

Primitives et équations différentielles :

Partie 1 : Primitive d'une fonction

1) Définition et propriétés

Exemple :

On considère les fonctions f et F définies par : $f(x) = 2x + 3$ et $F(x) = x^2 + 3x - 1$
Si on dérive F , on constate que si on dérive on obtient : $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$.
Lorsque $F' = f$, on dit que F est une primitive de f .

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle I .

On appelle **primitive** de f , une fonction F , telle que : $F' = f$.

Remarque :

Dans ces conditions, dire que « F est une primitive de f » revient à dire que « f est la dérivée de F ».

Méthode : Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre fonction

Facile on dérive la fonction qui est censée être la primitive et on obtient la seconde. (il faut savoir dériver !)

Exercice 1 :

Dans chaque cas, dire si F est une primitive de f .

a) $F(x) = \frac{x^2}{2}$ et $f(x) = x$.

b) $F(x) = xe^x$ et $f(x) = e^x(x + 1)$.

c) $F(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ et $f(x) = \frac{-\ln(x)}{x^2}$.

Propriété : Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration :

Soit F et G deux primitives de la fonction f sur I .

Alors : $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.

Donc : $F'(x) = G'(x)$, soit $F'(x) - G'(x) = 0$, soit encore $(F - G)'(x) = 0$.

La fonction $F - G$ possède une dérivée nulle sur I , elle est donc constante sur I .

On nomme C cette constante. Ainsi : $F(x) - G(x) = C$ pour tout x de I .

On en déduit que les deux primitives de f diffèrent d'une constante.

Propriété : f est une fonction continue sur un intervalle I .

Si F est une primitive de f alors pour tout réel C , la fonction $x \mapsto F(x) + C$ est une primitive de f .

Démonstration :

F est une primitive de f .

On pose $G(x) = F(x) + C$.

$$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x).$$

Donc G est une primitive de f .

Exemple :

On a vu dans la méthode précédente que F est une primitive de f avec :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \text{ et } f(x) = x.$$

Donc, la fonction G définie par $G(x) = \frac{x^2}{2} + 5$ est également une primitive de f .

$$\text{En effet : } G'(x) = \frac{2x}{2} + 0 = x = f(x).$$

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

- Voir la démonstration dans le chapitre Intégration -

Remarque : Bien que l'existence soit assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.

Méthode : Recherche d'une primitive particulière

Exercice 2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$.

a) Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f .

b) Déterminer la primitive G de la fonction f qui s'annule en $x = 1$.

2) Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Une primitive F
$a, a \in \mathbb{R}$	ax
x^n avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$ avec $x > 0$	$\ln(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$

3) Linéarité des primitives

Propriété :

Si F est une primitive de f et G est une primitive de g alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- kF est une primitive de kf , avec k réel.

Démonstrations :

- $(F + G)' = F' + G' = f + g$
- $(kF)' = kF' = kf$

Méthode : Déterminer une primitive (1)**Exercice 4 :** Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f .

- a) $f(x) = x^3 - 2$ b) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$ c) $f(x) = \frac{1}{x^5}$
d) $f(x) = \frac{3}{x}$ sur $]0; +\infty[$ e) $f(x) = -\sin(x)$ f) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

4) Primitives de fonctions composées u est une fonction dérivable sur un intervalle I .

Fonction	Une primitive
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$	$\ln(u)$
$u'e^u$	e^u
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$

Méthode : Déterminer une primitive (2)**Exercice 5 :** Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f .

- a) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$ b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
c) $f(x) = x^2 e^{x^3}$ d) $f(x) = \cos(5x) - 3 \sin(3x - 1)$

Remarque : Pour se vérifier on pourra dériver la primitive trouvée.**Exercice 6 : Fonction polynomiale**Développer et réduire l'expression : $(x + 3)(x^2 + 3)$ Déterminer les primitives de la fonction définie par $f(x) = ((x + 3)(x^2 + 3))^3(x + 1)^2$ Indication : savoir reconnaître $u'u^n$.**Exercice 7 : Fonctions rationnelles**Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}^{*+}$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}^{*+}$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 2}{x^3}$ Déterminer les primitives sur $]1; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$

Exercice 8 : Fonction racine carrée

Déterminer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f_1(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}}$

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}$

Exercice 9 : Fonctions trigonométriques

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$.

$f_1(x) = \cos 2x$; $f_2(x) = \sin(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{4})$; $f_3(x) = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{3x}{4})$; $f_4(x) = (\cos x)^3$

$f_5(x) = (\sin x)^3$.

Déterminer sur $[0; \frac{\pi}{6}]$, l'ensemble des primitives de la fonction f_6 définie par :

$$f_6(x) = \frac{\sin 3x}{1 + \cos 6x}$$

Partie 2 : Équations différentielles

I. Premier ordre à coefficients constants

1) Définition d'une équation différentielle

Définition : Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction.

Exemples :

a) L'équation $f'(x) = 5$ est une équation différentielle.

