

Primitives et équations différentielles :

Partie 1 : Primitive d'une fonction

1) Définition et propriétés

Exemple :

On considère les fonctions f et F définies par : $f(x) = 2x + 3$ et $F(x) = x^2 + 3x - 1$
Si on dérive F , on constate que si on dérive on obtient: $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$.
Lorsque $F' = f$, on dit que F est une primitive de f .

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle I .
On appelle **primitive** de f , une fonction F , telle que : $F' = f$.

Remarque :

Dans ces conditions, dire que « F est une primitive de f » revient à dire que « f est la dérivée de F ».

Méthode : Vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre fonction

Facile on dérive la fonction qui est censée être la primitive et on obtient la seconde. (il faut savoir dériver !)

Exercice 1 :

Dans chaque cas, dire si F est une primitive de f .

- a) $F(x) = \frac{x^2}{2}$ et $f(x) = x$.
- b) $F(x) = xe^x$ et $f(x) = e^x(x + 1)$.
- c) $F(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ et $f(x) = \frac{-\ln(x)}{x^2}$.

Solution 1 :

- a) $F'(x) = \frac{2x}{2} = x = f(x)$
Donc F est une primitive de f .
- b) $F'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = e^x(x + 1) = f(x)$
Donc F est une primitive de f .
- c) $F'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \neq f(x)$
Donc F n'est pas une primitive de f .

Propriété : Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration :

Soit F et G deux primitives de la fonction f sur I .
Alors : $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.
Donc : $F'(x) = G'(x)$, soit $F'(x) - G'(x) = 0$, soit encore $(F - G)'(x) = 0$.
La fonction $F - G$ possède une dérivée nulle sur I , elle est donc constante sur I .
On nomme C cette constante. Ainsi : $F(x) - G(x) = C$ pour tout x de I .
On en déduit que les deux primitives de f diffèrent d'une constante.

Propriété : f est une fonction continue sur un intervalle I .
Si F est une primitive de f alors pour tout réel C , la fonction $x \mapsto F(x) + C$ est une primitive de f .

Démonstration :

F est une primitive de f .
 On pose $G(x) = F(x) + C$.
 $G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$.
 Donc G est une primitive de f .

Exemple :

On a vu dans la méthode précédente que F est une primitive de f avec :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \text{ et } f(x) = x.$$

Donc, la fonction G définie par $G(x) = \frac{x^2}{2} + 5$ est également une primitive de f .

$$\text{En effet : } G'(x) = \frac{2x}{2} + 0 = x = f(x).$$

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

- Voir la démonstration dans le chapitre Intégration -

Remarque : Bien que l'existence soit assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.

Méthode : Recherche d'une primitive particulière

Exercice 2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$.

a) Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f .

b) Déterminer la primitive G de la fonction f qui s'annule en $x = 1$.

Correction 2

$$\text{a) } F'(x) = \frac{2e^{2x}x - e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2} = f(x).$$

Donc $F' = f$ et donc la fonction F est une primitive de f .

b) On cherche la primitive G de la fonction f qui s'annule en $x = 1$, soit : $G(1) = 0$.

Si G est une primitive de f alors : $G(x) = F(x) + C$, où C est un nombre réel.

$$\text{Donc : } G(1) = F(1) + C$$

$$\text{Et donc : } F(1) + C = 0$$

$$\text{Soit : } \frac{e^{2 \times 1}}{1} + C = 0$$

$$e^2 + C = 0$$

$$C = -e^2$$

La primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$ est G telle que :

$$G(x) = F(x) - e^2 = \frac{e^{2x}}{x} - e^2$$

2) Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Une primitive F
$a, a \in \mathbb{R}$	ax
x^n avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\}$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$ avec $x > 0$	$\ln(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$

3) Linéarité des primitives

Propriété :

Si F est une primitive de f et G est une primitive de g alors :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- kF est une primitive de kf , avec k réel.

Démonstrations :

- $(F + G)' = F' + G' = f + g$
- $(kF)' = kF' = kf$

Méthode : Déterminer une primitive (1)

Exercice 4 : Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f .

