

Nombres complexes :

1^{ière} Partie : Nombres complexe

Ensemble des nombres complexes (définitions, opérations)

Conjugué d'un nombre complexe

Inverse d'un nombre complexe

Formule du binôme de Newton

2^{nde} Partie : Nombres complexes : point de vue géométrique : (image, module argument, forme trigonométrique)

Représentation graphique d'un nombre complexe

Module et argument d'un nombre complexe

Forme algébrique et forme trigonométrique

Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 (cercle trigonométrique)

3^{ième} : Nombres complexes et trigonométrie

Formules trigonométriques

Forme exponentielle d'un nombre complexe

4^{ième} Partie : Utilisation des nombres complexes en géométrie.

Calculs de longueurs et d'angles

Inégalité triangulaire

Racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité

5^{ième} Partie : Résolution d'une équation.

Equation du second degré à coefficient réels : (Méthodes : Forme canonique, une racine connue, discriminant.)

Equation du second degré à coefficient complexes

Racine n -ième

Première partie : Nombres complexes

I. Ensemble des nombres complexes :

a. Définitions

Définition : On admet l'existence d'un ensemble noté $\mathbb{C}$, dont les éléments, appelés nombres complexes z , sont de la forme $a + ib$ où a et b sont des nombres réels quelconques et i (ou j en électricité pour éviter la confusion avec l'intensité) **un nouveau nombre tel que $i^2 = -1$.**

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.

$\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.

Dans $\mathbb{C}$, on définit une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$.

$z = a + ib$ où a est la partie réelle de z notée $Re(z) = a$ et b est la partie imaginaire de z notée $Im(z) = b$

Un nombre dont la partie réelle est nulle s'écrit $z = ib$. On dit que c'est un nombre imaginaire pur.

Si $b = 0$, alors z est un nombre réel.

L'équation $x^2 = -1$ a deux solutions dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, $S = \{-i; i\}$.

L'écriture $z = a + ib$ s'appelle la **forme algébrique** du nombre complexe.

Propriétés :

- **Egalité de nombres complexes :** $a + ib = a' + ib'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.
- Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle est nulle et sa partie imaginaire est nulle.

Exemple : $z_1 = 3 - 2,5i$ et $z_2 = \frac{12}{4} - \frac{5}{2}i$ donc $z_1 = z_2$

Démonstration : C'est la conséquence immédiate de l'unicité de la forme algébrique.

b. Opérations :

Somme de deux nombres complexes :

$$z_1 = a + ib \text{ et } z_2 = a' + ib' \text{ alors } z_1 + z_2 = (a + a') + i(b + b')$$

Exemple : $z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = -5 + 5i$

$$z_1 + z_2 =$$

Produit de deux nombres complexes :

$$z_1 = a + ib \text{ et } z_2 = a' + ib' \text{ alors } z_1 \times z_2 = (aa' - bb') + i(a'b + ab')$$

On retrouve ce résultat en développant $(a + ib)(a' + ib')$

$$\begin{aligned}(a + ib)(a' + ib') &= aa' + ab'i + a'bi + (i)^2 bb' \\ &= (aa' - bb') + i(a'b + ab')\end{aligned}$$

Exemple : $z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = -5 + 5i$

$$z_1 \times z_2 = (3 - 2i)(-5 + 5i)$$

$$z_1 \times z_2 =$$

Carré d'un nombre complexe :

$$z_1 = a + ib \text{ alors } z_1^2 = (a^2 - b^2) + 2iab$$

On retrouve ce résultat en développant $(a + ib)(a + ib)$

Exemples : $z_1 = 3 + 2i$

$$z_1^2 = (3 + 2i)^2 = 9 + 2 \times 3 \times 2i + 4i^2 \text{ (on a appliqué la formule de l'identité remarquable)}$$

$$z_1^2 =$$

$$z_2 = 3 - 2i$$

$$z_2^2 = (3 - 2i)^2 =$$

II. Conjugué d'un nombre complexe (forme algébrique) :

a. Définition

Définition : Le nombre complexe conjugué de $z = a + ib$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$

Exemples :

$$z_1 = 3 + 2i \text{ alors } \bar{z}_1 =$$

$$z_2 = 3 + 0i \text{ alors } \bar{z}_2 =$$

$$z_3 = 0 + 2i \text{ alors } \bar{z}_3 =$$

$$z_4 = 4 - 5i \text{ alors } \bar{z}_4 =$$

Propriété : $\bar{\bar{z}} = z$

Démonstration : $z = a + ib$, $\bar{z} = a - ib$ et $\bar{\bar{z}} = a + ib = z$

Propriétés : z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$ et z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Démonstrations :

$$z = \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow a + ib = a - ib$$

$$\Leftrightarrow 2ib = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 0$$

$$z = -\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow a + ib = -a + ib$$

$$\Leftrightarrow 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0$$

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Démonstration :

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$$

b. Conjugué d'une somme de nombres complexes

Propriété : Le conjugué d'une somme de nombres complexes est égale à la somme des conjugués.

Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Démonstration : $\overline{z + z'} = \overline{a + ib + a' + ib'}$

$$= \overline{a + a' + i(b + b')}$$

$$= a + a' - i(b + b')$$

$$= a - ib + a' - ib'$$

$$= \overline{a + ib} + \overline{a' + ib'}$$

$$= \bar{z} + \bar{z'}$$

Exemple : $z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = -5 + 5i$

$$\overline{z_1 + z_2} =$$

c. Conjugué d'un produit de nombres complexes

Propriété : Le conjugué d'un produit est égale au produit des conjugués.

Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$

Démonstration :

$$\begin{aligned}\overline{z \times z'} &= \overline{(a + ib) \times (a' + ib')} & \bar{z} \times \bar{z'} &= (\overline{a + ib}) \times (\overline{a' + ib'}) \\ &= \overline{aa' + iab' + iba' + i^2bb'} & &= (a - ib) \times (a' - ib') \\ &= \overline{aa' - bb' + i(ab' + ba')} & &= aa' - bb' - i(ab' + ba') \\ &= aa' - bb' - i(ab' + ba') & &= aa' - bb' - i(ab' + ba')\end{aligned}$$

Donc : $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

Exemple : $z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = -5 + 5i$

$$\overline{z_1 \times z_2} =$$

III. Inverse d'un nombre complexe

a. Définition

Propriété : L'inverse d'un nombre complexe non nul est : $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}$

Démonstration : $z = a + ib$, avec z non nul alors :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Exemple : $z_1 = 3 - 2i$

$$\frac{1}{z_1} =$$

Conjugué de l'inverse d'un nombre complexe non nul :

Propriété : Le conjugué de l'inverse d'un nombre complexe non nul est égale à l'inverse du conjugué.

Pour tout $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

Démonstration :

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \overline{\left(\frac{1}{a+ib}\right)} = \overline{\left(\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}\right)} = \overline{\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \\ &= \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i \\ \frac{1}{\bar{z}} &= \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a+ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i \\ \text{Donc : } \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \frac{1}{\bar{z}}\end{aligned}$$

Exemple : $z_1 = 3 - 2i$

$$\frac{1}{\bar{z}_1} =$$

b. Conjugué d'un quotient de nombres complexes :

Propriété : Le conjugué du quotient de nombres complexes est égale au quotient des conjugués.

Pour tout $z' \neq 0$, z' et $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

Démonstration : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{\bar{z}'} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

Exemple : $z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = -5 + 5i$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} =$$

Conjugué d'une puissance entière d'un nombre complexe :

Propriété : Le conjugué de la puissance entière d'un nombre complexe est égale à la puissance du conjugué.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Démonstration :

On procède par récurrence.

- L'initialisation pour $n = 1$ est triviale.
- Hérédité :

- Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier $k > 1$ tel que la propriété soit vraie :

$$\overline{z^k} = \bar{z}^k.$$

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k + 1$: $\overline{z^{k+1}} = \bar{z}^{k+1}$.

$$\begin{aligned}
\overline{z^{k+1}} &= \overline{z^k \times z} \\
&= \overline{z^k} \times \bar{z}, \text{ d'après la propriété c.} \\
&= \bar{z}^k \times \bar{z}, \text{ par hypothèse de récurrence.} \\
&= \bar{z}^{k+1}
\end{aligned}$$

- Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n , soit : $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $3z - 6 = 4i + z$ b) $3z - 2 = \bar{z} + 1$

IV. Formule du binôme de Newton

Rappels : $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots \times 2 \times 1$ et $1! = 1$ et $0! = 1$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Remarques :

- $n!$ (se lit factorielle de n ou n factorielle) cela correspond au nombre de permutations sans répétition.

