



Fig. 105 — À gauche : voisinage d'un point a . Ce voisinage, ici, n'est pas connexe. Une boule ouverte centrée sur a est représentée (en gris clair). À droite : voisinage de $+\infty$ (détail).

Propriété vraie au voisinage d'un point Une propriété $\mathcal{P}$ est dite vraie au voisinage d'un point a d'un espace vectoriel normé E s'il existe un voisinage V de a tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in V$.

Propriété vraie au voisinage de l'infini Une propriété $\mathcal{P}$ sur un espace vectoriel normé E est dite vraie au voisinage de l'infini s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout x tel que $\|x\| \geq M$. ♦ Si $E = \mathbb{R}$, on distinguera les propriétés vraies au voisinage de $+\infty$ et celles vraies au voisinage de $-\infty$.

Exemple : Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue admettant 1 pour limite en $+\infty$, alors elle est positive au voisinage de $+\infty$.

VON KOCH

☞ KOCH.

W

WALLIS John (1616–1703)

(Mathématicien anglais)

Intégrale de Wallis Intégrale de la forme

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt.$$

REMARQUE : La formule $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ (obtenue par intégration par parties) permet de montrer que

$$I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)},$$

formules que l'on peut unifier à l'aide de la fonction Γ d'Euler :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

♦ On peut en déduire que

$$I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

♦ De cet équivalent, on tire la formule $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{n[(2n)!]^2}$, que l'on écrivait autrefois (avant le formalisme des produits infinis) :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdots}.$$

WEIERSTRASS Karl Theodor Wilhelm (1815–1897)

(Mathématicien allemand)

1^{er} théorème d'approximation de Weierstrass (Parfois appelé *théorème de Stone-Weierstrass*.) Soit f une application continue d'un segment $[a; b]$ dans $\mathbb{K}$. Alors il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes qui converge uniformément vers f sur $[a; b]$.

REMARQUE : Très souvent, savoir qu'une telle suite de polynômes existe est suffisant : cela permet de montrer certaines propriétés par densité (☞ RAISONNEMENT PAR DENSITÉ). Toutefois, si l'on a besoin d'une suite explicite, on peut faire appel aux polynômes de Bernstein, ou bien à des techniques de convolution.

2^e théorème de Weierstrass Soit f une application continue de $[a; b]$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant $f(a) = f(b)$ ou, ce qui revient au même, une application continue et $(b-a)$ -périodique sur $\mathbb{R}$. Alors il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques $(b-a)$ -périodiques qui converge uniformément vers f sur $[a; b]$ (et donc sur $\mathbb{R}$).

Théorème de Weierstrass sur les compacts Soit $f : E \rightarrow F$ une application continue d'un espace vectoriel normé dans un autre. Alors, l'image de tout compact de E par f est un compact de F .

REMARQUE : On déduit de ce résultat essentiel que l'image d'un segment par une fonction réelle continue est un segment. Notamment, si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors elle atteint son maximum et son minimum sur $[a; b]$.

☞ ATTEINDRE.

Théorème de Bolzano-Weierstrass ☞ BOLZANO.

WIRTINGER *Wilhelm* (1865–1945)
(Mathématicien autrichien)

Inégalité de Wirtinger Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, 2π -périodique et telle que $\int_0^{2\pi} f = 0$. Alors

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

REMARQUE : Cette inégalité est une conséquence bien connue du théorème de Parseval et de la formule exprimant les coefficients de Fourier de la dérivée : $c_n(f') = in c_n(f)$.

WRONSKI *Josef Hoëne, dit Hoëne-Wronski* (1778–1853)
(Philosophe, scientifique et mystique polonais)

WRONSKIEN

Wronskien dans le cas d'une équation d'ordre 1 Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n . Soit $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ une application continue. On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$x' = a \cdot x \quad (H)$$

où l'on a noté $a \cdot x = a(x)$ (ou $a \circ x$, puisque x est elle-même une fonction...). Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une famille de solutions de (H), et si $\mathcal{B}$ est une base de E , la matrice $\mathcal{W}(t) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est appelée *matrice wronskienne*. Le wronskien dans la base $\mathcal{B}$ de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est le déterminant de la matrice précédente :

$$W(t) = \det \mathcal{W}(t) = \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)).$$

♦ Il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions ;
- (b) il existe un $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$;
- (c) pour tout $t \in I$, $W(t) \neq 0$.

REMARQUES : En d'autres termes, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de l'espace des solutions de (H) si, et seulement si, il existe $t_0 \in I$ tel que la famille de vecteurs $(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$ est une base de E . Ainsi, une famille libre de conditions initiales évolue, au cours du temps, en restant toujours libre. C'est une conséquence directe de la structure linéaire de l'équation (H) et du théorème de Cauchy-Lipschitz. ♦ La fonction W évolue selon l'équation différentielle $W'(t) = \text{tr}(a(t)) W(t)$. ♦ Quant à la matrice wronskienne, elle évolue selon $\mathcal{W}' = A \cdot \mathcal{W}$, où $A(t)$ est la matrice représentative, dans la base $\mathcal{B}$, de l'endomorphisme $a(t)$.

Wronskien dans le cas d'une équation scalaire d'ordre 2 Soient $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{K}$ des applications continues sur un intervalle donné I . Soient u et v deux solutions de l'équation

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0 \quad (H_2)$$

Si l'on pose

$$\mathcal{W}(t) \stackrel{\text{d'f.}}{=} \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W(t) \stackrel{\text{d'f.}}{=} \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix},$$

la matrice $\mathcal{W}$ est appelée matrice wronskienne et son déterminant W est le wronskien de la famille (u, v) de solutions de (H_2) . ♦ Le wronskien évolue selon l'équation $aW' + bW = 0$.