- a) $f(x) = x^3 - 2$ b) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$ c) $f(x) = \frac{1}{x^5}$
d) $f(x) = \frac{3}{x}$ sur $]0; +\infty[$ e) $f(x) = -\sin(x)$ f) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

Correction 4

- a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x$
b) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = 3x^2 - 3 \times \frac{1}{x^2}$ donc $F(x) = x^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{3}{x}$
c) $f(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$
 $F(x) = \frac{1}{-4}x^{-4} = -\frac{1}{4x^4}$
d) $f(x) = \frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x}$
 $F(x) = 3 \ln(x)$

Remarque : L'intervalle de recherche de la primitive est $]0; +\infty[$, car la fonction $\ln$ est définie pour des valeurs strictement positive.

- e) $f(x) = -\sin(x)$
 $F(x) = -(-\cos(x)) = \cos(x)$
f) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{x}}$
 $F(x) = 2 \times 2\sqrt{x} = 4\sqrt{x}$

4) Primitives de fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I .

Fonction	Une primitive
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\}$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$	$\ln(u)$
$u'e^u$	e^u
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$

Méthode : Déterminer une primitive (2)

Exercice 5 : Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f .

a) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$

b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

c) $f(x) = x^2 e^{x^3}$

d) $f(x) = \cos(5x) - 3 \sin(3x - 1)$

Correction 5

a) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$ du type $u'u^n$, avec $n = 2$.

En effet : $u(x) = x^2 - 5x + 4 \rightarrow u'(x) = 2x - 5$

Une primitive de $u'u^2$ est de la forme $\frac{1}{3}u^3$

Soit : $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 5x + 4)^3$

b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ du type $\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

En effet : $u(x) = x^2 + 1 \rightarrow u'(x) = 2x$

Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est de la forme $2\sqrt{u}$.

Soit : $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1}$

c) $f(x) = x^2 e^{x^3} = \frac{1}{3} \times 3x^2 e^{x^3}$ du type $u'e^u$.

En effet : $u(x) = x^3 \rightarrow u'(x) = 3x^2$.

Une primitive de $u'e^u$ est de la forme e^u .

Soit : $F(x) = \frac{1}{3} \times e^{x^3}$

d) $f(x) = \cos(5x) - 3 \sin(3x - 1) = \frac{1}{5} \times 5 \cos(5x) - 3 \sin(3x - 1)$

Donc $F(x) = \frac{1}{5} \times \sin(5x) + \cos(3x - 1)$

Remarque : Pour se vérifier on pourra dériver la primitive trouvée.

Exercice 6 : Fonction polynomiale

Développer et réduire l'expression : $(x + 3)(x^2 + 3)$

Déterminer les primitives de la fonction définie par $f(x) = ((x+3)(x^2+3))^3(x+1)^2$

Indication : savoir reconnaître $u'u^n$.

Solution 6 :

$$(x+3)(x^2+3) = x^3 + 3x^2 + 3x + 9$$

La fonction f est une fonction polynomiale, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ et y admet donc des primitives.

$$f(x) = ((x+3)(x^2+3))^3(x+1)^2 = (x^3 + 3x^2 + 3x + 9)^3(x+1)^2$$

Posons : $u(x) = (x+3)(x^2+3) = x^3 + 3x^2 + 3x + 9$

On a $u'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2$

$$f(x) = ((x+3)(x^2+3))^3(x+1)^2 = \frac{1}{3}u(x)^3u'(x)$$

Donc $F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{(u(x))^4}{4} + C = \frac{1}{12}[(x+3)(x^2+3)]^4 + C$ avec C une constante

Exercice 7 : Fonctions rationnelles

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}^{*+}$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}^{*+}$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 2}{x^3}$

Déterminer les primitives sur $]1; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$

Solution 7 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$, elle admet des primitives sur cet intervalle :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C \text{ avec C une constante}$$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 2}{x^3}$ est continue sur cet intervalle, elle y admet des primitives :

$$f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 2}{x^3} = x - 1 + \frac{2}{x^3} = x - 1 + 2x^{-3}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{2}{(-2)}x^{-2} + C = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{x^2} + C \text{ avec C une constante}$$

La fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ est continue sur cet intervalle, elle y admet des primitives :

Posons $u(x) = x - 1$; $u'(x) = 1$, on a $f(x) = \frac{1}{u^3} = \frac{u'}{u^3} = u'u^{-3}$

$$F(x) = \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2(x-1)^2} + C \text{ avec C une constante}$$

Exercice 8 : Fonction racine carrée

Déterminer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f_1(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}}$

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}$

Solution 8 :

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme et composée de fonctions qui le sont.

$$g'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}$$

La fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ et elle y admet des primitives :

$$f_1(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} (x + \sqrt{x^2+1}) \text{ (pour visualiser } g(x))$$

$f_1(x) = g'(x)g(x)$ d'où $F_1(x) = \frac{(g(x))^2}{2} + C$ avec C une constante.