Schématiquement : si j'ai n éléments à disposer dans n emplacements :

1^{ère} case j'ai n choix, 2^{de} case j'ai $(n - 1)$ choix ... $n^{\text{ième}}$ case je n'ai plus qu'un seul choix. D'où $n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots \times 2 \times 1$

- $\frac{n!}{(n-k)!}$ cela correspond au nombre d'arrangements (ou de dispositions) sans répétition de n éléments pris k à k , on trouve aussi les notations A_n^k ; $A_{n,k}$; D_n^k ; $D_{n,k}$

Schématiquement : si j'ai n éléments à placer dans k cases

1^{ère} case j'ai n choix, 2^{de} case j'ai $(n - 1)$ choix ... $k^{\text{ième}}$ case j'ai $(n - k + 1)$ choix. D'où $n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots \times (n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

- Pour $\binom{n}{k}$ on trouve aussi les notations C_n^k ou $C_{n,k}$, cela correspond au nombre de combinaisons sans répétitions. On parle aussi de combinatoire. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Schématiquement : Si je tire sans remise k objets parmi n sans tenir compte de l'ordre d'apparition, on peut représenter ces k objets par une partie à k éléments d'un ensemble à n éléments : Pour déterminer le nombre de combinaisons, on peut déterminer le nombre d'arrangement de k objets et diviser par le nombre de dispositions obtenues les unes par rapport aux autres par une permutations soit : $\binom{n}{k} = C_n^k = C_{n,k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Toutes ces notions seront revues en FIMI2 notamment en probabilités.

Théorème : Pour tous nombres complexes a et b et pour tout entier naturel n , on a : $(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$

$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (formule du binôme)

Démonstration : On procède par récurrence.

- Initialisation : Pour $n = 0$: $(a + b)^0 = 1$ et $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$

- Hérédité :

- Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie :

$$(a + b)^k = \binom{k}{0} a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \binom{k}{2} a^{k-2} b^2 + \dots + \binom{k}{k-1} a b^{k-1} + \binom{k}{k} b^k$$

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k + 1$:

$$(a + b)^{k+1} = \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k+1}{k} a b^k + \binom{k+1}{k+1} b^{k+1}$$

$$\begin{aligned} (a + b)^{k+1} &= (a + b)(a + b)^k \\ &= (a + b) \left(\binom{k}{0} a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \binom{k}{2} a^{k-2} b^2 + \dots + \binom{k}{k-1} a b^{k-1} + \binom{k}{k} b^k \right) \\ &= \binom{k}{0} a^{k+1} + \binom{k}{1} a^k b + \binom{k}{2} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k}{k-1} a^2 b^{k-1} + \binom{k}{k} a b^k \\ &\quad + \binom{k}{0} a^k b + \binom{k}{1} a^{k-1} b^2 + \binom{k}{2} a^{k-2} b^3 + \dots + \binom{k}{k-1} a b^k + \binom{k}{k} b^{k+1} \\ &= \binom{k}{0} a^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0} \right] a^k b + \left[\binom{k}{2} + \binom{k}{1} \right] a^{k-1} b^2 + \dots \\ &\quad + \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} \right] a b^k + \binom{k}{k} b^{k+1} \end{aligned}$$

Or, $\binom{k}{0} = 1$ et $\binom{k}{k} = 1$

Donc :

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0} \right] a^k b + \left[\binom{k}{2} + \binom{k}{1} \right] a^{k-1} b^2 + \dots + \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} \right] a b^k + b^{k+1}$$

Et, d'après la formule de Pascal, on a :

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k+1}{k} a b^k + b^{k+1}$$

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k+1}{k} a b^k + \binom{k+1}{k+1} b^{k+1}$$

Car $\binom{k+1}{0} = 1$ et $\binom{k+1}{k+1} = 1$

• Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n .

Application :

Développer l'expression $(z+5)^6$.

$$(z+5)^6 = \binom{6}{0} z^6 + \binom{6}{1} z^5 \times 5 + \binom{6}{2} z^4 \times 5^2 + \binom{6}{3} z^3 \times 5^3 + \binom{6}{4} z^2 \times 5^4 + \binom{6}{5} z \times 5^5 + \binom{6}{6} 5^6$$

On construit un triangle de Pascal :

$\begin{smallmatrix} k \\ n \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

On lit les coefficients sur la dernière ligne du tableau.

$$(z+5)^6 = 1z^6 + 6z^5 \times 5 + 15z^4 \times 5^2 + 20z^3 \times 5^3 + 15z^2 \times 5^4 + 6z \times 5^5 + 1 \times 5^6$$

$$\text{Soit : } (z+5)^6 = z^6 + 30z^5 + 375z^4 + 2500z^3 + 9375z^2 + 18750z + 15625$$

Partie 2 : Nombres complexes : point de vue géométrique : (image, module argument, forme trigonométrique)

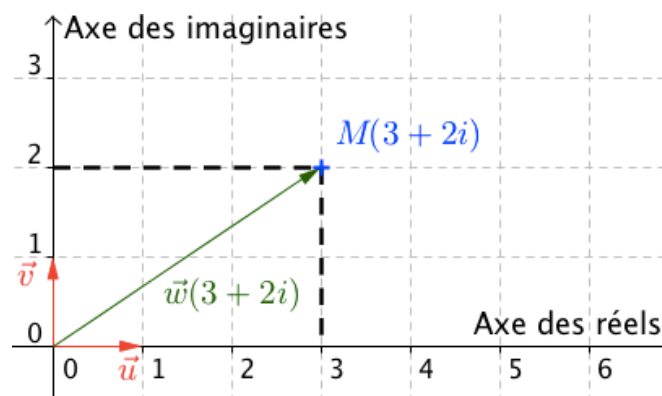
V. Représentation graphique d'un nombre complexe

a. Définitions :

Définition 1 : Un repère orthonormé du plan $(O; \vec{u}; \vec{v})$, permet de représenter géométriquement les nombres complexes s'appelle plan complexe. La droite (OU) est la droite des réels (Re) et la droite (OV) est la droite des imaginaires purs (Im).

Définition 2 : Le nombre complexe $z = a + ib$ a pour image le point image M de coordonnées $M(a; b)$ et le vecteur image $\vec{w}(a; b)$.

Exemple : $z = 3 + 2i$



Dans notre exemple : Le point $M(3; 2)$ et le vecteur $\vec{w}(3; 2)$ sont les images du nombre complexe $z = 3 + 2i$

Le point $U(0; 1)$ et le vecteur $\vec{u}(1; 0)$ sont les images du nombre complexe $z_1 = 1 + 0i$.

Le point $V(0; 1)$ et le vecteur $\vec{v}(0; 1)$ sont les images du nombre complexe $z_2 = 0 + i$

Définition 3 : L'affixe du point M de coordonnées $M(a; b)$ et du vecteur $\vec{w}(a; b)$ est le nombre complexe $z = a + ib$

Dans notre exemple le nombre complexe $z = 3 + 2i$ est l'affixe du point $M(3; 2)$ et du vecteur $\vec{w}(3; 2)$.

Le nombre complexe $z_1 = 1 + 0i$ est l'affixe du point $U(0; 1)$ et du vecteur $\vec{u}(1; 0)$

Le nombre complexe $z_2 = 0 + i$ est l'afixe du point $(0; 1)$ et du vecteur $\vec{v}(0; 1)$

Définition 4 : Le vecteur image du nombre complexe $z = a + ib$ est le vecteur $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

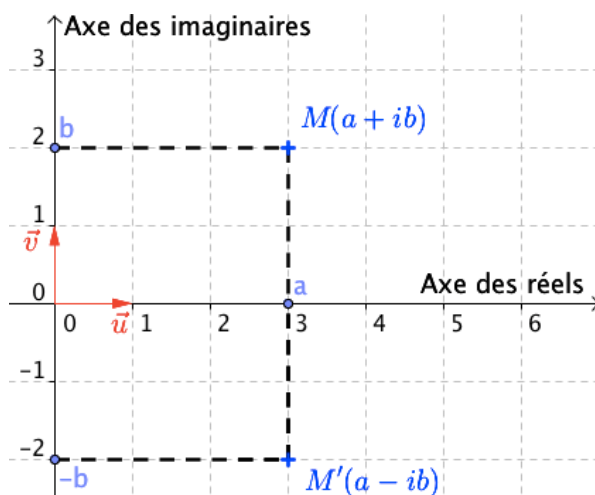
L'afixe du vecteur $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ est le nombre complexe $z = a + ib$

Exemple :

1 est l'afixe du vecteur $\vec{u}$ et i est l'afixe du vecteur $\vec{v}$

$\vec{u}$ est l'image du nombre complexe $z_1 = 1$ et $\vec{v}$ est l'image du nombre complexe $z_2 = i$

Remarque : Soit M l'image du nombre complexe $z = a + ib$, l'image M' du conjugué $\bar{z} = a - ib$ est le point symétrique du point M par rapport à la droite des réels.



