$  est le *reste de Taylor*. Selon l'expression du reste, on a plusieurs « formules ».

**Formule de Taylor avec reste intégral** Formule donnant une expression *exacte* du reste sous forme d'une intégrale. ♦ Soit  $f : I \rightarrow E$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ , et de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  par morceaux sur  $I$ . Soit  $a \in I$ . Alors pour tout  $x \in I$ , on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

♦ On parle parfois de *formule de Taylor-Laplace*.

**Formules de Taylor-Young** Formules permettant d'écrire un développement limité de  $f(a+h)$ , c'est-à-dire donnant une domination du reste de Taylor. ♦ Soit  $f : I \rightarrow E$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$ , et soit  $a \in I$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n-1}$  et  $n$  fois dérivable en  $a$ , alors

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^n).$$

♦ Si  $f$  est une fonction de plusieurs variables, définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $\Omega \in \mathbb{R}^p$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^q$ , et si  $a \in \Omega$ , alors

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + df(a) \cdot h + o(\|h\|) \\ &= f(a) + \sum_{j=1}^p h_j D_j f(a) + o(\|h\|). \end{aligned}$$

Si elle est de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^p h_j D_j f(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} h_i h_j D_i D_j f(a) + o(\|h\|^2).$$

☞ HESSIENNE.

REMARQUE : Les formules de Taylor-Young nous renseignent, à  $n$  fixé, sur le comportement d'une fonction au voisinage de 0 : on l'approche par un polynôme, cette approximation n'étant valable que lorsque l'on fait tendre la variable vers 0. Notamment, fixer  $x$  et faire tendre  $n$  vers l'infini est un problème très différent : il s'agit cette fois de déterminer si  $f$  peut se développer en série entière. ☞ DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE.

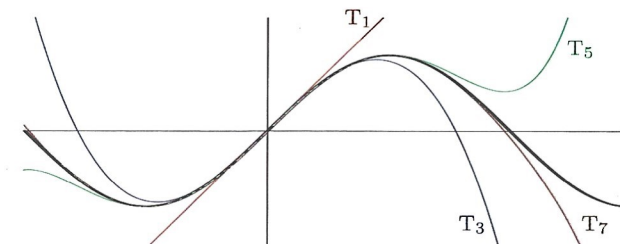


Fig. 99 — Les polynômes de Taylor d'ordre 1, 3, 5 et 7 associés à la fonction sinus.

**Égalité de Taylor-Lagrange** Formule donnant une expression exacte du reste de Taylor, mais sous une forme implicite (dépendant d'un réel *a priori* inconnu) ; cette expression n'est valable que pour des fonctions à valeurs *réelles*. ♦ Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est de

classe  $\mathcal{C}^n$ , et  $n+1$  fois dérivable sur  $I$ , et si  $a \in I$  alors, pour tout  $x \in I$ , il existe un réel  $c_x \in ]a; x[$  tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x).$$

Le reste de Taylor, écrit sous la forme précédente, est appelé *reste de Lagrange*. ♦ Ce résultat généralise la formule des accroissements finis.

**Inégalité de Taylor-Lagrange** Formule donnant une majoration du reste de Taylor.  
♦ Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ , et de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  par morceaux sur  $I$ , à valeurs dans un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ . Soit  $a \in I$ . Pour tout  $x \in I$ , en notant

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a),$$

on a la majoration

$$\|R_n(x)\| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a; x]} \|f^{(n+1)}(t)\|.$$

**Polynôme de Taylor** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ , son polynôme de Taylor d'ordre  $n$  en  $a$  est

$$T_k = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k.$$

**Série de Taylor** Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , sa série de Taylor en  $a$  est la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

REMARQUE : Rien ne dit, en général, que cette série converge ; ni, dans le cas où elle converge, que sa somme soit égale à  $f$  sur un quelconque intervalle : certaines fonctions sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sans être développables en série entière.

☛ DÉRIVÉE, DÉVELOPPABLE EN SÉRIE ENTIÈRE, DIFFÉRENTIELLE.