Il vient $F_1(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 1})^2 + C$

$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})} = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{\frac{(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}$ on a cherché à faire apparaître g et g'

$f_2(x) = \frac{g'(x)}{(g(x))^2}$ d'où $F_2(x) = -\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} + C$ avec C une constante.

Exercice 9 : Fonctions trigonométriques

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$.

$f_1(x) = \cos 2x$; $f_2(x) = \sin(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{4})$; $f_3(x) = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{3x}{4})$; $f_4(x) = (\cos x)^3$

$f_5(x) = (\sin x)^3$.

Déterminer sur $[0; \frac{\pi}{6}]$, l'ensemble des primitives de la fonction f_6 définie par :

$$f_6(x) = \frac{\sin 3x}{1 + \cos 6x}$$

Solution 9 :

Pour $f_1(x) = \cos 2x$, $F_1(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + C$

Pour $f_2(x) = \sin(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{4})$, $F_2(x) = -\frac{3}{2} \cos(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{4}) + C$

Pour $f_3(x) = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{3x}{4})$, $F_3(x) = -\frac{4}{3} \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{3x}{4}) + C$

Pour $f_4(x) = (\cos x)^3 = (\cos x)^2 \cos x = (1 - (\sin x)^2) \cos x$ car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Avec $u(x) = \sin x$, on a $u'(x) = \cos x$

$f_4(x) = (1 - (u(x))^2) u'(x) = u'(x) - u'(x)(u(x))^2$ il vient :

$$F_4(x) = u(x) - \frac{1}{3} (u(x))^3 + C = \sin x - \frac{(\sin x)^3}{3} + C$$

Pour $f_5(x) = (\sin x)^3 = (1 - \cos^2 x) \sin x$

Avec $u(x) = \cos x$, on a $u'(x) = -\sin x$

$f_5(x) = (\sin x)^3 = (1 - \cos^2 x) \sin x = -u'(x)(1 - (u(x))^2) = -u'(x) + u'(x)(u(x))^2$ il vient :

$$F_5(x) = -u(x) + \frac{(u(x))^3}{3} + C = -\cos x + \frac{1}{3} (\cos x)^3 + C$$

Pour $f_6(x) = \frac{\sin 3x}{1 + \cos 6x}$ sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{6}]$, on a $\cos 6x = \cos(2 \times 3x)$

Et $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$, d'où $\cos 6x = \cos(2 \times 3x) = 2(\cos 3x)^2 - 1$, il vient :

$f_6(x) = \frac{\sin 3x}{1 + \cos 6x} = \frac{\sin 3x}{1 + 2\cos^2 3x - 1} = \frac{\sin 3x}{2(\cos 3x)^2}$ posons $u(x) = \cos 3x$; $u'(x) = -3 \sin 3x$

$f_6(x) = -\frac{u'(x)}{6(u(x))^2} = -\frac{1}{6} u'(x)(u(x))^{-2}$ d'où :

$$F_6(x) = -\frac{1}{6} \times \frac{(u(x))^{-2+1}}{(-2+1)} + C = \frac{1}{6} \times \frac{1}{u(x)} + C = \frac{1}{6 \cos 3x} + C$$

Partie 2 : Équations différentielles

I. Premier ordre à coefficients constants

1) Définition d'une équation différentielle

Définition : Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction.

Exemples :

a) L'équation $f'(x) = 5$ est une équation différentielle.

L'inconnue est la fonction f .

En considérant que y est la fonction inconnue qui dépend de x , l'équation différentielle peut se noter : $y' = 5$

b) L'équation $y' = 2x^2 - 3$ est également une équation différentielle.

L'inconnue est la fonction y dont la dérivée est égale à $2x^2 - 3$.

Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions $y(x)$ qui vérifient l'équation sur un intervalle donné de $\mathbb{R}$. (la fonction y est une fonction d'une variable x)

Résolution des exemples :

a) $y' = 5$, il vient $y(x) = 5x + C$

b) $y' = 2x^2 - 3$, il vient $y(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x + C$

2) Équation différentielle du type $y' = f$

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

La fonction g est une **solution** de l'équation différentielle $y' = f$ si et seulement si $g'(x) = f(x)$.

Propriété :

Dire que F est une primitive de f , revient à dire que F est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

En effet, $F' = f$.