Propriété : Dans un repère orthonormé direct du plan complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$, soit les points $A(a; b)$ et $B(a'; b')$ d'afixes respectifs les nombres complexes $z_A = a + ib$ et $z_B = a' + ib'$, alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

Démonstration :

On pose : $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

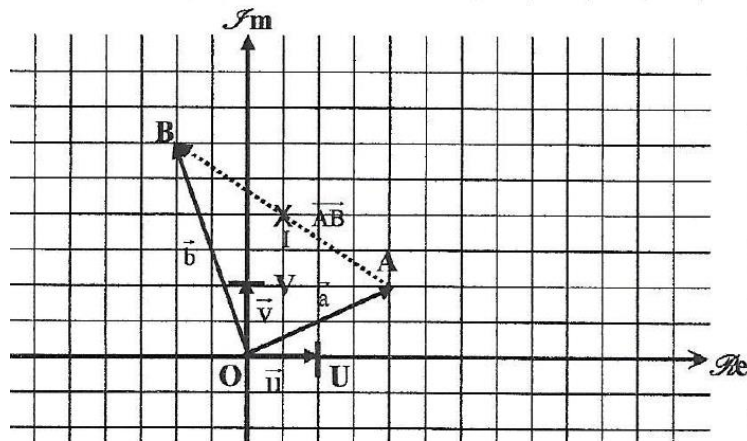
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$ donc son affixe est égal à :

$$(x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = z_B - z_A.$$

Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc son affixe est égale à :

$$\frac{x_A + x_B}{2} + i \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{x_A + iy_A + x_B + iy_B}{2} = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Exemple et Illustration graphique :



$$z_A = 2 + i \text{ et } z_B = -1 + 3i \text{ alors } z = z_B - z_A$$

$$z = -1 + 3i - 2 - i = -3 + 2i$$

z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2 + i - 1 + 3i}{2} = \frac{1}{2} + 2i$$

b. Addition :

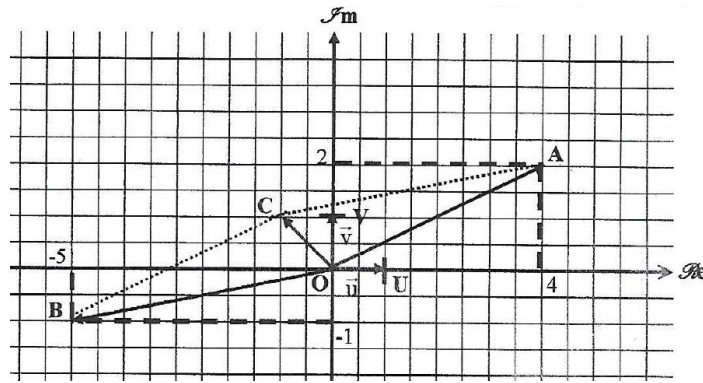
Propriété : Soient les nombres complexes $z_A = a + ib$ et $z_B = a' + ib'$ étant les affixes respectifs des points A(a ; b) et B(a' ; b'), alors $z = z_A + z_B$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

L'addition de deux nombres complexes « correspond » à l'addition de deux vecteurs.

Démonstration : Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ sont $(x_A + x_B; y_A + y_B)$ donc son affixe est égale à :

$$z = x_A + x_B + i(y_A + y_B) = x_A + iy_A + x_B + iy_B = z_A + z_B$$

Exemple et Illustration graphique :



$z_A = 4 + 2i$ et $z_B = -5 - i$ alors $z = z_A + z_B = -1 + i$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

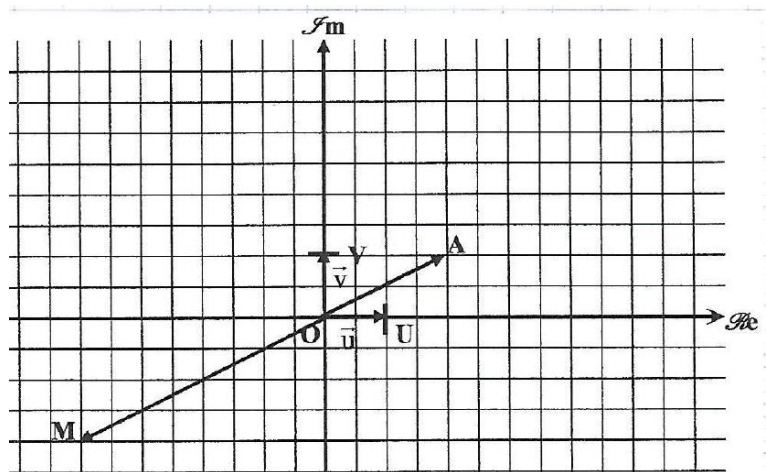
c. Multiplication par un réel :

Propriété : Soit $z_A = x_A + iy_A$ le nombre complexe étant l'affixe du point $A(x_A ; y_A)$ et α un nombre réel, alors αz_A est l'affixe de $\alpha \overrightarrow{OA}$.

Démonstration : Les coordonnées du vecteur $\alpha \overrightarrow{OA}$ sont $(\alpha x_A ; \alpha y_A)$

$$z = \alpha x_A + i \alpha y_A = \alpha(x_A + iy_A) = \alpha z_A$$

Exemple et Illustration graphique :



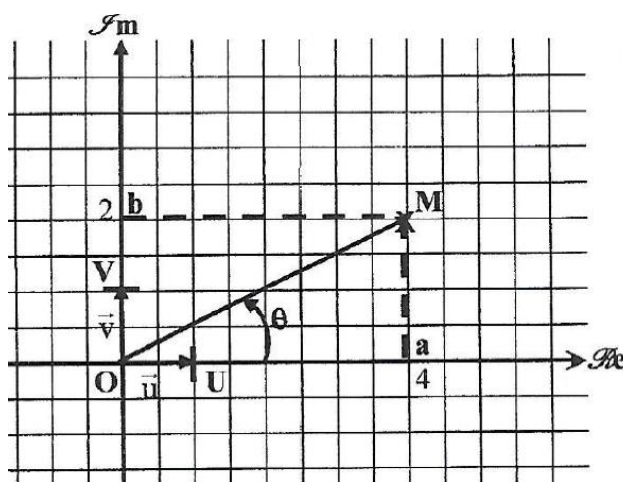
$z_A = 2 + i$ est l'affixe du point $A(2 ; 1)$ et $\alpha = -2$ un nombre réel, alors $-2z_A = -4 - 2i$ est l'affixe du vecteur $-2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM}$

VI. Module et argument d'un nombre complexe (forme trigonométrique)

a. Définition

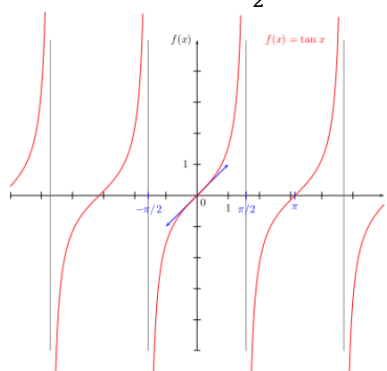
L'image M d'un nombre complexe $z = a + ib$ est caractérisée par :

- Son **module** noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$, il correspond à la longueur du segment $[OM]$,
- Son **argument** (si $z \neq 0$) noté $\arg(z)$ ou θ , il correspond à la mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.



