

V

VALEUR

Valeur d'adhérence Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Un vecteur $a \in E$ est dit valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a .

Exemples : La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ admet -1 et 1 comme valeurs d'adhérence. ♦ La suite de terme général $u_n = \sin n$ admet tous les réels de $[-1; +1]$ comme valeurs d'adhérence.

☞ ADHÉRENCE, COMPACT, EXTRAITE.

Valeur décimale approchée par défaut/excès Soit x un réel positif. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = E(10^n x)$. Alors $a_n/10^n$ est la valeur (décimale) approchée par défaut de x à 10^{-n} près, et $(1 + a_n)/10^n$ sa valeur approchée par excès. ♦ Les suites des valeurs approchées par défaut et par excès de x sont adjacentes et ont pour limite x . Elles réalisent donc des suites d'approximations rationnelles d'un réel donné.

Exemple : La valeur approchée par défaut de π à 10^{-4} près est 3,1415 et celle par excès est 3,1416.

REMARQUE : La définition utilisée ici de valeur approchée par excès est simple, mais pas forcément la plus naturelle. Ainsi, la valeur décimale approchée par excès à 10^{-3} de $x = 6,513$ est 6,514. On utilise parfois la notion de partie entière supérieure.

☞ DENSE, CARACTÉRISATION *SÉQUENTIELLE DE LA DENSITÉ.

Valeur propre d'un endomorphisme Soit E un espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . Un scalaire λ est dit valeur propre de u si $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injective, c'est-à-dire $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0\}$, ou encore, s'il existe un vecteur x non nul tel que $u(x) = \lambda x$. ♦ Si E est de dimension finie, cette propriété est équivalente aux propriétés suivantes :

- i) $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas inversible;
- ii) λ est racine du polynôme caractéristique de u ;
- iii) λ est racine du polynôme minimal de u .

☞ DIAGONALISABLE, POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE, POLYNÔME MINIMAL, SOUS-ESPACE PROPRE, SPECTRE, VECTEUR PROPRE.

Valeur propre d'une matrice carrée Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est dit valeur propre de A si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible. ♦ Cette propriété est équivalente aux propriétés suivantes :

- i) il existe un vecteur colonne X non nul tel que $AX = \lambda X$;
- ii) $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$;
- iii) $\det(A - \lambda I_n) = 0$;
- iv) λ est racine du polynôme minimal de A .

Valeur spectrale Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur spectrale de u si $u - \lambda \text{Id}$ est non inversible.

REMARQUE : En dimension finie, les notions de valeur propre et de valeur spectrale coïncident. En dimension quelconque, toute valeur propre est valeur spectrale, mais la réciproque n'est pas vraie. Ainsi, à toute fonction $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$, associons la fonction $\varphi(f) = g$ définie par $g(x) = \int_0^x f$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors φ est injective, mais non surjective, car $\varphi(f)$ est toujours de classe $\mathcal{C}^1$. Ainsi, 0 n'est pas valeur propre, mais est valeur spectrale.

Théorème des valeurs intermédiaires Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie connexe par arcs de E , et soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(A)$

est un intervalle. ♦ Notamment, si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue, et si on note $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$, alors toute valeur intermédiaire entre α et β est atteinte par f .

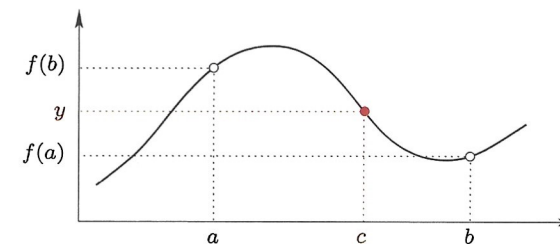


Fig. 103 — Théorème des valeurs intermédiaires. Une valeur intermédiaire y , comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, est nécessairement atteinte : il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = y$. (La valeur y peut également être atteinte ailleurs...)

VANDERMONDE *Alexandre-Théophile* (1735-1796)
(Mathématicien et chimiste français)

Déterminant de Vandermonde Si $(a_1, \dots, a_n)$ sont des réels ou des complexes, le déterminant de Vandermonde associé à $(a_1, \dots, a_n)$ est

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Il est égal à

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

♦ Il est donc non nul si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

Formule de Vandermonde Formule combinatoire : si n , m et r sont des entiers et si $r \leq n + m$, alors

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{n}{k} \binom{m}{r-k}.$$

Exemple : Choisir r individus dans une population de n filles et de m garçons revient à choisir k garçons et $r - k$ filles, le nombre k pouvant varier entre 0 et r .

