

Formulaire : Nombres complexes

Définitions :

Un nouvel ensemble $\mathbb{C}$ avec de **nouveaux nombres, les nombres complexes** :
 $z = a + ib$ tel que $i^2 = -1$, où a est la partie réelle de z notée $Re(z) = a$ et b est la partie imaginaire de z notée $Im(z) = b$.

L'écriture $z = a + ib$ s'appelle la **forme algébrique** du nombre complexe.

Propriétés :

- **Egalité de nombres complexes** : $a + ib = a' + ib'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.
- Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle est nulle et sa partie imaginaire est nulle.

Somme de deux nombres complexes :

$$z_1 = a + ib \text{ et } z_2 = a' + ib' \text{ alors } z_1 + z_2 = (a + a') + i(b + b')$$

Produit de deux nombres complexes :

$$z_1 = a + ib \text{ et } z_2 = a' + ib' \text{ alors } z_1 \times z_2 = (aa' - bb') + i(a'b + ab')$$

On retrouve ce résultat en développant $(a + ib)(a' + ib')$

$$\begin{aligned}(a + ib)(a' + ib') &= aa' + ab'i + a'bi + (i)^2 bb' \\ &= (aa' - bb') + i(a'b + ab')\end{aligned}$$

Carré d'un nombre complexe :

$$z_1 = a + ib \text{ alors } z_1^2 = (a^2 - b^2) + 2iab$$

Conjugué

Le **nombre complexe conjugué** de $z = a + ib$ est le nombre complexe

$$\bar{z} = a - ib$$

Propriétés :

- $\bar{\bar{z}} = z$
- z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$ et z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$
- Soit $z = a + ib$ un nombre complexe alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$.
- Le conjugué d'une somme de nombres complexes est égale à la somme des conjugués.

$$\text{Pour tout } z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

- Le conjugué d'un produit est égale au produit des conjugués.

$$\text{Pour tout } z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$$

- L'inverse d'un nombre complexe non nul est : $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}$
- Le conjugué de l'inverse d'un nombre complexe non nul est égale à l'inverse du conjugué.

Pour tout $z \neq 0, z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

- Le conjugué du quotient de nombres complexes est égale au quotient des conjugués.

Pour tout $z' \neq 0, z' \text{ et } z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

- Le conjugué de la puissance entière d'un nombre complexe est égale à la puissance du conjugué.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Rappels : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \dots \times 2 \times 1$ et $1! = 1$ et $0! = 1$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Théorème : Pour tous nombres complexes a et b et pour tout entier naturel n , on a : $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \text{ (formule du binôme)}$$

Point de vue géométrique : (image, module argument, forme trigonométrique)

L'**affixe** du point M de coordonnées $M(a; b)$ et du vecteur $\vec{w}(a; b)$ est le nombre complexe $z = a + ib$

Le vecteur image du nombre complexe $z = a + ib$ est le vecteur $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ est le nombre complexe $z = a + ib$

Propriété : Dans un repère orthonormé direct du plan complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$, soit les points $A(a; b)$ et $B(a'; b')$ d'affixes respectifs les nombres complexes $z_A = a + ib$ et $z_B = a' + ib'$, alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$
- Le milieu I du segment [AB] a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

Propriété : Soient les nombres complexes $z_A = a + ib$ et $z_B = a' + ib'$ étant les affixes respectifs des points A(a ; b) et B(a' ; b'), alors $z = z_A + z_B$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

Propriété : Soit $z_A = x_A + iy_A$ le nombre complexe étant l'affixe du point $A(a ; b)$ et α un nombre réel, alors αz_A et l'affixe de $\alpha \overrightarrow{OA}$.

L'image M d'un nombre complexe $z = a + ib$ est caractérisée par :

- Son **module** noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$, il correspond à la longueur du segment $[OM]$,
- Son **argument** (si $z \neq 0$) noté $\arg(z)$ ou θ , il correspond à la mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

L'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) : \widehat{uOM}$ entre (OU) et (OM) , il est défini à un nombre de tour près sur le cercle trigonométrique ie. à $2k\pi$ près où k est un nombre entier relatif tel que :

- $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{|z|}$ (cosinus : côté adjacent/hypoténuse)
- $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{|z|}$ (sinus : côté opposé/hypoténuse)
- $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{b}{a}$ (la fonction tangente est impaire, périodique de période π avec $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$)

d'où $\theta = \arctan \frac{b}{a}$ si $a > 0$ et $\theta = \arctan \frac{b}{a} + \pi$ si $a < 0$

Propriétés sur les modules et les arguments : Pour tout nombre complexe z

- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$
- $|z| = |\bar{z}|$ et si $z \neq 0$, $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) (2\pi)$
- $|-z| = |z|$ et si $z \neq 0$, $\arg(-z) = (\arg(z) + \pi) (2\pi)$
- $|z|^2 = z\bar{z}$

Propriétés: soit le nombre complexe z

- z est un réel non nul si et seulement si $\arg(z) = 0 (2\pi)$ ou $\arg(z) = \pi (2\pi)$
- z est un imaginaire pur non nul si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$ ou $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, on pose $\theta = \arg(z)$, on a alors $a = |z| \cos \theta$ et $b = |z| \sin \theta$.