L'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$: $\widehat{uOM}$ entre (OU) et (OM) , il est défini à un nombre de tour près sur le cercle trigonométrique ie. à $2k\pi$ près où k est un nombre entier relatif tel que :

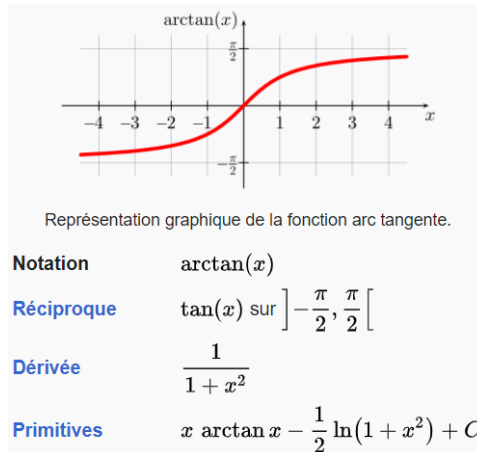
- $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{|z|}$ (cosinus : côté adjacent/hypoténuse)
- $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{|z|}$ (sinus : côté opposé/hypoténuse)
- $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{b}{a}$ (la fonction tangente est impaire, périodique de période π avec $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$)



d'où $\theta = \arctan \frac{b}{a}$ si $a > 0$ et $\theta = \arctan \frac{b}{a} + \pi$ si $a < 0$

En effet sur le schéma on observe bien que si $a > 0$; $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ et si $a < 0$; $\theta \in \left] \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2} \right[$

La fonction arc tangente :



Exemple : $z = 4 + 2i$

$$|z| =$$

$$\cos \theta =$$

$$\sin \theta =$$

$$\theta =$$

Propriété sur les modules et les arguments : Pour tout nombre complexe z

- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$
- $|z| = |\bar{z}|$ et si $z \neq 0$, $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $|-z| = |z|$ et si $z \neq 0$, $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}$
- $|z|^2 = z\bar{z}$

Démonstration :

1) et 2) Par définition

$$3) |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

$$4) |-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

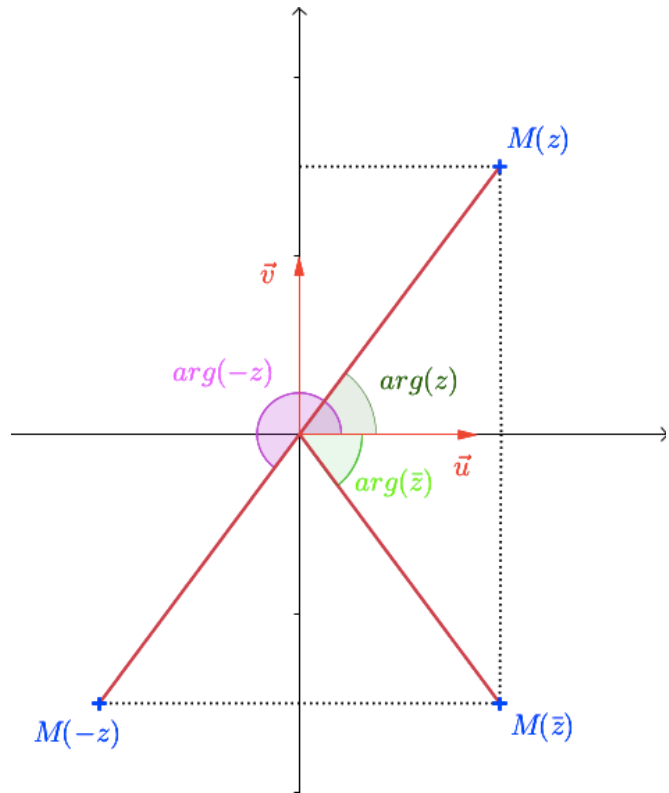
$$5) z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Propriété: soit le nombre complexe z

- z est un réel non nul si et seulement si $\arg(z) = 0 \ (2\pi)$ ou $\arg(z) = \pi \ (2\pi)$
- z est un imaginaire pur non nul si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$ ou $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} \ (2\pi)$

Démonstrations :

- 1) Le point M d'affixe z appartient à l'axe des réels.
- 2) Le point M d'affixe z appartient à l'axe des imaginaires.



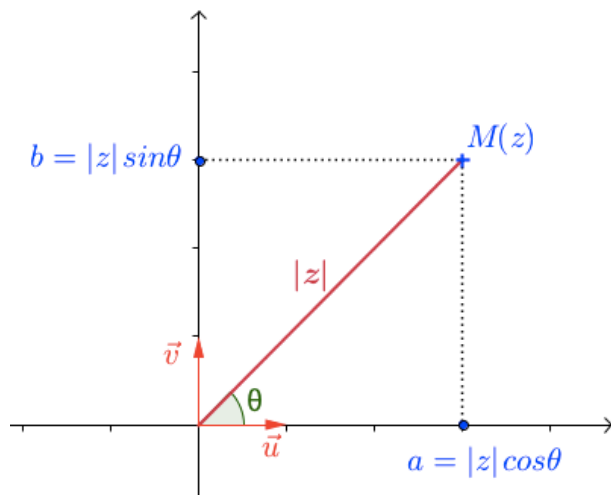
VII. Forme algébrique et forme trigonométrique

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, on pose $\theta = \arg(z)$, on a alors $a = |z| \cos \theta$ et $b = |z| \sin \theta$.

En effet, en considérant le triangle rectangle, on a :

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{|z|}$$

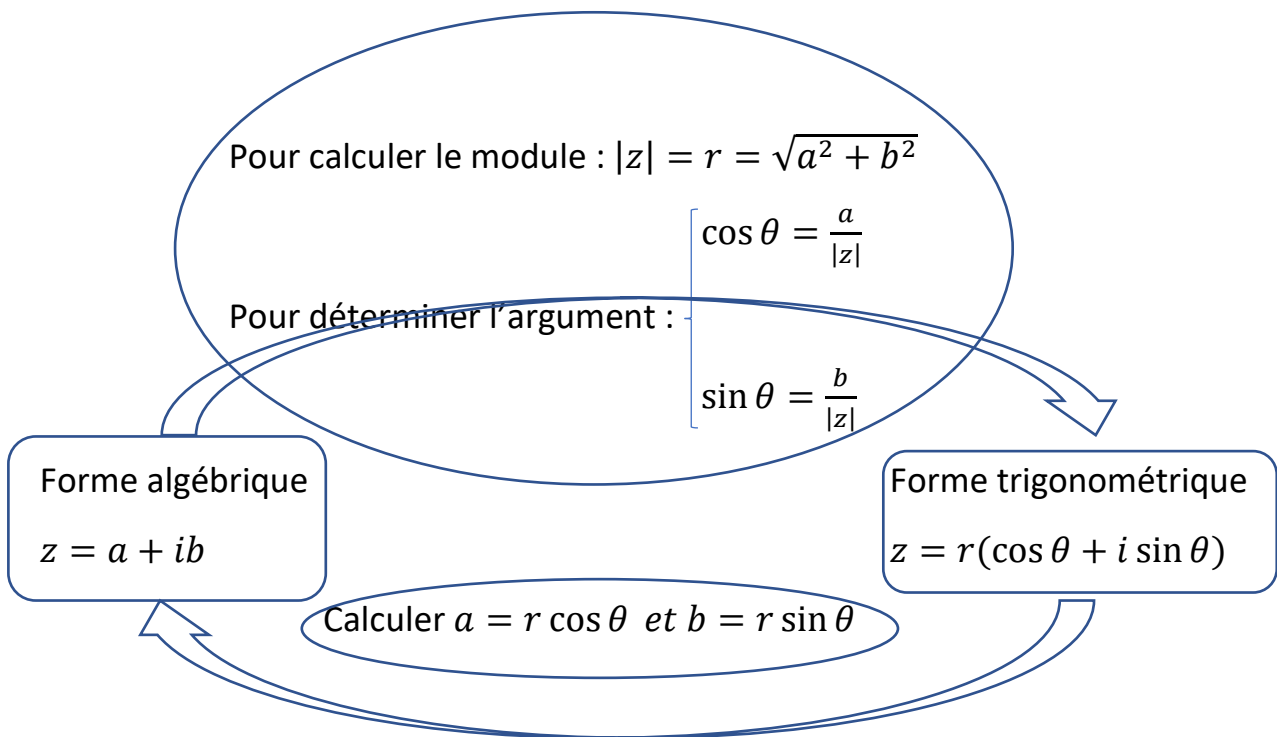


Définition : Soit z un nombre complexe non nul, on appelle forme trigonométrique de z l'écriture $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\theta = \arg(z)$

Soit r et θ des nombres réels

$z = a + ib$ est la forme algébrique du nombre complexe

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ est la forme trigonométrique du nombre complexe.



Application :

Écrire le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ sous sa forme trigonométrique.