L'inconnue est la fonction f .

En considérant que y est la fonction inconnue qui dépend de x , l'équation différentielle peut se noter : $y' = 5$

b) L'équation $y' = 2x^2 - 3$ est également une équation différentielle.

L'inconnue est la fonction y dont la dérivée est égale à $2x^2 - 3$.

Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions $y(x)$ qui vérifient l'équation sur un intervalle donné de $\mathbb{R}$. (la fonction y est une fonction d'une variable x)

Résolution des exemples :

2) Équation différentielle du type $y' = f$

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

La fonction g est une **solution** de l'équation différentielle $y' = f$ si et seulement si $g'(x) = f(x)$.

Propriété :

Dire que F est une primitive de f , revient à dire que F est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

En effet, $F' = f$.

Méthode :

Exercice 10 : Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle
Prouver que la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln x$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

3) Équations différentielles du type $y' = ay$ (homogène)

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration :

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.
Alors, $f'(x) = C \times ae^{ax} = a \times Ce^{ax} = af(x)$.
Donc $f'(x) = af(x)$.
 f est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
- Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
Et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$.
 g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = -ae^{-ax} \times f(x) + e^{-ax} \times f'(x)$.
Comme f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, on a : $f'(x) = af(x)$.
Ainsi : $g'(x) = -e^{-ax} \times af(x) + e^{-ax} \times f'(x) = -e^{-ax} \times f'(x) + e^{-ax} \times f'(x) = 0$.
La fonction g est donc égale à une constante réelle C , soit :
 $e^{-ax} \times f(x) = C$.
Et donc : $f(x) = C \times \frac{1}{e^{-ax}} = Ce^{ax}$.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$

Exercice 11 :

On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.

1) a) Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation.

b) Représenter à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, quelques courbes des fonctions solutions.

2) Déterminer l'unique solution f telle que $f(1) = 2$.

Propriété : Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et kf , $k \in \mathbb{R}$, sont également solutions de l'équation différentielle.

Démonstrations :

- $(f + g)' = f' + g' = af + ag = a(f + g)$
- $(kf)' = kf' = k \times af = a(kf)$

4) Équations différentielles du type $y' = ay + b$ (non homogène)

Propriété : La fonction $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$). Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Démonstration :

On pose : $g(x) = -\frac{b}{a}$. Alors $g'(x) = 0$.

Or, $ag(x) + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 = g'(x)$.

Donc : $g'(x) = ag(x) + b$.

g est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Solution de l'équation Solution particulière

$y' = ay$

constante de l'équation

$y' = ay + b$

Remarque : L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$

Exercice 12 : On considère l'équation différentielle $2y' - y = 3$.

a) Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation.

b) Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = -1$.

5) Équations différentielles du type $y' = ay + f$

Propriété : f est une fonction définie sur un intervalle I .

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ (avec $a \neq 0$) sont les fonctions de la forme :

$x \mapsto Ce^{ax} + p(x)$, où $C \in \mathbb{R}$.

Solution de l'équation

Solution particulière

$y' = ay$

de l'équation $y' = ay + f$

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + f$

Exercice 13 : On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.

- a) Démontrer que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution particulière de l'équation différentielle.
- b) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation différentielle.

Exercice 14 :

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant l'équation différentielle : $xf'(x) - (2x + 1)f(x) = 8x^2$ (E)

1-a- Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $y' = 2y + 8$ (E')

1-b- Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E).

2- Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E)

3- Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donnée passe par le point $A(\ln 2; 0)$? Si oui la préciser.

II. Second ordre

1) Équations différentielles du type $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$

Les équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants d'ordre 2 sont de la forme : $ay'' + by' + cy = 0$. (avec a, b et c des réels non nul).

On recherche des solutions de la forme $y(x) = e^{rx}$ où r est un nombre inconnu.

On a : $y'(x) = re^{rx}$ et $y''(x) = r^2e^{rx}$

L'équation devient : $ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$

$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$ ce qui revient à résoudre :

$ar^2 + br + c = 0$ (car $e^{rx} \neq 0$) cette équation s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2. (Il faut donc savoir résoudre une équation du second degré. Le rappel est fait dans le chapitre calculs numériques et algébriques).

Nommons r_1 et r_2 les racines

Selon le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine double réelle $r = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles $r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a} = \alpha + i\beta$

et $r_2 = \frac{-b - i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a} = \alpha - i\beta$

La solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 : $ay'' + by' + cy = 0$ est alors :

$$y(x) = \begin{cases} K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x}, & \text{si } \Delta > 0, r_1 \text{ et } r_2 \text{ réels} \\ (K_1 x + K_2) e^{rx}, & \text{si } \Delta = 0, r \text{ réel} \\ (K_1 \cos \beta x + K_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}, & \text{si } \Delta < 0, r_1 \text{ et } r_2 \text{ complexes} \end{cases} \quad \text{et avec } K_1 \text{ et } K_2 \text{ réels}$$

Exemple : Prenons l'équation différentielle du second ordre à coefficient constants suivante :

$$y''(x) - y'(x) + y(x) = 0$$

L'équation caractéristique est $r^2 - r + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3$, les racines sont des nombres complexes conjugués

$$r_1 = \frac{-b+i\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et } r_2 = \frac{-b-i\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La solution de l'équation différentielle est $\left(K_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + K_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{\frac{x}{2}}$

2) Équations différentielles du type $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$

L'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$ où ω est un nombre réel strictement positif quelconque est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x$ avec A et B des constantes qui peuvent être déterminées à l'aide des conditions initiales.