Méthode :

Exercice 10 : Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Prouver que la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln x$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

Correction 10 :

$$g'(x) = 3 \times 2x + \frac{1}{x} = 6x + \frac{1}{x}$$

Donc, g est solution de l'équation différentielle : $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

3) Équations différentielles du type $y' = ay$ (homogène)

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration :

• Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.

Alors, $f'(x) = C \times ae^{ax} = a \times Ce^{ax} = af(x)$.

Donc $f'(x) = af(x)$.

f est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

• Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

Et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = -ae^{-a} \times f(x) + e^{-a} \times f'(x)$.

Comme f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, on a : $f'(x) = af(x)$.

Ainsi : $g'(x) = -e^{-ax} \times af(x) + e^{-ax} \times f'(x) = -e^{-a} \times f'(x) + e^{-ax} \times f'(x) = 0$.

La fonction g est donc égale à une constante réelle C , soit :

$e^{-a} \times f(x) = C$.

Et donc : $f(x) = C \times \frac{1}{e^{-ax}} = Ce^{ax}$.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$

Exercice 11 :

On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.

1) a) Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation.

b) Représenter à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, quelques courbes des fonctions solutions.

2) Déterminer l'unique solution f telle que $f(1) = 2$.

Correction 11 :

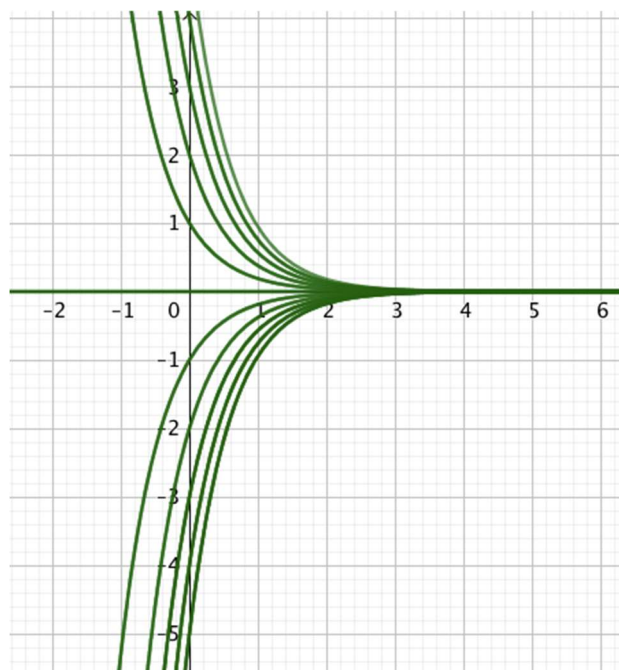
1) a) $3y' + 5y = 0$

$$3y' = -5y$$

$$y' = -\frac{5}{3}y$$

Les solutions sont les fonctions de la forme : $x \mapsto Ce^{-\frac{5}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

b) Pour différentes valeurs de C , on obtient :



2) f est solution de l'équation différentielle, donc de la forme : $f(x) = Ce^{-\frac{5}{3}x}$

Donc $f(1) = Ce^{-\frac{5}{3} \times 1} = Ce^{-\frac{5}{3}}$

Or, $f(1) = 2$.

Donc : $Ce^{-\frac{5}{3}} = 2$

$$Ce^{-\frac{5}{3}} = 2$$

$$C = \frac{2}{e^{-\frac{5}{3}}}$$

$$C = 2e^{\frac{5}{3}}$$

Et donc : $f(x) = 2e^{\frac{5}{3}} e^{-\frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3} - \frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}(1-x)}$

Propriété : Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et kf , $k \in \mathbb{R}$, sont également solutions de l'équation différentielle.

Démonstrations :

- $(f + g)' = f' + g' = af + ag = a(f + g)$

- $(kf)' = kf' = k \times af = a(kf)$

4) Équations différentielles du type $y' = ay + b$ (non homogène)

Propriété : La fonction $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$). Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Démonstration :

On pose : $g(x) = -\frac{b}{a}$. Alors $g'(x) = 0$.

Or, $ag(x) + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 = g'(x)$.

Donc : $g'(x) = ag(x) + b$.

g est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) sont les fonctions de la

forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Solution de l'équation Solution particulière

$y' = ay$

constante de l'équation

$y' = ay + b$

Remarque : L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$

Exercice 12 : On considère l'équation différentielle $2y' - y = 3$.

- a) Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation.
 b) Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = -1$.