- On commence par calculer le module de z :

$$|z| =$$

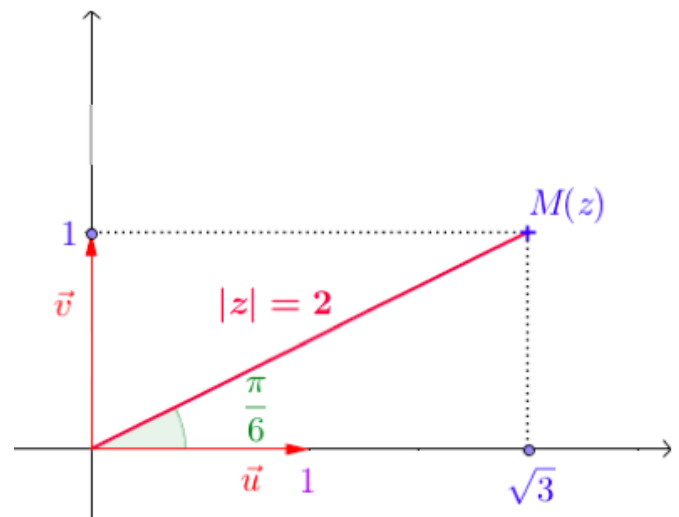
- En calculant $\frac{z}{|z|}$, on peut identifier plus facilement la partie réelle de z et sa partie imaginaire :

$$\frac{z}{|z|} =$$

On cherche donc un argument θ de z tel que :

$$\cos \theta = \quad \text{et} \quad \sin \theta =$$

$$\theta =$$



Propriétés : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et n entier naturel non nul.

Produit :	$ zz' = z z' $	$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
Puissance :	$ z^n = z ^n$	$\arg(z^n) = n \arg(z)$
Inverse :	$\left \frac{1}{z}\right = \frac{1}{ z }$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
Quotient :	$\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Démonstration :

- **Module d'un produit :**

On pose $\theta = \arg(z)$ et $\theta' = \arg(z')$.

$$\begin{aligned} zz' &= |z|(\cos \theta + i \sin \theta)|z'|(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= |z||z'|((\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')) \\ &= |z||z'|(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \end{aligned}$$

Donc le module de zz' est $|z||z'|$.

- **Module d'une puissance :**

On procède par récurrence.

- L'initialisation pour $n = 1$ est triviale.
- Hérédité :

Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier $k > 1$ tel que la propriété soit vraie :

$$|z^k| = |z|^k.$$

Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k + 1$: $|z^{k+1}| = |z|^{k+1}$.

$$\begin{aligned} |z^{k+1}| &= |z^k z| \\ &= |z^k| |z|, \text{ d'après la propriété du produit.} \\ &= |z|^k |z|, \text{ par hypothèse de récurrence.} \\ &= |z|^{k+1} \end{aligned}$$

- Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n , soit : $|z^n| = |z|^n$.

VIII. Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.

a. Cercle trigonométrique

Définition : L'ensemble des points du plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ dont l'affixe appartient au cercle de centre O et de rayon 1 est noté $\mathbb{U}$. Ce cercle s'appelle le cercle trigonométrique.

Propriété : Soit z un nombre complexe appartenant à $\mathbb{U}$, on a alors $a^2 + b^2 = 1$.

Démonstration : Par définition de $\mathbb{U}$, le module de z vaut 1 donc : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, on a alors $a^2 + b^2 = 1$.

b. Stabilité de $\mathbb{U}$

L'objectif de cette partie est de prouver que $\mathbb{U}$ est stable par produit et passage à l'inverse.

Soit z et z' deux nombres complexes appartenant à $\mathbb{U}$.

Démontrer que zz' et $\frac{1}{z}$ appartiennent à $\mathbb{U}$.

$$\begin{aligned} - |zz'| &= |z||z'| \\ &= 1 \times 1 \text{ car } z \text{ et } z' \text{ appartiennent à } \mathbb{U}. \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc le produit zz' a pour module 1 et appartient donc à $\mathbb{U}$.

On dit que $\mathbb{U}$ est stable par produit.

$$\begin{aligned} - \left| \frac{1}{z} \right| &= \frac{1}{|z|} \\ &= \frac{1}{1} \text{ car } z \text{ appartient à } \mathbb{U}. \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc l'inverse $\frac{1}{z}$ a pour module 1 et appartient donc à $\mathbb{U}$.

On dit que $\mathbb{U}$ est stable par passage à l'inverse.

Partie 3 : Nombres complexes et trigonométrie

IX. Formules trigonométriques :

a. Formules d'addition :

Propriétés : Soit a et b deux nombres réels quelconques. On a :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Démonstrations

- 1^{ère} formule :

On considère un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan et le cercle trigonométrique de centre O .

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de norme 1 tels que : $(\vec{i} ; \vec{u}) = a$ et $(\vec{i} ; \vec{v}) = b$.

On a alors : $\vec{u} \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$.

Ainsi : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

On a également :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})$$

$$= 1 \times 1 \times \cos(b - a) = \cos(a - b)$$

$$\text{D'où : } \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

- 2^e formule :

$$\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) = \cos a \cos(-b)$$

$$+ \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

- 3^e formule :

$$\sin(a - b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a - b)\right)$$

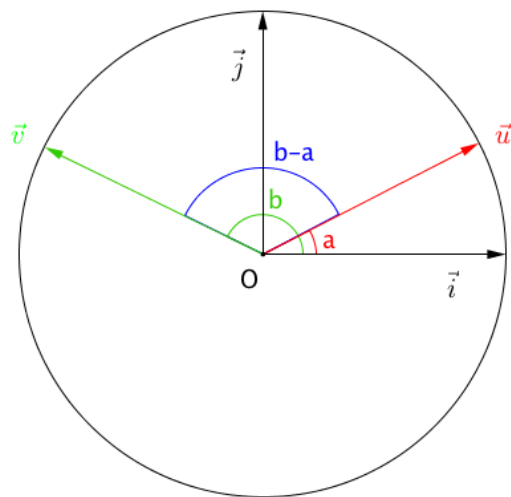
$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b$$

$$= \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

- 4^e formule :

$$\sin(a + b) = \sin(a - (-b)) = \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$



b. Formules de duplication :

Propriété : Soit a un nombre réel, on a :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \cos a \sin a$$

Démonstrations :

On reprend les résultats des formules d'addition dans le cas où $a = b$:

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \cos a \sin a$$

On a également : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ donc :

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2 \cos^2 a - 1$$

Et :

$$\cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$$

Ces formules vont permettre de calculer des valeurs de sin et cos et de résoudre des équations trigonométriques.

X. Forme exponentielle d'un nombre complexe

Posons $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$ et $f(\theta') = \cos \theta' + i \sin \theta'$

Calculons : $f(\theta) \times f(\theta') = (\cos \theta + i \sin \theta) \times (\cos \theta' + i \sin \theta')$

$$= \cos \theta \cos \theta' + i^2 \sin \theta \sin \theta' + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')$$

$$= (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')$$

On sait que $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

et que $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$$f(\theta) \times f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$$

$$f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta + \theta')$$

On a aussi $f(0) = 1$,

Comme la fonction exponentielle qui « transforme les sommes en produits » et $f(0) = 1$

Définition : Pour tout nombre réel θ , on pose $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$, avec cette notation le nombre complexe non nul z s'écrit $z = |z|e^{i\theta}$, on appelle cette écriture la forme exponentielle.

Remarques :

On peut trouver aussi la notation $z = [r; \theta]$ où $r = |z|$

$e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ .

Exemple : $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$$|z| =$$

$$\text{Et } \cos \theta = \quad \text{et } \sin \theta =$$

$$\text{D'où } \theta =$$

$$z =$$

Propriété : $e^{i\pi} = -1$

Démonstration : $z = -1$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2} = 1 \text{ et } \cos \theta = \frac{-1}{1} = -1 \text{ et } \sin \theta = 0$$

$$\text{D'où } \theta = \pi \text{ ou } -\pi \text{ et } z = e^{i\pi} = e^{-i\pi}$$

Autres exemples :

$$z = i, \text{ alors } |z| = 1 \text{ et } \cos \theta = 0 \text{ et } \sin \theta = 1 \text{ d'où } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{3\pi}{2} \text{ donc } z = e^{i\frac{\pi}{2}} \\ \text{ou } z = e^{-i\frac{3\pi}{2}}$$

$$z = -i, \text{ alors } |z| = 1 \text{ et } \cos \theta = 0 \text{ et } \sin \theta = -1 \text{ d'où } \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2} \\ \text{donc } z = e^{i\frac{3\pi}{2}} \text{ ou } z = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Propriétés : Pour tous réels θ et θ' , on a :

$$e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad \textbf{Formule de Moivre}$$

Exemples :

$$\textbf{Exemple 1 : } z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z' = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z \times z' =$$

$$\textbf{Exemple 2 : } z = 2e^{i\pi}$$

$$z^3 =$$

$$\textbf{Exemple 3 : } z = 6e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z' = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{z}{z'} =$$

Application de la formule de Moivre :

Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.

$$\cos(3x) = \operatorname{Re} (\cos(3x) + i \sin(3x))$$

Or, selon la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} \cos(3x) + i \sin(3x) &= (\cos x + i \sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x + 3i^2 \cos x \sin^2 x + i^3 \sin^3 x, \end{aligned}$$

en appliquant la formule du binôme de Newton pour développer.

$$\begin{aligned} \text{Soit : } \cos(3x) + i \sin(3x) &= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + i(3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x) \end{aligned}$$

On en déduit que : $\cos(3x) = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$

Or, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, donc :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^3 x \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x\end{aligned}$$

Formule d'Euler : Pour tout réels θ , on a : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Application de la formule d'Euler :

1) Linéariser (*) l'expression $\cos^3 x$.