**TCHEBYCHEV** *Pafnouti Lvovitch* (1821-1894)  
(Mathématicien russe)

**Abscisses de Tchebychev** Soit  $n$  un entier naturel non nul, et notons  $T_n$  le  $n$ -ième polynôme de Tchebychev. Les abscisses de Tchebychev sont les racines  $(a_0, \dots, a_{n-1})$  de  $T_n$  ; elles sont réelles et toutes dans  $] -1 ; +1 [$ , et sont données par la formule

$$\forall k \in [1; n] \quad a_k = \operatorname{Arccos} \left( \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right).$$

REMARQUE : Ces abscisses vérifient plusieurs propriétés remarquables. Pour tout choix de réels  $-1 \leq x_{n-1} < \dots < x_2 < x_1 \leq 1$ , on a

$$\sup_{[-1; +1]} \left| \prod_{k=1}^n (X - a_k) \right| \leq \sup_{[-1; +1]} \left| \prod_{k=1}^n (X - x_k) \right|.$$

♦ Si l'on désire interpolier (par des polynômes de Lagrange) une fonction  $f$  définie sur  $[-1; +1]$  en ne conservant que ses valeurs en  $n$  points, le choix des points d'interpolation

assurant la meilleure interpolation quand  $n \rightarrow \infty$  est celui des abscisses de Tchebychev. Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $[-1; +1]$ , et si l'on note  $L_n$  le polynôme interpolateur de degré  $n$  associé aux abscisses de Tchebychev, alors la suite  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $f$ . Au contraire, un autre choix de points d'interpolation (comme des points équidistants) risque de faire diverger  $\|f - L_n\|_\infty$ . ☛ LAGRANGE, RUNGE.

**Polynômes de Tchebychev** Famille de polynômes définis par

$$T_n = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n-1/2}].$$

♦ Ils sont orthogonaux pour le produit scalaire

$$\langle P|Q \rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{P(t) Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

et leur norme vaut  $\|T_n\|^2 = \pi/2$ . ☛ POLYNÔMES ORTHOGONAUX.

REMARQUE : Ils vérifient  $T_0 = 1$ ,  $T_1 = X$  et la relation de récurrence  $T_{n+1} = 2X T_n - T_{n-1}$ . ♦ Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n$  a la parité de  $n$  et son coefficient dominant est  $2^n$ . ♦ Ils vérifient enfin la relation fondamentale  $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $\theta \in \mathbb{R}$ . ♦ Les premiers polynômes de Tchebychev sont

$$T_0 = 1 \quad T_1 = X \quad T_2 = 2X^2 - 1 \quad T_3 = 4X^3 - 3X \quad T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$$

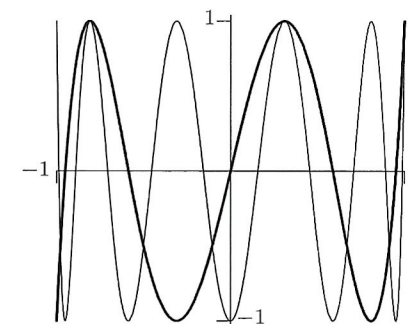


Fig. 100 — Les polynômes  $T_5$  (en gras) et  $T_{10}$ .

## THÉORÈME

Énoncé démontrable d'une théorie (c'est-à-dire d'un système de symboles, d'axiomes et de règles permettant de déduire de nouvelles propositions à partir des anciennes et des axiomes).

## TIROIRS

**Principe des tiroirs de Dirichlet** Supposons que l'on ait  $k$  tiroirs, et  $mk+1$  chaussettes rangées dans ces tiroirs. Alors, au moins un des tiroirs contient au moins  $m+1$  chaussettes.

REMARQUE : Dans les pays anglo-saxons, les chaussettes sont remplacées par des *pigeons* et les tiroirs par des *pigeonholes*. Le lemme des tiroirs s'appelle, là-bas, *pigeonhole principle*.

## TOPOLOGIE

**Topologie sur un espace** Soit  $E$  un ensemble (appelé espace). On définit une topologie sur  $E$  en donnant un ensemble  $\mathcal{O}$  de parties de  $E$  vérifiant les axiomes suivants :

- la réunion (finie ou infinie) d'éléments de  $\mathcal{O}$  est un élément de  $\mathcal{O}$  ;
- l'intersection d'une famille finie d'éléments de  $\mathcal{O}$  est un élément de  $\mathcal{O}$  ;
- $\emptyset \in \mathcal{O}$  et  $E \in \mathcal{O}$ .

Les éléments de  $\mathcal{O}$  sont appelés les *ouverts* de  $E$ .