Correction 12 :

a) $2y' - y = 3$

$$2y' = y + 3$$

$$y' = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$$

- Une solution particulière constante est la fonction : $x \mapsto -3$.

En effet : $-\frac{b}{a} = -\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -3$.

- Les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$ sont de la forme : $x \mapsto Ce^{\frac{1}{2}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

- Les solutions de l'équation différentielle $2y' - y = 3$ sont donc de la forme :

$$x \mapsto Ce^{\frac{1}{2}x} - 3, C \in \mathbb{R}$$

- b) f est solution de l'équation différentielle, donc de la forme : $f(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - 3$, $C \in \mathbb{R}$

Donc $f(0) = Ce^{\frac{1}{2} \times 0} - 3 = C - 3$

Or, $f(0) = -1$

Donc : $C - 3 = -1$

$$C = 3 - 1$$

$$C = 2$$

Et donc : $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 3$

5) Équations différentielles du type $y' = ay + f$

Propriété : f est une fonction définie sur un intervalle I .

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ (avec $a \neq 0$) sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto Ce^{ax} + p(x), \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'équation

$$y' = ay$$

Solution particulière

$$\text{de l'équation } y' = ay + f$$

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + f$

Exercice 13 : On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.

- a) Démontrer que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution particulière de l'équation différentielle.

- b) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation différentielle.

Correction 13 :

a) $p'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2}$

Donc : $p'(x) - 2p(x) = -x - \frac{1}{2} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$

$$= -x - \frac{1}{2} + x^2 + x + \frac{1}{2}$$

$$= x^2$$

On a donc : $p'(x) - 2p(x) = x^2$

La fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est donc une solution particulière de l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.

b) Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$ sont de la forme $x \mapsto Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$. On en déduit que les solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$ sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 14 :

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant l'équation différentielle : $xf'(x) - (2x + 1)f(x) = 8x^2$ (E)

1-a- Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = 2y + 8 \quad (E')$$

1-b- Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E).

2- Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E)

3- Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donnée passe par le point $A(\ln 2; 0)$? Si oui la préciser.

Solution 14 :

11 1.a) La fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables, le dénominateur étant non nul sur $]0; +\infty[$. Pour tout réel x de $]0; +\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}.$$

Si de plus la fonction f est solution de (E) on a pour tout réel x de $]0; +\infty[$:

$$xf'(x) - (2x + 1)f(x) = 8x^2 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - (2x + 1)f(x)}{x^2} = 8 \text{ car } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} - \frac{2f(x)}{x} = 8$$

$$\Leftrightarrow g'(x) - 2g(x) = 8.$$

La fonction f est solution de (E) sur $]0; +\infty[$ si et seulement si la fonction g est solution sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E') :

$$y' = 2y + 8.$$

b) Si la fonction h est solution de (E') sur $]0; +\infty[$, la fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et donc la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = xh(x)$ est aussi dérivable sur $]0; +\infty[$.

Pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = h(x) + xh'(x)$.

La fonction h est solution de (E') sur $]0; +\infty[$, donc pour tout réel x de $]0; +\infty[$:

$$h'(x) = 2h(x) + 8 \Leftrightarrow xh'(x) = 2xh(x) + 8x$$

$$\Leftrightarrow f'(x) - h(x) = 2f(x) + 8x$$

$$\Leftrightarrow xf'(x) = 2xf(x) + f(x) + 8x^2$$

$$\Leftrightarrow xf'(x) - (2x + 1)f(x) = 8x^2.$$

La fonction f est solution sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E).

2. Résolution de (E') sur $]0; +\infty[$:

- La fonction constante $x \mapsto -\frac{8}{2} = -4$ est solution de l'équation (E') sur $]0; +\infty[$ car pour tout réel x de $]0; +\infty[$, la dérivée de la fonction constante est nulle et :

$$0 = 2 \times (-4) + 8.$$

- Les solutions sur $]0; +\infty[$ de l'équation $y' = 2y$ sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto Ke^{2x}, K \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (E') sur $]0; +\infty[$ sont donc les fonctions définies pour tout réel $x > 0$ par :

$$x \mapsto Ke^{2x} - 4 \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

3. D'après 1. l'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x(Ke^{2x} - 4)$. On cherche parmi les fonctions solutions celles dont la représentation graphique passe par le point de coordonnées $(\ln 2; 0)$, une telle fonction vérifie $f(\ln 2) = 0$ donc vérifie :

$$K \ln 2 e^{2 \ln 2} - 4 \ln 2 = 0 \Leftrightarrow K \ln 2 e^{\ln 2^2} - 4 \ln 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4K \ln 2 - 4 \ln 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4K - 4 = 0 \Leftrightarrow K = 1.$$

Il existe sur $]0; +\infty[$ une solution et une seule de (E) qui s'annule en $\ln 2$, elle est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$x \mapsto x e^{2x} - 4x.$$

II. Second ordre

1) Équations différentielles du type $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$

Les équations différentielles linéaires homogène à coefficients constants d'ordre 2 sont de la forme : $ay'' + by' + cy = 0$. (avec a, b et c des réels non nul).