2) En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^3 x$.

(*) Linéariser une telle expression consiste à la ramener comme somme d'expressions du type $\cos ax$ et $\sin ax$.

1) On applique une formule d'Euler :

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3$$

= ,

en appliquant la formule du binôme de Newton pour développer.

Soit encore :

$$\cos^3 x =$$

2)

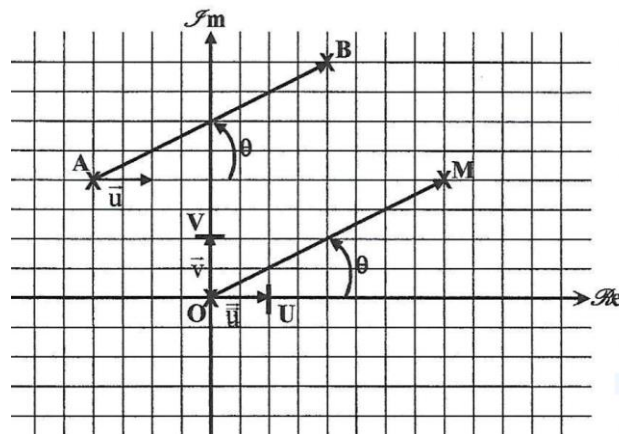
Partie 4 : Utilisation des nombres complexes en géométrie.

XI. Calculs de longueurs et d'angles

Propriétés : Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

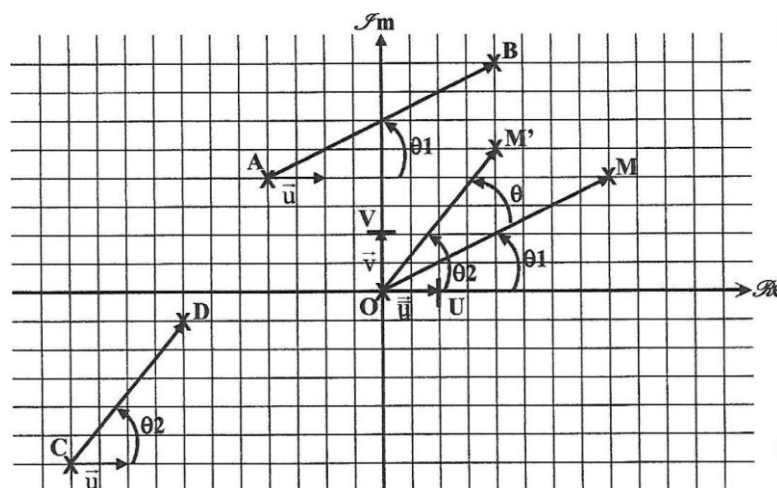
* Soit le point A d'affixe z_A et le point B d'affixe z_B , alors la distance $AB = |z_B - z_A|$ et l'angle entre $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ est $\theta = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \pmod{2\pi}$.

Illustration graphique :



* Soit A le point d'affixe z_A , le point B d'affixe z_B , le point C d'affixe z_C et le point D d'affixe z_D distincts deux à deux, alors l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est $\theta = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$.

Illustration graphique :



Démonstrations :

* $AB = |z_B - z_A|$

On considère un point E tel que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$.

Alors E a pour affixe $z_E = z_B - z_A$.

$$|z_B - z_A| = |z_E - 0| = OE$$

Comme $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$, $OE = AB$ donc $|z_B - z_A| = AB$.

$$* (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

On considère un point E tel que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$.

Alors E a pour affixe $z_E = z_B - z_A$.

Donc $(\vec{u}; \overrightarrow{OE}) = \arg(z_B - z_A)$ et donc $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$.

$$* (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{CD})$$

$$= (\vec{u}; \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AB})$$

$$= \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)$$

$$= \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

Application 1 :

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = -2 - i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = -1 + 2i$.

- 1) Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A .
- 2) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A .

Application 2 : Déterminer un ensemble de points

Soit M un point d'affixe z .

Dans chaque cas, déterminer et représenter :

- 1) L'ensemble des points M tels que $|z - 2i| = 3$.
- 2) L'ensemble des points M tels que $|iz - 3| = 1$.
- 3) L'ensemble des points M tels que $|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$.
- 4) L'ensemble des points M tels que $\frac{|z-i|}{|z|} = 2$.
- 5) L'ensemble des points M tels que $\arg(z) = \frac{\pi}{4} [\pi]$.

XII. Inégalité triangulaire

Soient les nombres complexes $z_1 = a + ib$ et $z_2 = a' + ib'$ d'images respectives les point $N_1(a; b)$ et $N_2(a', b')$

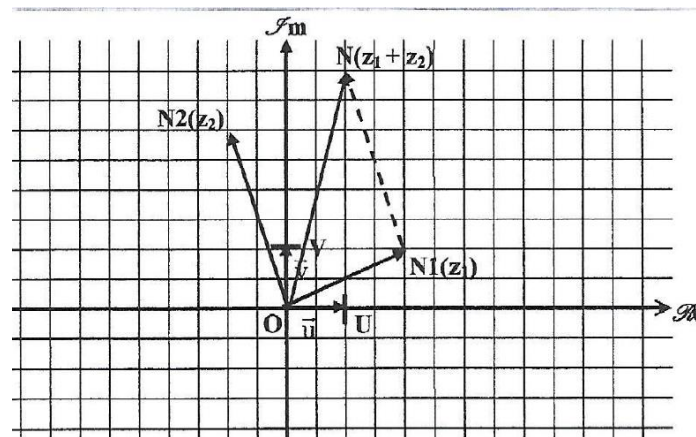
Soit N le point défini par $\overrightarrow{N_1N} = \overrightarrow{ON_2}$, on a $ON_1 = |z_1|$ et $ON_2 = N_1N = |z_2|$

D'autre part $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON_1} + \overrightarrow{N_1N} = \overrightarrow{ON_1} + \overrightarrow{ON_2}$ donc N a pour affixe $z_1 + z_2$ et $ON = |z_1 + z_2|$

Dans le triangle ON_1N , on a l'inégalité triangulaire $ON \leq ON_1 + N_1N$

Propriété : pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , on a $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Illustration graphique :



Exemple :

$$z_1 = 2 + i \text{ et } z_2 = -1 + 3i$$

$$z_1 + z_2 =$$

$$|z_1 + z_2| =$$

$$|z_1| + |z_2| =$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

XIII. Racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité

a. Détermination de l'ensemble $\mathbb{U}_n$

On cherche à déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant l'égalité $z^n = 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition : Une racine n -ième de l'unité est un nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème : L'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines de l'unité possède exactement n racines : $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec k entier compris entre 0 et $n - 1$.

Démonstration :

Existence :

Si $z^n = 1$ alors $|z|^n = |z^n| = 1$ et donc $|z| = 1$.

On cherche ainsi, les nombres complexes de la forme $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in [0 ; 2\pi[$.

Soit : $z^n = 1$

$$(e^{i\theta})^n = 1$$

$$e^{in\theta} = 1$$

$$n\theta = 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\theta = \frac{2k\pi}{n}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

On peut ainsi restreindre les valeurs prises par k à l'ensemble des entiers compris entre 0 et $n - 1$.

Donc $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec k entier compris entre 0 et $n - 1$, est une racine de l'unité.

Unicité :

Supposons qu'il existe k' entier compris entre 0 et $n - 1$, tel que $w_k = w_{k'}$.

$$\text{Alors : } e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}}$$

$$\frac{2k\pi}{n} = \frac{2k'\pi}{n} + 2l\pi, \text{ avec } l \in \mathbb{Z}.$$

$$2k\pi = 2k'\pi + 2ln\pi$$

$$k = k' + ln$$

$$k - k' = ln$$

Donc n divise $k - k'$.

Or $k - k'$ est un entier compris entre 0 et $n - 1$. Donc n ne peut pas diviser $k - k'$.