**REMARQUE** : Les espaces métriques et, notamment, les espaces vectoriels normés, sont des cas particuliers d'espaces topologiques ; leur topologie est construite à partir des boules ouvertes.

**Topologie produit** Soient  $(E, N)$  et  $(E', N')$  deux espaces vectoriels normés. La  $*$ norme produit  $\mathcal{N}'$  définit une topologie sur  $E \times E'$ , appelée topologie produit.

**Topologie relative** Soit  $A$  une partie de  $E$ , et  $a \in A$ . Une partie  $V$  de  $A$  est un *voisinage relatif* à  $A$  de  $a \in A$  s'il existe un voisinage  $W$  de  $a$  tel que  $V = W \cap A$ .

♦ Une partie  $U$  est un *ouvert relatif* à  $A$  s'il existe un ouvert  $W$  tel que  $U = W \cap A$ .

♦ Une partie  $F$  est un *fermé relatif* à  $A$  s'il existe un fermé  $G$  tel que  $F = G \cap A$ .

## TOPOLOGIQUE

**Caractérisation topologique de la continuité** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés. Soient  $A$  une partie non vide de  $E$  et  $f : A \rightarrow F$  une application. Alors  $f$  est continue si et seulement si l'une des deux propositions équivalentes suivantes est vérifiée :

- l'image réciproque de tout fermé de  $F$  est un fermé relatif de  $A$  ;
- l'image réciproque de tout ouvert de  $F$  est un ouvert relatif de  $A$ .

**Caractérisation topologique de la compacité** Une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé est compacte si et seulement si elle vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

**Espace topologique** Espace  $E$  muni d'une topologie.

☞ SÉPARÉ.

## TORSION

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  un arc paramétré de l'espace euclidien orienté, de classe  $\mathcal{C}^3$ , paramétré par une abscisse curviligne. Si l'on note  $(M(s), T(s), N(s), B(s))$  le repère de Frenet en un point  $M(s)$ , la torsion de  $\gamma$  en  $M(s)$  est

$$\tau(s) = B(s) \cdot \frac{dN}{ds}(s).$$

- ♦ Si la torsion  $\tau(s)$  est non nulle, son inverse  $1/\tau(s)$  est appelé *rayon de torsion*.
- ♦ Les dérivées des vecteurs du repère de Frenet sont données par les formules de Frenet dans l'espace :

$$T' = cT \quad N' = -cT + \tau B \quad B' = -\tau N.$$

☞ REPÈRE DE \*FRENET (DANS L'ESPACE).

## TOTAL

**Ordre total** ☞ ORDRE.

**Système total** Famille  $(e_i)_{i \in I}$  d'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  qui engendre un espace  $F = \text{Vect}\{e_i ; i \in I\}$  dense dans  $E$ .

**REMARQUE** : Cette propriété généralise la notion de famille génératrice. Rappelons qu'une famille  $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$  est génératrice si tout élément  $x$  de  $E$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire *finie* d'éléments de  $(b_i)_{i \in I}$ , ce qui est une contrainte très forte. Avec un système total, on demande simplement que les combinaisons linéaires (toujours finies) de  $(e_i)_{i \in I}$  puissent approcher  $x$  avec une précision arbitrairement grande. ♦ Dans un espace de Hilbert, la famille  $(e_i)_{i \in I}$  est un système total si et seulement si  $F^\perp = \{0\}$ .

**Exemple** : Dans l'espace  $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , la famille  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas génératrice (la fonction  $x \mapsto e^x$  n'est pas un polynôme, par exemple), mais elle engendre l'espace  $\mathbb{R}[X]$  des fonctions polynomiales, qui est dense dans  $(E, \|\cdot\|_\infty)$  en vertu du premier théorème de Weierstrass. La famille  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc un système total.

☞ BASE \*HILBERTIENNE.

**Formule des probabilités totales** ☞ PROBABILITÉS.

## TRACE

**Trace d'une matrice carrée** Somme de ses éléments diagonaux : si  $A = (a_{ij})_{ij}$  est carrée d'ordre  $n$ , alors

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

♦ L'application « trace » est linéaire. ♦ De plus, pour toutes matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a  $\text{tr } AB = \text{tr } BA$ . ♦ Notamment, si  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , on a  $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr } A$  : la trace est un  $*$ invariant de similitude.