L'équation caractéristique est $r^2 + \omega^2 = 0$, on a $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \frac{i\sqrt{4\omega^2}}{2} = i\omega$ et $r_2 = -i\omega$, donc les solutions sont de la forme : $(A \cos \omega x + B \sin \omega x)e^0$ soit $A \cos \omega x + B \sin \omega x$.

3) Équations différentielles du type $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$

De même que pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1, on a :

La solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$ est la somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée et d'une de ses solutions particulières.

Exemple : Prenons l'équation

$$y''(x) - y'(x) + y(x) = x^2$$

On a vu précédemment que la solution de l'équation différentielle homogène associée est $\left(K_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + K_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{\frac{x}{2}}$

Une solution particulière est : $x^2 + 2x$, en effet $(x^2 + 2x)' = 2x + 2$ et $(x^2 + 2x)'' = 2$ et $2 - (2x + 2) + x^2 + 2x = x^2$

Donc $\left(K_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + K_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 2x$ est solution de l'équation différentielle.

Recherche de la solution particulière : Méthode :

On va chercher la solution particulière f sous la forme $f(x) = x^2 + ax + b$ où a et b sont des réels à déterminer. $f(x) = x^2 + ax + b$;

$$f'(x) = 2x + a$$

$$f''(x) = 2$$

Donc $f''(x) - f'(x) + f(x) = 2 - 2x - a + x^2 + ax + b$ on simplifie au maximum

$2 + b - a + (a - 2)x + x^2 = x^2$ on procède par identification des coefficients, car deux polynômes sont égaux si et seulement leurs coefficients sont égaux, il vient $a = 2$ et $b = 0$ donc $x^2 + 2x$ est solution particulière.

Si on avait eu comme équation :

$y''(x) - y'(x) + y(x) = e^{-x}$, dans ce cas on cherche une solution particulière sous la forme $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ (car en dérivant deux fois on a la forme e^{-x})

$$f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$$

$$f''(x) = (-2ax + (2a - b))e^{-x} - (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x} \\ = (ax^2 + (-4a + b)x + 2a - 2b + c)e^{-x}$$

On remplace dans l'équation différentielle, il vient :

$$(ax^2 + (-4a + b)x + 2a - 2b + c)e^{-x} - (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x} +$$

$$(ax^2 + bx + c)e^{-x} = e^{-x} \dots$$

$$3ax^2 + (-4a + b - 2a + b + b)x + 2a - 2b - b + c + c + c = 1$$

$$\text{D'où } a = 0, b = 0 \text{ et } c = \frac{1}{3}$$

$f(x) = \frac{e^{-x}}{3}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y''(x) - y'(x) + y(x) = e^{-x}$,

Donc $\left(K_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + K_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{\frac{x}{2}} + \frac{e^{-x}}{3}$ est solution de l'équation différentielle $y''(x) - y'(x) + y(x) = e^{-x}$.

Exercice 15 :

On considère y la fonction définie sur $\mathbb{R}$, de la variable x, dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation différentielle (E) : $9y''(x) - y(x) = 4$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E0) : $9y''(x) - y(x) = 0$
2. déterminer la solution particulière h de (E) sous la forme d'une constante
3. En déduire les solutions générales de (E).
4. Déterminer la fonction y solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 16 :

On considère y la fonction définie sur $\mathbb{R}$, de la variable t, dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation différentielle (E) : $y''(t) + 2y'(t) = (4 + 3t)e^t$.

1. Résoudre l'équation différentielle : $y''(t) + 2y'(t) = 0$ (E')
2. Déterminer le réel A tel que $f(t) = Ate^t$ soit une solution particulière de (E)
3. En déduire les solutions générales de (E).

Exercice 17 :

On considère x la fonction définie sur $\mathbb{R}$, de la variable t, dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation différentielle (E) : $x''(t) + 4x(t) = -6 \sin(t)$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E0) : $x''(t) + 4x(t) = 0$
2. Déterminer les réels A et B tel que la solution particulière g de (E) s'écrive sous la forme : $g(t) = A \cos(t) + B \sin(t)$
3. En déduire les solutions générales de (E).
4. Déterminer la fonction x, solution de (E), vérifiant $x(0) = -1$ et $x'(0) = 0$