On recherche des solutions de la forme $y(x) = e^{rx}$ où r est un nombre inconnu.

On a : $y'(x) = r e^{rx}$ et $y''(x) = r^2 e^{rx}$

L'équation devient : $ar^2 e^{rx} + br e^{rx} + ce^{rx} = 0$

$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$ ce qui revient à résoudre :

$ar^2 + br + c = 0$ (car $e^{rx} \neq 0$) cette équation s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2. (Il faut donc savoir résoudre une équation du second degré. Le rappel est fait dans le chapitre calculs numériques et algébriques).

Nommons r_1 et r_2 les racines

Selon le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine double réelle $r = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles $r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a} = \alpha + i\beta$

et $r_2 = \frac{-b - i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a} = \alpha - i\beta$

La solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 : $ay'' + by' + cy = 0$ est alors :

$$y(x) = \begin{cases} K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x}, & \text{si } \Delta > 0, r_1 \text{ et } r_2 \text{ réels} \\ (K_1 x + K_2) e^{rx}, & \text{si } \Delta = 0, r \text{ réel} \\ (K_1 \cos \beta x + K_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}, & \text{si } \Delta < 0, r_1 \text{ et } r_2 \text{ complexes} \end{cases} \quad \text{et avec } K_1 \text{ et } K_2 \text{ réels}$$

Exemple : Prenons l'équation différentielle du second ordre à coefficient constants suivante :

$$y''(x) - y'(x) + y(x) = 0$$

L'équation caractéristique est $r^2 - r + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3$, les racines sont des nombres complexes conjugués

$$r_1 = \frac{-b+i\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et } r_2 = \frac{-b-i\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La solution de l'équation différentielle est $\left(K_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + K_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) e^{\frac{x}{2}}$

2) Équations différentielles du type $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$

L'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$ où ω est un nombre réel strictement positif quelconque est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x$ avec A et B des constantes qui peuvent être déterminées à l'aide des conditions initiales.

L'équation caractéristique est $r^2 + \omega^2 = 0$, on a $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines

complexes conjuguées $r_1 = \frac{i\sqrt{4\omega^2}}{2} = i\omega$ et $r_2 = -i\omega$, donc les solutions sont de la forme : $(A \cos \omega x + B \sin \omega x) e^0$ soit $A \cos \omega x + B \sin \omega x$.

3) Équations différentielles du type $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$

De même que pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1, on a :

La solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$ est la somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée et d'une de ses solutions particulières.

Exemple : Prenons l'équation

$$y''(x) - y'(x) + y(x) = x^2$$

On a vu précédemment que la solution de l'équation différentielle homogène associée est

$$\left(K_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + K_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) e^{\frac{x}{2}}$$

Une solution particulière est : $x^2 + 2x$, en effet $(x^2 + 2x)' = 2x + 2$ et $(x^2 + 2x)'' = 2$ et

$$2 - (2x + 2) + x^2 + 2x = x^2$$

Donc $\left(K_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + K_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 2x$ est solution de l'équation différentielle.

Recherche de la solution particulière : Méthode :

On va chercher la solution particulière f sous la forme $f(x) = x^2 + ax + b$ où a et b sont des réels à déterminer. $f(x) = x^2 + ax + b$;

$$f'(x) = 2x + a$$

$$f''(x) = 2$$

Donc $f''(x) - f'(x) + f(x) = 2 - 2x - a + x^2 + ax + b$ on simplifie au maximum

$2 + b - a + (a - 2)x + x^2 = x^2$ on procède par identification des coefficients, car deux polynômes sont égaux si et seulement leurs coefficients sont égaux, il vient $a = 2$ et $b = 0$ donc $x^2 + 2x$ est solution particulière.