**REMARQUE** : Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice. Soit  $(B_1, \dots, B_n)$  une famille orthonormée de vecteurs de  $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ . Alors

$$\text{tr } A = \sum_{k=1}^n {}^t B_k A B_k.$$

**Trace d'un endomorphisme** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On appelle trace de l'endomorphisme  $u$  la trace de sa matrice représentative dans n'importe quelle base.

**REMARQUE** : Si  $E$  est un espace vectoriel euclidien et si  $(b_1, \dots, b_n)$  est une base orthonormée de  $E$ , alors

$$\text{tr } u = \sum_{k=1}^n \langle b_k | u(b_k) \rangle.$$

## TRAJECTOIRE

Solution d'un système différentiel autonome. ☞ PHASE.

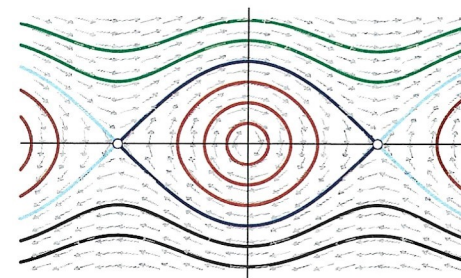


Fig. 101 — Quelques trajectoires du pendule pesant  $\ddot{x} = y$ ,  $\dot{y} = \omega^2 \sin x$ . Les trajectoires rouges sont fermées. Les trajectoires bleues n'atteignent les points  $(\pm\pi, 0)$  qu'au bout d'un temps infini. Les trajectoires vertes et noires correspondent à la trajectoire d'un pendule ayant une énergie suffisante pour tourner indéfiniment dans le même sens.

## TRANSCENDANT

**Nombre transcendant** Nombre (réel ou complexe) qui n'est pas algébrique, c'est-à-dire qui n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers (ou rationnels).

*Exemples :*  $\pi$  et  $e$  sont transcendants (démonstrations dues respectivement à Lindemann et Hermite). ♦ On sait qu'au moins un des nombres  $\pi e$  et  $\pi + e$  est transcendant. ♦ Si  $\alpha$  est algébrique, alors  $e^\alpha$  est transcendant. ✎ HERMITE. ♦ Quant à la constante  $\gamma$  d'Euler-Mascheroni, on ignore à l'heure actuelle si elle est algébrique ou transcendante — on ne sait même pas si elle est rationnelle ou non ! ♦ Bien qu'il ait fallu du temps et des efforts pour prouver la transcendance du premier exemple connu (✎ LIOUVILLE.), en réalité, « la plupart » des nombres sont transcendants, puisque l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

✎ EXTENSION, LIOUVILLE.

## TRANSCONJUGUÉE

Matrice transposée et conjuguée d'une matrice donnée :  $M^* = {}^t\overline{M}$ . ♦ On dit également matrice *adjointe*.

✎ ADJOINT, NORMALE.

## TRANSFERT (FORMULE DE)

Formule permettant de calculer l'espérance de l'image  $\varphi(X)$  d'une variable aléatoire. ♦ Dans ce qui suit, on adopte la convention suivante : si  $X$  est une variable aléatoire et  $\varphi : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $X(\Omega)$ , on note  $\varphi(X)$  la composée  $\varphi \circ X$ , c'est-à-dire la fonction  $\varphi(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(X) : \omega \mapsto \varphi(X(\omega))$ .

**Cas discret** Si  $X$  est une variable aléatoire discrète et si l'on note  $X(\Omega) = \{x_k ; k \in \mathbb{N}\}$ , alors la variable  $\varphi(X)$  admet une espérance si et seulement si la série  $\sum \varphi(x_k) \mathbf{P}[X = x_k]$  converge absolument ; en cas de convergence, son espérance est

$$\mathbf{E}(\varphi(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(x_k) \mathbf{P}[X = x_k].$$

**Cas d'une variable aléatoire à densité** Si  $X$  admet une densité  $f$ , alors  $\varphi(X)$  admet une espérance si et seulement si la fonction  $\varphi f$  est intégrable ; dans ce cas, l'espérance de  $\varphi(X)$  est

$$\mathbf{E}(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx.$$

**Cas d'un couple discret** Si  $(X, Y)$  est un couple discret, et si  $\psi$  est une fonction de deux variables, définie au moins sur  $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ , alors l'espérance de  $\psi(X, Y)$ , lorsque la série double suivante converge absolument, est

$$\mathbf{E}(\psi(X, Y)) = \sum_{k,l} \psi(x_k, y_l) \mathbf{P}([X = x_k] \cap [Y = y_l])$$