REMARQUE : Si $m = 1$, la plupart des termes de la somme s'annulent, et on retrouve la formule de *Pascal.

VARIABLE ALÉATOIRE

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Une *variable aléatoire réelle* est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x , l'ensemble $[X \leq x] = \{\omega \in \Omega ; X(\omega) \leq x\}$ est un événement :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad [X \leq x] \in \mathcal{F}.$$

REMARQUES : Puisque les intervalles $]-\infty; x]$ engendrent les boréliens, cela revient à : l'image réciproque par X de tout borélien de $\mathbb{R}$ est un événement. ♦ Cette propriété est, *en pratique, toujours vérifiée*. Pour le commun des mortels, une variable aléatoire réelle est donc simplement une application de Ω dans $\mathbb{R}$. ♦ On définit également des variables aléatoires complexes, dont les parties réelle et imaginaire sont des variables aléatoires réelles.

Variable aléatoire finie Variable aléatoire X telle que $X(\Omega)$ est un ensemble fini.

Variable aléatoire continue Variable aléatoire dont l'image est un intervalle, ou une réunion d'intervalles.

Variable aléatoire à densité Synonyme de *variable aléatoire absolument continue*. Variable aléatoire telle qu'il existe une fonction f positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge, et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathbf{P}[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

☞ DENSITÉ, LOI.

Variable aléatoire discrète Variable aléatoire X dont l'image $X(\Omega)$ est un ensemble réel discret (c'est-à-dire fini ou dénombrable).

VARIANCE

La variance d'une variable aléatoire mesure l'écart quadratique moyen à sa moyenne.

♦ On dit qu'une variable aléatoire X admet une variance si X^2 admet une espérance; dans ce cas, X admet également une espérance, comme le prouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et on définit sa variance par

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^2].$$

♦ En d'autres termes, la variance de X est égale à son * moment centré d'ordre 2, lorsqu'il existe. ♦ Si X est une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $\{x_k; k \in \mathbb{N}\}$ avec les probabilités $p_k = \mathbf{P}[X = x_k]$, alors X admet une variance si et seulement si la série $\sum x_k^2 p_k$ converge. On a alors

$$\mathbf{V}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} x_k^2 p_k - \mathbf{E}(X)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x_k^2 p_k - \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_k p_k \right)^2.$$

♦ Si X est une variable aléatoire admettant une densité f , elle admet une variance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ est convergente. Dans ce cas,

$$\mathbf{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mathbf{E}(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2.$$

☞ ESPÉRANCE, KÖNIG, MOMENTS.

VARIATION

Méthode de variation de la constante Dans le cas d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 résolue

$$x' + a(t)x = b(t),$$

si l'on connaît une solution φ non nulle de l'équation homogène associée $x' + ax = 0$, alors φ ne s'annule pas sur I et une solution particulière de l'équation complète peut

être cherchée sous la forme $x(t) = \lambda(t)\varphi(t)$. Injecter cette forme dans (E) permet de calculer λ' puis, par primitivation, λ .

REMARQUE : Ici, la « constante » λ est une fonction $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$. C'est ce qui a fait dire à Laplace qu'il faisait « varier la constante », célèbre oxymoron qui laisse perplexe plus d'un étudiant à la première occurrence.

Méthode de variation des constantes On considère l'équation différentielle linéaire

$$x' = a \cdot x + b \quad (\text{E})$$

et son équation homogène associée

$$x' = a \cdot x, \quad (\text{H})$$

où x est une fonction inconnue à valeurs dans $E \simeq \mathbb{R}^n$, $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ est continue, et $b : I \rightarrow E$ est également continue. Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de l'équation homogène (H); on peut alors décomposer b dans la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, les coordonnées étant des fonctions définies sur I . Si l'on note cette décomposition $b(t) = \sum_{k=1}^n \beta_k(t) \varphi_k(t)$, alors une fonction $\psi(t) = \sum_{k=1}^n B_k(t) \varphi_k(t)$ est solution particulière de l'équation (E) si et seulement si $B'_k = \beta_k$ pour $j = 1, \dots, n$.