Et donc $l = 0$. Soit $k = k'$.

b. Représentation géométrique

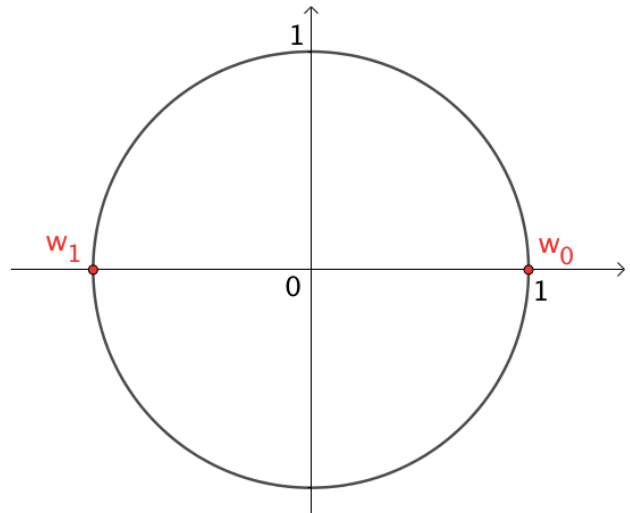
1) Cas $n = 2$:

Si on applique le théorème ci-dessus, les racines de l'équation $z^2 = 1$ sont :

$$w_0 = e^{i\frac{2 \times 0 \times \pi}{2}} = e^{i0} = 1$$

$$w_1 = e^{i\frac{2 \times 1 \times \pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$$

On peut ainsi représenter les racines 2-ième de l'unité sur le cercle trigonométrique. En effet, on a vu que les racines n -ièmes de l'unité ont pour module 1.



2) Cas $n = 3$:

Les racines de l'équation $z^3 = 1$ sont :

$$w_0 = e^{i\frac{2 \times 0 \times \pi}{3}} = e^{i0} = 1, w_1 = e^{i\frac{2 \times 1 \times \pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}},$$

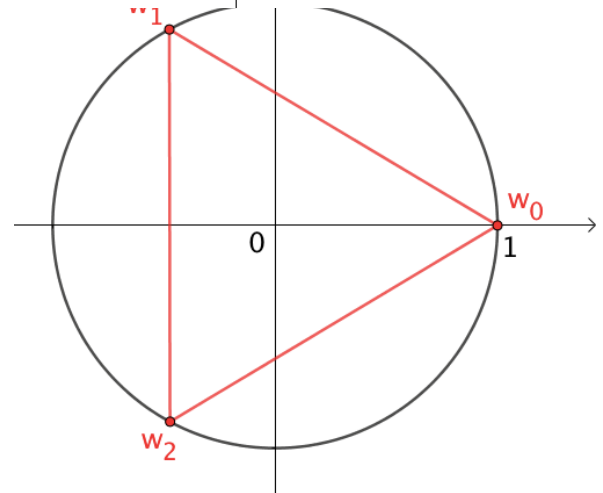
$$w_2 = e^{i\frac{2 \times 2 \times \pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

On peut ainsi représenter les racines 3-ième de l'unité sur le cercle trigonométrique.

Par convention, on note habituellement :

$$j = w_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } j^2 = w_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

L'ensemble des points dont les images sont les racines 3-ième de l'unité forment un triangle équilatéral.



3) Cas $n = 4$:

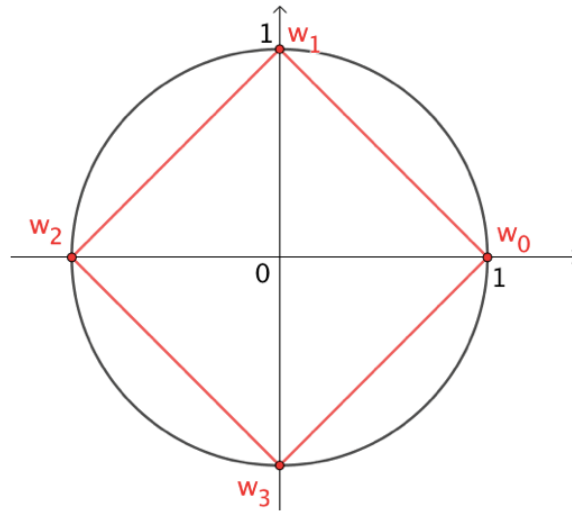
Les racines de l'équation $z^4 = 1$ sont :

$$w_0 = e^{i\frac{2 \times 0 \times \pi}{4}} = e^{i0} = 1, w_1 = e^{i\frac{2 \times 1 \times \pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}}, w_2 = e^{i\frac{2 \times 2 \times \pi}{4}} = e^{i\pi} = -1,$$

$$w_3 = e^{i\frac{2 \times 3 \times \pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

On peut ainsi représenter les racines 4-ième de l'unité sur le cercle trigonométrique.

L'ensemble des points dont les images sont les racines 4-ième de l'unité forment un carré.



De façon générale, l'ensemble des points dont les images sont les racines nièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon 1.

Application :

Démontrer que le périmètre d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 est égal à $10 \sin \frac{\pi}{5}$.

Les images des racines 5-ième de l'unité forment un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Ainsi pour calculer le périmètre du pentagone, il suffit de calculer la longueur d'un côté du pentagone.

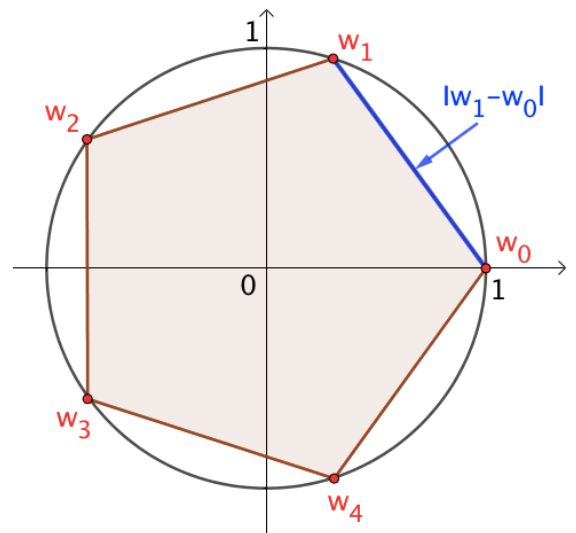
Soit par exemple :

$$\begin{aligned} |w_1 - w_0| &= \left| e^{i\frac{2 \times 1 \times \pi}{5}} - 1 \right| \\ &= \left| e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1 \right| \\ &= \left| e^{i\frac{2\pi}{10}} \right| \times \left| e^{i\frac{2\pi}{10}} - e^{-i\frac{2\pi}{10}} \right| \\ &= \left| e^{i\frac{\pi}{5}} - e^{-i\frac{\pi}{5}} \right| \end{aligned}$$

Soit, en appliquant une formule d'Euler :

$$|w_1 - w_0| = \left| 2i \times \sin \frac{\pi}{5} \right| = 2 \sin \frac{\pi}{5}$$

On en déduit que le périmètre du pentagone est égal à $10 \sin \frac{\pi}{5}$.



Partie 5 : Résolution d'une équation.

XIV. Equation du second degré à coefficient réels :

1) Rappels des méthodes connues pour résoudre une équation du second degré (ou trinôme) à coefficients réels dans $\mathbb{R}$:

Méthode 1 : Forme canonique

On veut résoudre l'équation polynomiale du second degré suivante :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a, b \text{ et } c \text{ des nombres réels non nuls}$$

D'abord on factorise par a , il vient :

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

On voit une identité remarquable de la forme $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

• si $b^2 - 4ac > 0$; il vient :

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \right) = 0$$

$$\left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0$$

Or un produit de facteur est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, il vient :

$$r_1 = -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ et } r_2 = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ on note aussi } r = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

• si $b^2 - 4ac = 0$; il vient :

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$$

L'équation admet une racine double $r = -\frac{b}{2a}$

- si $b^2 - 4ac < 0$ On conclut que le polynôme n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. (dans $\mathbb{R}$, on ne peut pas avoir un nombre négatif dans une racine carrée).

Méthode 2 : On connaît une racine.