**Cas d'un couple à densité** Si  $(X, Y)$  est un couple admettant une densité  $\mu(x, y)$ , et si  $\psi$  est une fonction de deux variables, définie au moins sur  $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ , alors l'espérance de  $\psi(X, Y)$ , lorsque l'intégrale suivante converge absolument, est

$$\mathbf{E}(\psi(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y) \mu(x, y) dx dy.$$

## TRANSFORMATION

Synonyme d'application, spécialement en géométrie ou en analyse fonctionnelle.

✎ FOURIER, LAPLACE.

## TRANSITION

**Matrice de transition** Considérons un système pouvant se trouver dans des états  $1, \dots, n$ . Il évolue en temps discret : on note  $X_k$  son état à l'instant  $k$ . À chaque étape, notons  $p_{ij}$  la probabilité qu'il passe à l'état  $X_{k+1} = j$  sachant que  $X_k = i$ , les coefficients  $p_{ij}$  étant supposés indépendants du temps  $k$ . La matrice  $T = (p_{ij})_{i,j}$  est appelée matrice de transition du système. ♦ Tous ses coefficients sont positifs et la somme des coefficients sur chaque ligne vaut 1 (la matrice est *stochastique*). ♦ En particulier, le vecteur colonne ne comportant que des 1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. ♦ Si l'on note

$$Y_k = \begin{pmatrix} \mathbf{P}[X_k = 1] \\ \vdots \\ \mathbf{P}[X_k = n] \end{pmatrix},$$

alors la formule des probabilités totales s'écrit  $Y_{k+1} = {}^tT Y_k$  ou encore, après transposition,  ${}^tY_{k+1} = {}^tY_k T$ , ce qui mène à  ${}^tY_k = {}^tY_0 T^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

✎ CHAÎNE DE MARKOV.

## TRANSITIVE

Une opération binaire  $\mathcal{R}$  est transitive si, pour tous  $x, y, z$ , les relations  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z$  impliquent la relation  $x\mathcal{R}z$ .

✎ CLASSE D'ÉQUIVALENCE, RELATION, ORDRE.

## TRANSPOSÉE

**Transposée d'une matrice** Si  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , la transposée de  $M$  est la matrice  ${}^tM$  de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  de coefficients  $({}^tM)_{ij} = (M)_{ji}$ .

✎ ADJOINT, SYMÉTRIQUE.

**Transposée d'une application  $f$**  Nom parfois donné à la fonction  $\tilde{f} : x \mapsto f(-x)$ .

## TRANSPOSITION

Permutation laissant invariants tous les éléments d'un ensemble  $E$ , sauf deux. ♦ Une transposition  $\sigma$  « échange » donc deux éléments  $a$  et  $b$  de  $E$  :  $\sigma(a) = b$ ,  $\sigma(b) = a$  et  $\sigma(x) = x$  pour tout  $x \in E \setminus \{a, b\}$ . ♦ On note symboliquement  $(a, b)$ , ou parfois  $\tau_{a,b}$ , une telle transposition.

REMARQUE : Toute permutation se décompose (de manière non unique) en produit de transpositions. La parité du nombre de transpositions ne dépend pas du choix de cette décomposition. ✎ SIGNATURE.

## TRANSVECTION

**Transvection d'un espace vectoriel** Élément  $\tau$  du groupe  $GL(E)$  qui laisse invariants les vecteurs d'un hyperplan  $H$  et tel que, pour tout  $x \in E$ , le vecteur  $\tau(x)$  vérifie  $\tau(x) - x \in H$ .

REMARQUE : Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie  $n$ , l'ensemble des transvections engendre le sous-groupe spécial linéaire  $SL(E)$  des automorphismes de déterminant 1.

✎ UNIMODULAIRE.

**Matrice de transvection** Matrice de la forme  $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ , pour  $i \neq j$ .  
 ♦ Ces matrices permettent d'effectuer des opérations élémentaires sur un système d'équations. Plus précisément, la matrice  $T_{i,j}(\lambda)$  permet, par multiplication à gauche, d'effectuer sur une matrice  $A$  l'opération  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ . ♦ L'inverse de la matrice  $T_{i,j}(\lambda)$  est la matrice  $T_{i,j}(-\lambda)$ .