♦ *D'un point de vue pratique*, il est parfois malaisé de décomposer le second membre b dans la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. On se donne plutôt une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E (en général, la base canonique de $\mathbb{R}^n$). Notons $\mathcal{W} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ la matrice wronskienne dans la base $\mathcal{B}$, $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(a)$, $B = \text{mat}_{\mathcal{B}}(b)$ et décomposons

$$b(t) = \sum_{k=1}^n b_k(t) e_k \quad \text{et} \quad \psi(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k(t) \varphi_k(t)$$

ou, matriciellement,

$$\Psi(t) = \mathcal{W}(t) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{pmatrix} = \mathcal{W}(t) \cdot \Lambda(t).$$

Alors, $\Psi' = \mathcal{W}'\Lambda + \mathcal{W}\Lambda' = A\mathcal{W}\Lambda + \mathcal{W}\Lambda' = A\Psi + \mathcal{W}\Lambda'$; ainsi, ψ est solution de (E) si et seulement si les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifient $\mathcal{W}\Lambda' = B$, c'est-à-dire

$$\mathcal{W}(t) \cdot \begin{pmatrix} \lambda'_1(t) \\ \vdots \\ \lambda'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

REMARQUE : Dans le cas d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2

$$x'' + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$$

où a , b et c sont continues, une première étape est de vectoriser cette équation :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \quad X' = AX + B \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}.$$

Si l'on connaît un système fondamental de solutions (u, v) de l'équation homogène associée $x'' + ax' + b = 0$, la méthode de variation des constantes permet de chercher une solution sous la forme

$$\Phi(t) = \lambda(t)U(t) + \mu(t)V(t) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix},$$

où les fonctions λ et μ vérifient

$$\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \mathcal{W}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

⚡ ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU 1^{ER} ORDRE, SYSTÈME FONDAMENTAL DE SOLUTIONS, WRONS-KIEN.

VECT

⚡ SOUS-ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ.

VECTEUR

Vecteur d'un espace vectoriel E Élément de l'espace vectoriel E, par opposition aux *scalaires*, qui sont les éléments du corps de base.

Vecteur colonne Un vecteur colonne à n lignes est une $(n, 1)$ -matrice. ♦ Ses coefficients sont généralement représentés avec un seul indice :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

♦ Ils servent, notamment, à représenter matriciellement un vecteur dans une base donnée.

⚡ MATRICE REPRÉSENTATIVE D'UN VECTEUR.

Vecteur ligne Un vecteur ligne à n colonnes est une $(1, n)$ -matrice. ♦ Ses coefficients sont généralement représentés avec un seul indice :

$$L = (\ell_1 \quad \cdots \quad \ell_n).$$

♦ Les vecteurs lignes servent, notamment, à représenter matriciellement une forme linéaire.

⚡ MATRICE REPRÉSENTATIVE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE.

Vecteur tangent En un point régulier $M = \gamma(t)$ d'un arc paramétré, un vecteur tangent est donné par $\gamma'(t)$. Le vecteur tangent unitaire est

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|_2}.$$

⚡ PARAMÉTRAGE NORMAL.

Vecteur aléatoire Un couple (X, Y) de variables aléatoires est parfois appelé *vecteur aléatoire* (à deux composantes). On peut généraliser à un n -uplet $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires.

VECTEUR PROPRE

Vecteur propre « géométrique » Soit E un espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Un vecteur propre de u est un vecteur x de E, *non nul*, tel que $u(x)$ soit colinéaire à x : il existe un scalaire λ tel que $u(x) = \lambda x$.

Exemple : Les vecteurs non nuls du noyau de u sont des vecteurs propres (associés à la valeur propre 0). ♦ Dans le plan $E = \mathbb{R}^2$, une rotation d'angle $\pi/2$ n'admet aucun vecteur propre.

Vecteur colonne propre Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur (colonne) propre de A associé à la valeur propre λ si $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$.

♦ Si $(X_1, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de colonnes propres pour A, alors la matrice P obtenue en concaténant ces n colonnes est une matrice diagonalisante pour A, c'est-à-dire que $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Vecteur ligne propre On appelle ligne propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toute ligne *non nulle* de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ pour laquelle il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $LA = \lambda L$. ♦ Le scalaire λ est alors élément du spectre de A.

REMARQUE : Si L est une ligne propre de A, alors tL est un vecteur colonne propre pour tA . Puisque A et tA ont même spectre, A admet une ligne propre pour une valeur λ donnée si et seulement si elle admet un vecteur colonne propre pour cette même valeur. Cependant, il n'y a pas d'autre rapport entre les lignes propres et les colonnes propres.

⚡ VALEUR PROPRE, SOUS-ESPACE PROPRE, DIAGONALISABLE.

VECTORIEL

⚡ ESPACE VECTORIEL, SOUS-ESPACE VECTORIEL.

VIDE

Ensemble vide Unique ensemble, noté $\emptyset$ ne contenant aucun élément : pour tout x , $x \notin \emptyset$.

VISSAGE

Isométrie directe de l'espace affine $\mathbb{R}^3$, composée d'une rotation autour d'un axe Δ , et d'une translation de vecteur u faisant partie de la direction de Δ .