Si on connaît une racine alors, on peut procéder par développement et identification des coefficients. Car, en effet, deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et on connaît une racine « évidente » r_1 , il vient :

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

$$\text{En développant } a(x - r_1)(x - r_2) = a(x^2 - r_1x - r_2x + r_1r_2)$$

$$ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1r_2 = ax^2 + bx + c$$

$$\text{D'où : } -a(r_1 + r_2) = b \text{ et } ar_1r_2 = c$$

$$(r_1 + r_2) = -\frac{b}{a} \text{ et } r_1r_2 = \frac{c}{a}$$

$$\text{On cherchait } r_2 : \text{ On conclut } r_2 = -\frac{b}{a} - r_1 \text{ et } r_2 = \frac{c}{ar_1}$$

On a montré le **théorème somme-produit** des racines d'un polynôme du second degré à coefficient réels :

Si le trinôme $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes ou confondues, alors leur somme ou leur produit vérifient $S = (r_1 + r_2) = -\frac{b}{a}$ et $P = r_1r_2 = \frac{c}{a}$

Il en découle la **propriété** suivante :

Deux réels ont pour somme S et pour produit P, si et seulement s'ils sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$

Pour le démontrer il suffit de montrer le sens direct puis la réciproque :

Soient r_1 et r_2 deux réels qui vérifient $r_1 + r_2 = S$ et $r_1r_2 = P$ alors

$r_2 = S - r_1$ et $P = r_1(S - r_1)$ d'où $r_1^2 - Sr_1 + P = 0$, dans ce cas r_1 est bien solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$, de même pour r_2 .

Réciproquement : Si r_1 et r_2 sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$, alors d'après le théorème qui précède $S = r_1 + r_2$ et $P = r_1r_2$

Exemple : $2x^2 - x - 1 = 0$ admet 1 comme racine évidente, déterminer la seconde racine. Déterminer la seconde racine de ce trinôme (solution : $-\frac{1}{2}$).

Méthode 3 : On utilise les formules du discriminant et des racines.

Les formules apprises au lycée concernant le discriminant et les racines du trinôme découlent de la méthode utilisant la forme canonique, on a bien :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

• Si $\Delta = 0$, on a une racine double $r = -\frac{b}{2a}$

• Si $\Delta > 0$, on a bien $r_1 = -\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = -\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ on note aussi $r = -\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

• Si $\Delta < 0$, on conclut que le polynôme n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

2) Résoudre une équation du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$:

Résolution de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ mais cette fois-ci dans $\mathbb{C}$.

On reprend nos calculs précédents (voir méthode forme canonique) on avait :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

• Si $b^2 - 4ac = 0$, l'équation admet une racine double réelle $r = -\frac{b}{2a}$

• Si $b^2 - 4ac > 0$, l'équation admet deux racines réelles $r_1 = -\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et

$r_2 = -\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ on note aussi $r = -\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

• Si $b^2 - 4ac < 0$, on a :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - (i)^2 \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} - i\sqrt{\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a^2}}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + i\sqrt{\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a^2}}\right) = 0$$

Or un produit de facteur est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, il

vient : $r_1 = -\frac{b - i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}$ et $r_2 = -\frac{b + i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}$

On note aussi $r = -\frac{b \pm i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}$

On constate que le trinôme admet deux racines complexes qui sont conjuguées. (ce résultat est important pour vérifier vos calculs)

Le **théorème Somme-Produit** et la propriété qui en découle vue précédemment restent valables dans $\mathbb{C}$. (ce résultat est important pour vérifier vos calculs $S = (r_1 + r_2) = -\frac{b}{a}$ et $P = r_1 r_2 = \frac{c}{a}$).

Démonstration :

$$(r_1 + r_2) = -\frac{b - i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a} + -\frac{b + i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$(r_1 + r_2) = -\frac{b}{a}$$

$$r_1 r_2 = \left(-\frac{b - i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}\right) \times \left(-\frac{b + i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}\right)$$

On reconnait une identité remarquable :

$$r_1 r_2 = \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}\right)^2$$

$$r_1 r_2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Application : déterminer les solutions de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$

XV. Equation du second degré à coefficient complexes:

1) Equation du type $\omega^2 = z$

Propriété : Racine carrée d'un nombre complexe non nul : pour tout $z \in \mathbb{C}^*$; l'équation $\omega^2 = z$ d'inconnue ω admet exactement deux solutions opposées, appelées racines carrées de z .

Démonstration :

Si $z = 0$, l'équation $\omega^2 = 0$ n'admet qu'une solution $\omega = 0$.

Si $z \neq 0$, écrivons z et ω sous forme algébrique :

$$z = a + ib \text{ et } \omega = x + iy$$

$$\omega^2 = z \Leftrightarrow \omega^2 = z \text{ et } |\omega^2| = |z|$$

$$\Leftrightarrow (x + iy)^2 = a + ib \text{ et } x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \text{ et } x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \text{ et } y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \text{ et } 2xy = b$$

On en déduit x et y au signe près à partir des expressions de x^2 et y^2 et l'égalité $2xy = b$ permet de savoir si x et y sont de même signe ou de signe opposé et on obtient finalement deux racines carrées $\omega = x + iy$ distincts de z et opposées l'une de l'autre.

Applications : Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$9 ; -9 ; -98 ; 24 + 10i$$

Notons qu'on peut aussi exploiter la forme exponentielle $z = |z|e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi; \pi[$ pour trouver les racines sous formes trigonométriques :

$$\omega = \pm \sqrt{|z|} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Application : Déterminer les racines carrées de $1 + i$ en passant par la forme exponentielle.

2) Equation du type $az^2 + bz + c = 0$

Équation du second degré à coefficients complexes : Soit a, b, c des nombres complexes avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ où δ est l'une quelconque des deux racines carrées du discriminant $b^2 - 4ac$.

Le **théorème Somme-Produit** vu précédemment reste valable dans $\mathbb{C}$ avec des coefficients complexes. (ce résultat est important pour vérifier vos calculs $S = (r_1 + r_2) = -\frac{b}{a}$ et $P = r_1 r_2 = \frac{c}{a}$).

Application : Déterminer les solutions de l'équation $z^2 - (3 + i)z + 2 + i = 0$

Remarque : Attention il faut regarder l'expression avant de faire les calculs, parfois il n'est pas utile de calculer le discriminant, car par exemple c'est une identité remarquable ou si on peut factoriser.

Par exemple : $z^2 - 24 = 0$; $z^2 - z = 0$

Ou encore, on peut identifier la somme et le produit des racines

($x^2 - Sx + P = 0$) par exemple $z^2 - (2 + i)z + (1 + i) = 0$

XVI. Racine n-ième

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que la fonction racine n-ième est la fonction réciproque de la fonction puissance n sur $\mathbb{R}_+$

Définition : Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

- on appelle racine n-ième de z tout nombre complexe w tel que $w^n = z$
- Les racines n-ième de 1 sont appelées racines n-ièmes de l'unité. Leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$. (vu paragraphe XIII).

Autrement dit pour un nombre complexe z donné, les racines n-ième de z sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $x^n - z = 0$.

Remarque : Attention, on n'a pas le droit d'écrire $\sqrt[n]{z}$ pour un nombre complexe dans la mesure où il n'y a pas d'unicité des racine n-ième d'un nombre complexe non nul.

Théorème : Expression des racines n-ièmes :

- La seule racine n-ième de 0 est 0.
- Soit $z = r e^{i\theta}$ (avec $r = |z|$) un nombre complexe non nul, alors z possède exactement n racines n-ièmes, à savoir, les nombres complexes : $\sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}\right)$, avec k décrivant $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$.
- Cas particulier des racines n-ième de l'unité : $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}\} k$ décrivant $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$ (déjà vu et démontré paragraphe XIII).

Remarque : La notation $\llbracket \quad \rrbracket$, indique qu'on parle d'intervalle d'entiers.

Démonstration :

- **Cas général.** Soit $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ non nul sous forme trigonométrique. Posons $\zeta = \sqrt[n]{r} e^{i\theta/n}$. Il est immédiat que $\zeta^n = z$ et ζ est non nul, puisque z l'est. On va déduire de cette racine n^e initiale de z les autres : pour tout $\omega \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \omega^n &= z \\ \iff \omega^n &= \zeta^n \\ \iff \left(\frac{\omega}{\zeta}\right)^n &= 1 \\ \iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad \frac{\omega}{\zeta} &= e^{2ik\pi/n} \\ \iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad \omega &= \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Remarque 14 Comme l'indique la démonstration précédente, les n racines n^{es} d'un nombre complexe non nul s'obtiennent à partir d'une de ses racines n^e et des n racines n^{es} de l'unité.

Exemple 15 Les racines cubiques de $1+i$ sont $\sqrt[6]{2} e^{i\pi/12}$, $\sqrt[6]{2} e^{3i\pi/4}$ et $\sqrt[6]{2} e^{-7i\pi/12}$.

Définition-théorème 16 - Nombre j . On note j le nombre $e^{2i\pi/3}$ – racine 3^e de l'unité – qui possède les propriétés suivantes :

$$j^3 = 1, \quad \bar{j} = j^2, \quad 1 + j + j^2 = 0 \quad \text{et} \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad z^2 + z + 1 = (z - j)(z - \bar{j}).$$

Démonstration. Le vérifier. ■