**REMARQUE** : Une petite modification de la méthode du \*pivot de Gauss permet de montrer que les matrices de transvections engendrent  $SL_n(\mathbb{R})$  : toute matrice  $M$  unimodulaire ( $\det M = +1$ ) peut s'écrire sous la forme  $M = T_1 T_2 \cdots T_k$  d'un produit de matrices de transvections.

☞ OPÉRATION \*ÉLÉMENTAIRE, PIVOT.

## TRAPÈZE

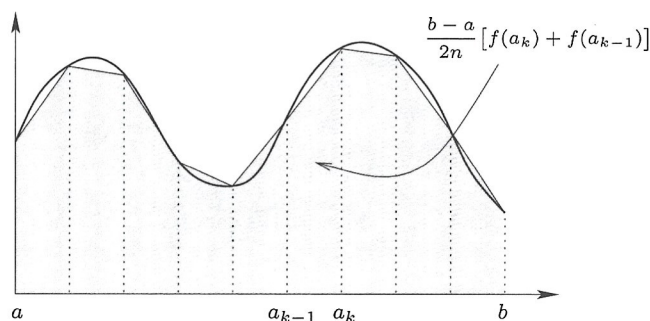
**Méthode des trapèzes** Méthode d'approximation numérique de l'intégrale  $\int_a^b f$  d'une fonction continue sur un segment  $[a; b]$ . Elle consiste à calculer, pour un entier  $n$  donné, la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{2n} [f(a_k) + f(a_{k-1})],$$

où la subdivision régulière  $(a_0, \dots, a_n)$  de  $[a; b]$  est définie par

$$\forall k \in [0; n] \quad a_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Elle revient donc à interpoler, sur chaque segment  $[a_{k-1}; a_k]$ , la fonction  $f$  par une fonction affine (polynôme de degré  $\leq 1$ ). En comparaison, la méthode des sommes de Riemann consiste en une interpolation par un polynôme constant.



**REMARQUE** : Si la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , la différence entre l'intégrale de  $f$  et son approximation par la méthode des trapèzes utilisant une subdivision régulière de pas  $(b-a)/n$  est

$$\int_a^b f - S_n = -\frac{(b-a)}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Notamment, la méthode des trapèzes converge rapidement dans le calcul des fonctions  $(b-a)$ -périodiques, pour lesquelles le premier terme est nul. Cela se comprend ainsi : l'erreur pour chaque trapèze est positive lorsque la fonction est localement convexe, et négative si elle est localement concave. Une fonction périodique alternera les deux comportements.

☞ SOMMES DE \*RIEMANN, SIMPSON.

## TRIANGLE

**Droite d'Euler d'un triangle** Soit  $(ABC)$  un triangle non plat du plan euclidien. Notons  $\Omega$  le point de concours des médiatrices, c'est-à-dire le centre du cercle circonscrit

au triangle. Notons  $G$  l'isobarycentre du triangle, c'est-à-dire le point de concours des médianes. Notons enfin  $H$  le point de concours des hauteurs, c'est-à-dire l'orthocentre du triangle.

Alors  $H$ ,  $\Omega$  et  $G$  sont alignés et, plus précisément,  $\Omega H = 3 \Omega G$ . Si  $(ABC)$  n'est pas équilatéral, ces points ne sont pas confondus : la droite passant par ces points est appelée droite d'Euler du triangle.

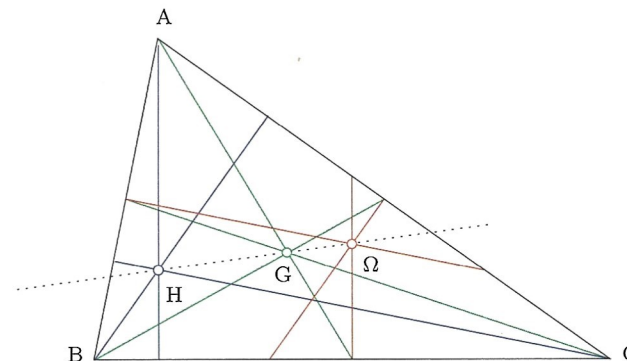


Fig. 102 — La droite d'Euler (en pointillés) relie le point d'intersection  $H$  des hauteurs (en bleu), celui  $G$  des médianes (en vert) et celui  $\Omega$  des médiatrices (en rouge).