REMARQUE : La rotation et la translation définissant le vissage commutent.

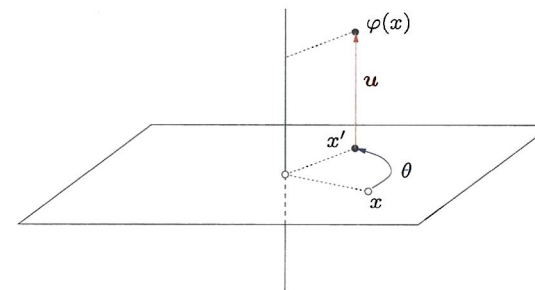


Fig. 104 — Vissage φ d'angle θ selon un axe Δ , et de vecteur u . Le point x est envoyé, par la rotation d'angle θ autour de Δ en le point x' ; celui-ci est envoyé par la translation en $\varphi(x) = x' + u$.

VOISINAGE

Voisinage d'un point Soit E un espace vectoriel normé. Soient x un point de E et V une partie de E. On dit que V est un voisinage de x dans E s'il contient une boule ouverte de centre x , c'est-à-dire s'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x; r) \subset V$.

Voisinage de l'infini Dans un espace vectoriel normé, complémentaire d'un compact.

♦ Dans $\mathbb{R}$, on distinguera les voisinages de $+\infty$ (parties contenant un intervalle de la forme $]a; +\infty[$) et ceux de $-\infty$ (parties contenant un intervalle de la forme $]-\infty; a[$).



Fig. 105 — À gauche : voisinage d'un point a . Ce voisinage, ici, n'est pas connexe. Une boule ouverte centrée sur a est représentée (en gris clair). À droite : voisinage de $+\infty$ (détail).

Propriété vraie au voisinage d'un point Une propriété $\mathcal{P}$ est dite vraie au voisinage d'un point a d'un espace vectoriel normé E s'il existe un voisinage V de a tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in V$.

Propriété vraie au voisinage de l'infini Une propriété $\mathcal{P}$ sur un espace vectoriel normé E est dite vraie au voisinage de l'infini s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout x tel que $\|x\| \geq M$. ♦ Si $E = \mathbb{R}$, on distinguera les propriétés vraies au voisinage de $+\infty$ et celles vraies au voisinage de $-\infty$.

Exemple : Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue admettant 1 pour limite en $+\infty$, alors elle est positive au voisinage de $+\infty$.

VON KOCH

✎ KOCH.

W

WALLIS John (1616–1703)
(Mathématicien anglais)

Intégrale de Wallis Intégrale de la forme

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt.$$

REMARQUE : La formule $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ (obtenue par intégration par parties) permet de montrer que

$$I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)},$$

formules que l'on peut unifier à l'aide de la fonction Γ d'Euler :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

♦ On peut en déduire que

$$I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

♦ De cet équivalent, on tire la formule $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{n [(2n)!]^2}$, que l'on écrivait autrefois (avant le formalisme des produits infinis) :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdots}.$$

WEIERSTRASS Karl Theodor Wilhelm (1815–1897)
(Mathématicien allemand)

1^{er} théorème d'approximation de Weierstrass (Parfois appelé *théorème de Stone-Weierstrass*.) Soit f une application continue d'un segment $[a; b]$ dans $\mathbb{K}$. Alors il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes qui converge uniformément vers f sur $[a; b]$.

REMARQUE : Très souvent, savoir qu'une telle suite de polynômes existe est suffisant : cela permet de montrer certaines propriétés par densité (✎ RAISONNEMENT PAR DENSITÉ). Toutefois, si l'on a besoin d'une suite explicite, on peut faire appel aux polynômes de Bernstein, ou bien à des techniques de convolution.

2^e théorème de Weierstrass Soit f une application continue de $[a; b]$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant $f(a) = f(b)$ ou, ce qui revient au même, une application continue et $(b-a)$ -périodique sur $\mathbb{R}$. Alors il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques $(b-a)$ -périodiques qui converge uniformément vers f sur $[a; b]$ (et donc sur $\mathbb{R}$).

Théorème de Weierstrass sur les compacts Soit $f : E \rightarrow F$ une application continue d'un espace vectoriel normé dans un autre. Alors, l'image de tout compact de E par f est un compact de F .

REMARQUE : On déduit de ce résultat essentiel que l'image d'un segment par une fonction réelle continue est un segment. Notamment, si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors elle atteint son maximum et son minimum sur $[a; b]$.

✎ ATTEINDRE.

Théorème de Bolzano-Weierstrass ✎ BOLZANO.