Définition : Soit z un nombre complexe non nul, on appelle forme trigonométrique de z l'écriture $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\theta = \arg(z)$

Propriétés : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et n entier naturel non nul.

Produit :	$ zz' = z z' $	$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
Puissance :	$ z^n = z ^n$	$\arg(z^n) = n \arg(z)$
Inverse :	$\left \frac{1}{z}\right = \frac{1}{ z }$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
Quotient :	$\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Propriété : pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , on a $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Définition : L'ensemble des points du plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ dont l'affixe appartient au cercle de centre O et de rayon 1 est noté $\mathbb{U}$. Ce cercle s'appelle le cercle trigonométrique.

Propriété : Soit z un nombre complexe appartenant à $\mathbb{U}$, on a alors $a^2 + b^2 = 1$.

Nombres complexes et trigonométrie

Propriétés : Soit a et b deux nombres réels quelconques. On a :

$$\begin{aligned}\cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b\end{aligned}$$

Propriété : Soit a un nombre réel, on a :

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \\ \sin 2a &= 2 \cos a \sin a\end{aligned}$$

Définition : Pour tout nombre réel θ , on pose $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$, avec cette notation le nombre complexe non nul z s'écrit $z = |z|e^{i\theta}$, on appelle cette écriture la forme exponentielle.

Propriétés :

- $e^{i\pi} = -1$
- Pour tous réels θ et θ' , on a :

$$e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$e^{i\theta} = e^{-i\theta}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad \text{Formule de Moivre}$$

Formule d'Euler : Pour tout réels θ , on a : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Utilisation des nombres complexes en géométrie

Propriétés : Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

* Soit le point A d'affixe z_A et le point B d'affixe z_B , alors la distance $AB = |z_B - z_A|$ et l'angle entre $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ est $\theta = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \pmod{2\pi}$.

* Soit A le point d'affixe z_A , le point B d'affixe z_B , le point C d'affixe z_C et le point D d'affixe z_D distincts deux à deux, alors l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est $\theta = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

Propriété : pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , on a $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Définition : Une racine n -ième de l'unité est un nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème : L'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines de l'unité possède exactement n racines : $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec k entier compris entre 0 et $n - 1$.

Résolution d'une équation

Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$: $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des nombres réels non nuls.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

• Si $\Delta = 0$, on a une racine double $r = -\frac{b}{2a}$

• Si $\Delta > 0$, on a bien $r_1 = -\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = -\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ on note aussi $r = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

• Si $\Delta < 0$, on conclut que le polynôme n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Si le trinôme $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes ou confondues, alors leur somme ou leur produit vérifie $S = (r_1 + r_2) = -\frac{b}{a}$ et $P = r_1 r_2 = \frac{c}{a}$

Propriété : Deux réels ont pour somme S et pour produit P , si et seulement s'ils sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$

Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$:

- Si $b^2 - 4ac = 0$, l'équation admet une racine double réelle $r = -\frac{b}{2a}$
- Si $b^2 - 4ac > 0$, l'équation admet deux racines réelles $r_1 = -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $r_2 = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ on note aussi $r = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Si $b^2 - 4ac < 0$, l'équation admet deux racines complexes $r_1 = -\frac{b - i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}$ et $r_2 = -\frac{b + i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}$ On note aussi $r = -\frac{b \pm i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}$

On constate que le trinôme admet deux racines complexes qui sont conjuguées. (ce résultat est important pour vérifier vos calculs)

Le **théorème Somme-Produit** et la propriété qui en découle restent valables dans $\mathbb{C}$. (ce résultat est important pour vérifier vos calculs $S = (r_1 + r_2) = -\frac{b}{a}$ et $P = r_1 r_2 = \frac{c}{a}$).

Propriété : Racine carrée d'un nombre complexe non nul : pour tout $z \in \mathbb{C}^*$; l'équation $\omega^2 = z$ d'inconnue ω admet exactement deux solutions opposées, appelées racines carrées de z .

Équation du second degré à coefficients complexes : Soit a, b, c des nombres complexes avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$ où δ est l'une quelconque des deux racines carrées du discriminant $b^2 - 4ac$.

Racine n-ième

Définition : Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

- on appelle racine n-ième de z tout nombre complexe w tel que $w^n = z$
- Les racines n-ième de 1 sont appelées racines n-ièmes de l'unité. Leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$.

Théorème : Expression des racines n-ièmes :

- La seule racine n-ième de 0 est 0.
- Soit $z = re^{i\theta}$ (avec $r = |z|$) un nombre complexe non nul, alors z possède exactement n racines n-ièmes, à savoir, les nombres complexes : $\sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}\right)$, avec k décrivant $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$.
- Cas particulier des racines n-ième de l'unité : $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\}$ k décrivant $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$ (La notation $\llbracket \dots \rrbracket$, indique qu'on parle d'intervalle d'entiers).

Identités remarquables :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2 \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\mathbf{a^n - b^n} = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$