## TRIANGULAIRE (INÉGALITÉ)

**Pour des scalaires** Pour tous  $a, b$  réels ou complexes, on a

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

On en déduit une seconde inégalité triangulaire :  $||a| - |b|| \leq |a \pm b|$ .

**REMARQUE** : Si  $a$  et  $b$  sont des complexes non nuls, il n'y a égalité que si  $b/a$  est un réel positif, c'est-à-dire si  $a$  et  $b$  ont même argument.

**Pour des vecteurs** Pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  d'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ , on a

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{et} \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x \pm y\|.$$

**REMARQUE** : Si  $x \neq 0$ , il n'y a égalité que s'il existe un réel  $\lambda > 0$  tel que  $y = \lambda x$ .

**Pour une somme** Soient  $x_1, \dots, x_n$  des réels ou des complexes ; alors

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

**REMARQUE** : Il n'y a égalité que s'il existe un réel  $\theta$  tel que, pour tout  $i \in [1; n]$ , on ait  $x_i = |x_i| e^{i\theta}$ .

**Pour une série** Soit  $\sum u_n$  une série numérique absolument convergente. Alors  $\sum u_n$  converge et

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

REMARQUE : Il n'y a égalité que s'il existe un réel  $\theta$  tel que, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on ait  $x_i = |x_i| e^{i\theta}$ .

**Pour une intégrale** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux et intégrable sur  $I$ . Alors

$$\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt.$$

REMARQUE : Il n'y a égalité que s'il existe un réel  $\theta$  tel que, pour tout  $t \in I$  (sauf peut-être un nombre fini de points), on ait  $f(t) = |f(t)| e^{i\theta}$ .

**Pour l'espérance** Soit  $X$  une variable aléatoire admettant une espérance. Alors  $|X|$  admet une espérance et  $|\mathbf{E}(X)| \leq \mathbf{E}(|X|)$ .

## TRIBU

☞  $\sigma$ -ALGÈBRE.

## TRIGONALISABLE

**Matrice trigonalisable** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on dit que  $A$  est trigonalisable (ou *triangularisable*) s'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que  $P^{-1}AP$  soit triangulaire supérieure.

**Endomorphisme trigonalisable** On dit que  $u \in \mathcal{L}(E)$  est trigonalisable s'il existe une base  $\mathcal{B}$  dans laquelle la matrice représentative de  $u$  soit triangulaire supérieure.

REMARQUES : Un endomorphisme ou une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. ♦ Notamment, dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , toutes les matrices sont trigonalisables; si  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, tout endomorphisme de  $E$  est trigonalisable.

♦ Un endomorphisme ou une matrice est trigonalisable si, et seulement si, il/elle admet un polynôme annulateur scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

## TRIGONOMÉTRIE

### Formules trigonométriques

#### Addition des angles

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b & \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{aligned}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta & \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 3\theta &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta & \sin 3\theta &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta. \end{aligned}$$

#### Linéarisation

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} (\cos 3\theta + 3 \cos \theta) \quad \sin^3 \theta = \frac{1}{4} (3 \sin \theta - \sin 3\theta)$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

#### Factorisation

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \left( \frac{p+q}{2} \right) \cos \left( \frac{p-q}{2} \right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \left( \frac{p-q}{2} \right) \cos \left( \frac{p+q}{2} \right)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \left( \frac{p+q}{2} \right) \cos \left( \frac{p-q}{2} \right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \left( \frac{p-q}{2} \right) \sin \left( \frac{p+q}{2} \right)$$

#### Arc moitié

$$t = \tan \frac{\theta}{2} \quad \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

## TRINÔME

Polynôme de degré 2, donc de la forme  $P = aX^2 + bX + c$  avec  $a \neq 0$ .

## TYPE FINI

Un groupe est de type fini s'il existe une partie finie  $X$  qui engendre ce groupe.

Exemple :  $(\mathbb{Z}, +)$  est un groupe de type fini, engendré par 1.

☞ PARTIE \*GÉNÉRATRICE D'UN GROUPE.