Si on avait eu comme équation :

$y''(x) - y'(x) + y(x) = e^{-x}$, dans ce cas on cherche une solution particulière sous la forme $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ (car en dérivant deux fois on a la forme e^{-x})

$$f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$$

$$f''(x) = (-2ax + (2a - b))e^{-x} - (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x} \\ = (ax^2 + (-4a + b)x + 2a - 2b + c)e^{-x}$$

On remplace dans l'équation différentielle, il vient :

$$(ax^2 + (-4a + b)x + 2a - 2b + c)e^{-x} - (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x} + (ax^2 + bx + c)e^{-x} = e^{-x} \dots$$

$$3ax^2 + (-4a + b - 2a + b + b)x + 2a - 2b - b + c + c + c = 1$$

$$\text{D'où } a = 0, b = 0 \text{ et } c = \frac{1}{3}$$

$f(x) = \frac{e^{-x}}{3}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y''(x) - y'(x) + y(x) = e^{-x}$,

Donc $\left(K_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + K_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{\frac{x}{2}} + \frac{e^{-x}}{3}$ est solution de l'équation différentielle $y''(x) - y'(x) + y(x) = e^{-x}$.

Exercice 15 :

On considère y la fonction définie sur $\mathbb{R}$, de la variable x , dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation différentielle (E) : $9y''(x) - y(x) = 4$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E0) : $9y''(x) - y(x) = 0$
2. déterminer la solution particulière h de (E) sous la forme d'une constante
3. En déduire les solutions générales de (E).
4. Déterminer la fonction y solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Solution 15 :

1. $(E_0) : 9y''(x) - y(x) = 0$

C'est l'équation différentielle du 2nd ordre sans second membre associée à (E) . avec **a = 9 ; b = 0 ; c = -1**

Equation caractéristique : $9r^2 - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \times 9 \times (-1) = 36 > 0$

Donc on a deux solutions réelles : $r_1 = \frac{-1}{3}$ et $r_2 = \frac{1}{3}$

Donc les solutions de (E_0) sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(t) = \lambda e^{\frac{t}{3}} + \mu e^{-\frac{t}{3}}$ avec λ et μ deux **constantes réelles**.

2. Si h est constante alors $h(x) = A$ donc $h'(x) = h''(x) = 0$.

On remplace h dans l'équation (E) car elle est solution particulière de (E).

D'où : $9h''(x) - h(x) = 4 \Rightarrow 9 \times 0 - A = 4 \Rightarrow -A = 4$ donc $A = -4$

Donc la fonction constante solution de l'équation différentielle (E) est **$h(x) = A = -4$**

3. Avec la question 1 et 2, on en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme :

$y(t) = \lambda e^{\frac{t}{3}} + \mu e^{-\frac{t}{3}} - 4$ avec λ et μ deux **constantes réelles**.

4. D'après la question 3, les solutions de (E) sont de la forme : $y(t) = \lambda e^{\frac{t}{3}} + \mu e^{-\frac{t}{3}} - 4$

Si $y(0) = 0$ alors $y(0) = \lambda e^{\frac{0}{3}} + \mu e^{-\frac{0}{3}} - 4 = \lambda + \mu - 4 = 0$ car $e^0 = 1$ donc **$\lambda + \mu = 4$**

Si $y'(0) = 0$ alors on a besoin de $y'(t) : y'(t) = \frac{\lambda}{3} e^{\frac{t}{3}} - \frac{\mu}{3} e^{-\frac{t}{3}}$

Donc $y'(0) = \frac{\lambda}{3} e^{\frac{0}{3}} - \frac{\mu}{3} e^{-\frac{0}{3}} = \frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{3} = 0$ car $e^0 = 1$

D'où $\begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ \frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 2 \\ \mu = 2 \end{cases}$

Donc la solution est : **$y(t) = \lambda e^{\frac{t}{3}} + \mu e^{-\frac{t}{3}} - 4 = 2e^{\frac{t}{3}} + 2e^{-\frac{t}{3}} - 4$**

Exercice 16 :

On considère y la fonction définie sur $\mathbb{R}$, de la variable t , dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation différentielle (E) : $y''(t) + 2y'(t) = (4 + 3t)e^t$.

1. Résoudre l'équation différentielle : $y''(t) + 2y'(t) = 0$ (E')

2. Déterminer le réel A tel que $f(t) = Ate^t$ soit une solution particulière de (E)

3. En déduire les solutions générales de (E).

Solution 16 :

1/ Recherche des solutions de $y''(t) + 2y'(t) = 0$

C'est l'équation différentielle sans second membre associée à (E) avec **a = 1 ; b = 2 ; c = 0**.