✎ MÉTHODE DE *VARIATION DE LA CONSTANTE.

Y, Z

YOUNG *William Henry* (1863–1942)
(Mathématicien anglais)

Formules de Taylor avec reste de Young ✎ TAYLOR.

Z

Ensemble des entiers relatifs. ♦ Muni de l'addition, $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien (additif). ♦ Muni de l'addition et de la multiplication interne, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau, d'unité 1. Le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Z}^* = \{-1, +1\}$. ♦ L'ensemble $\mathbb{Z}$, muni de la relation d'ordre usuelle, est totalement ordonné. De plus, toute partie majorée admet un plus grand élément, et toute partie minorée admet un plus petit élément.

REMARQUE : La lettre « Z » est l'initiale du mot allemand *Zahl*, qui veut dire « nombre ».

$\mathbb{Z}[X]$

Anneau des polynômes à coefficients entiers.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Anneau quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Muni de la multiplication et de l'addition, le groupe quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a une structure d'anneau et est appelé anneau quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. ♦ Les inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les classes des entiers de $[0; n-1]$ qui sont premiers avec n . Ces classes sont également les générateurs du groupe additif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Exemple : Les inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sont $\bar{1}$, $\bar{3}$, $\bar{5}$ et $\bar{7}$.

✎ INDICATRICE D'*EULER.

Corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ Si p est un entier premier, alors tous les éléments non nuls de l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont inversibles, ce qui confère à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ une structure de corps.

Exemple : Dans l'anneau $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, tous les éléments non nuls sont inversibles ; on donne ici leur inverse.

k	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
k^{-1}	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$

Groupe quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Si n est un entier strictement positif, l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathbb{Z}$ pour la relation de congruence modulo n est appelé groupe quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. ♦ Muni de l'addition des classes, il a une structure de groupe abélien (additif).

♦ Il est de cardinal n :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

✎ SURJECTION *CANONIQUE, CLASSE D'ÉQUIVALENCE, CONGRUENCE.

ZERMELO *Ernst* (1871–1953)
(Mathématicien allemand)

Axiome de Zermelo Tout ensemble peut être muni d'un bon *ordre, c'est-à-dire un ordre pour lequel toute partie non vide possède un plus petit élément. ♦ Cet axiome est logiquement équivalent à l'axiome du choix.

✎ AXIOME, CHOIX, ORDRE.

Axiomes de Zermelo-Fraenkel Système d'axiomes, formulé par Zermelo et précisé par Abraham Fraenkel. Si on lui adjoint l'axiome du choix, on obtient le système dit ZFC, qui est le plus communément utilisé en théorie des ensembles.

ZÉRO

Zéro d'une fonction f Valeur de la variable en laquelle la fonction s'annule.

Zéro d'un polynôme Synonyme de racine d'un polynôme.

Diviseur de zéro Soit A un anneau commutatif. On appelle diviseur de zéro un élément non nul a de A tel qu'il existe $b \in A$, non nul, vérifiant $ab = 0$.

Exemples : Dans l'anneau $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, l'élément $\bar{4}$ est diviseur de 0, puisque $\bar{4} \cdot \bar{3} = \bar{0}$. ♦ Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Dans l'anneau $\mathbb{K}[u]$, un élément $P(u)$ est un diviseur de zéro si et seulement si P n'est pas premier avec le polynôme caractéristique de u .

☞ INTÈGRE.

Principe des zéros isolés Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, dont les coefficients ne sont pas tous nuls, de rayon de convergence $R > 0$, et de somme $S(z)$. Alors, il existe un réel $r \in]0; R[$ tel que S ne s'annule pas sur $\mathcal{B}(0; r)$, sauf peut-être en 0. ♦ En d'autres termes, si S est non nulle et si $S(0) = 0$, alors 0 est un *zéro isolé*.

REMARQUE : Ce principe s'étend ainsi sur $\mathbb{C}$: si $z_0 \in \mathcal{B}(0; R)$ vérifie $S(z_0) = 0$, alors il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que S ne s'annule pas sur $\mathcal{B}(z_0; \varepsilon) \setminus \{z_0\}$. Cela est dû au fait que la fonction S est encore développable en série entière autour de z_0 , c'est-à-dire qu'il existe une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant, dans un certain voisinage de z_0 , $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$.

ZÉTA

La fonction zéta (ou dzéta) de Riemann est la fonction ζ , définie sur $]1; +\infty[$ par

$$\forall s > 1 \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

REMARQUE : On peut trouver un prolongement naturel à cette fonction sur un domaine plus large du plan complexe : $\{z \in \mathbb{C} ; \Re z > 1\}$. La fonction obtenue est dérivable au sens complexe (on dit : *holomorphe*). ♦ Avec un peu plus de travail, on trouve un prolongement valable sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Parmi les zéros de cette fonction figurent les nombres pairs négatifs $-2, -4, -6$, etc. Riemann conjectura que les autres zéros sont tous de partie réelle égale à $1/2$. À ce jour, cette conjecture n'a toujours pas été prouvée, bien qu'elle paraisse juste, et constitue un défi majeur pour les mathématiciens d'aujourd'hui et de demain (☞ PROBLÈMES DE HILBERT). ♦ La fonction ζ est un outil d'une importance théorique primordiale dans l'étude des nombres premiers, auxquels elle est liée par diverses identités. ♦ On sait enfin que

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

et l'on sait calculer $\zeta(2k)$ de manière générale. Roger Apéry a montré (1978) que $\zeta(3)$ est irrationnel (☞ APÉRY), et Tanguy Rivoal a prouvé (2002) l'irrationalité d'au moins un des neuf nombres $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(21)$.