Equation caractéristique : $r^2 + 2r = 0 \Rightarrow r(r + 2) = 0$ donc $r = 0$ ou $r = -2$

Donc les solutions de (E_0) sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(t) = \lambda e^{0t} + \mu e^{-2t} = \lambda + \mu e^{-2t}$ avec λ et μ 2 **constantes réelles**.

2/ Si $f(t) = Ate^t$ soit une solution particulière de (E) alors f doit vérifier $f''(t) + 2f'(t) = (4 + 3t)e^t$

On a donc besoin de :

- $f'(t) = Ae^t + Ate^t$ (attention f est mise sous la forme d'un produit ! revoir la dérivée d'un produit !!)
- $f''(t) = Ae^t + Ae^t + Ate^t = 2Ae^t + Ate^t$

Donc $f''(t) + 2f'(t) = 2Ae^t + Ate^t + 2(Ae^t + Ate^t) = 4Ae^t + 3Ate^t = A(4 + 3t)e^t = (4 + 3t)e^t$

Donc par identification $A = 1$

D'où la solution particulière sera : **$f(t) = Ate^t = te^t$**

3/ Donc les solutions générales de (E), avec la question 1 et 2, sont de la forme : **$y(t) = \lambda + \mu e^{-2t} + te^t$**

Exercice 17 :

On considère x la fonction définie sur $\mathbb{R}$, de la variable t , dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation différentielle (E) : $x''(t) + 4x(t) = -6 \sin(t)$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E0) : $x''(t) + 4x(t) = 0$
2. Déterminer les réels A et B tel que la solution particulière g de (E) s'écrive sous la forme : $g(t) = A \cos(t) + B \sin(t)$
3. En déduire les solutions générales de (E).
4. Déterminer la fonction x, solution de (E), vérifiant $x(0) = -1$ et $x'(0) = 0$

Solution 17 :

1. (E₀) : $x''(t) + 4x(t) = 0$.

C'est l'équation différentielle sans second membre associée à (E) avec **a = 1 ; b = 0 ; c = 4**

Equation caractéristique : $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 4 = -16 < 0$

Donc on a deux solutions complexes conjuguées : **$r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$**

Pour r_1 : la partie réelle est : $\alpha = 0$ et la partie imaginaire est : $\beta = 2$

Donc les solutions de (E') sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x(t) = e^{0t} (\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)$ avec λ et μ deux **constantes réelles**.

2. Si $g(t) = A \cos t + B \sin t$ est solution de (E) alors g vérifie l'équation différentielle : $g''(t) + 4g(t) = -6 \sin(t)$

On a alors besoin de calculer :

- $g'(t) = -A \sin t + B \cos t$
- $g''(t) = -A \cos t - B \sin t$

Donc $g''(t) + 4g(t) = -A \cos t - B \sin t + 4(A \cos t + B \sin t) = -6 \sin(t) \Leftrightarrow 3A \cos t + 3B \sin t = -6 \sin t$

$\Rightarrow$ Par identification : $\begin{cases} 3A = 0 \\ 3B = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -2 \end{cases}$ donc $g(t) = A \cos t + B \sin t = -2 \sin(t)$

3. Avec la question 1 et 2, on en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme : **$x(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t) - 2 \sin(t)$** où λ et μ sont des **constantes réelles quelconques**.

4. On cherche la solution de (E) donc d'après la question 3 : **$x(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t) - 2 \sin(t)$**

Or $x(0) = -1 \Rightarrow x(0) = \lambda \cos(0) + \mu \sin(0) - 2 \sin(0) = -1 \Rightarrow \lambda = -1$ car $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$

Pour $x'(0) = 1$, on a besoin de calculer $x'(t)$:

$x'(t) = -2\lambda \sin(2t) + 2\mu \cos(2t) - 2 \cos(t) \Rightarrow x'(0) = -2\lambda \sin(0) + 2\mu \cos(0) - 2 \cos(0) = 0 \Rightarrow 2\mu - 2 = 0 \Rightarrow \mu = 1$

Donc la solution particulière de l'équation différentielle (E) est :

$$x(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t) - 2 \sin(t) = -\cos(2t) + \sin(2t) - 2 \sin(t)$$

$\cos(2t) + \sin(2t) - 2 \sin(t)$

 Capture n°