

Exercices : Nombres complexes :

Exercice 1 :

1. Calcul sur les nombres complexes en Terminale, Maths Expertes

Exercices sur la forme cartésienne des nombres complexes

Calculer la forme cartésienne des complexes suivants :

Question 1 :

$$(2 - 3i)^2$$

$$a; b = ?$$

Question 2 :

$$(3 + 2i)^3$$

$$a; b = ?$$

Question 3 :

$$(2 - i)^5$$

$$a; b = ?$$

Question 4 :

$$\frac{i - 5}{3 + 5i}$$

$$a; b = ?$$

Question 5 :

$$\frac{3 + 4i}{5 - 7i}$$

$$a; b = ?$$

Solution 1 :

Question 1 : $-5 - 12i$

$$(2 - 3i)^2 = 2^2 - 3^2 - 2 \cdot 2(3i)$$

$$(2 - 3i)^2 = -5 - 12i$$

Question 2 : $-9 + 46i$

Question 2 :

En utilisant le binôme de Newton

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(3 + 2i)^3 = 3^3 + 3 \times 3^2 \times 2i + 3 \times 3 \times (-4) - 8 \times i$$

$$(3 + 2i)^3 = 27 + 54i - 36 - 8i$$

$$(3 + 2i)^3 = -9 + 46i.$$

Question 3 : $-38 - 41i$ **Question 3 :**

En utilisant le binôme de Newton

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$z = (2 - i)^5 = 2^5 - 5 \times 2^4 i + 10 \times 2^3 \times (-1) - 10 \times 4 \times (-i) + 5 \times 2 \times (1) - i$$

$$z = 32 - 80i + 80i + 10 - i$$

$$z = -38 - 41i.$$

Question 4 : $-\frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$ **Question 4 :**

$$z = \frac{i - 5}{3 + 5i}$$

$$z = \frac{(i - 5)(3 - 5i)}{3^2 + 5^2}$$

$$z = \frac{3i - 15 + 5 + 25i}{34}$$

$$z = \frac{-10 + 28i}{34} = \frac{-5}{17} + \frac{14}{17}i.$$

Question 5 : $-\frac{13}{74} + \frac{41}{74}i$ **Question 5 :**

$$z = \frac{3 + 4i}{5 - 7i}$$

$$z = \frac{(3 + 4i)(5 + 7i)}{5^2 + 7^2}$$

$$z = \frac{15 - 28 + i(20 + 21)}{25 + 49}$$

$$z = \frac{-13 + 41i}{74}$$

Exercice 2 :**Exercice de calcul dans le plan complexe**

Soit $Z = \frac{1 + z}{z}$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit réel,

puis l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Solution 2 :

Correction de l'exercice de calcul dans le plan complexe

On cherche la forme cartésienne de Z .

- On suppose que $z = x + iy$ avec $z \neq 0$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

On écrit que $Z = 1 + \frac{1}{z} = 1 + \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$$Z = 1 + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$\text{donc } \operatorname{Re}(Z) = 1 + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{Im}(Z) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

- $Z \in \mathbb{R}$ ssi $\operatorname{Im}(Z) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = 0$

ssi $y = 0$ et $z \neq 0$

ssi M est un point de l'axe des réels différent de O .

- Z est imaginaire pur

$$\text{ssi } \operatorname{Re}(Z) = 1 + \frac{x}{x^2 + y^2} = 0$$

ssi $x^2 + y^2 + x = 0$ et $(x, y) \neq (0, 0)$

On écrit $x^2 + y^2 + x = (x + 1/2)^2 + y^2 - 1/4$

Z est imaginaire pur ssi $(x + 1/2)^2 + y^2 = 1/4$ et $(x, y) \neq (0, 0)$

ssi M est un point du cercle de centre $(-1/2, 0)$ et de rayon $1/2$ différent de O .

Exercice 3 :

Exercices de calcul sur les modules

Question 1 :

Résoudre $z + \bar{z} = |z|$.

Question 2 :

Ensemble des complexes z tels que z , z^2 et $1 - z$ aient même module.

Nombre de solutions ?

Solution 3 :

Correction des exercices de calcul sur les modules

Question 1 :

On note $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On résout donc $2x = \sqrt{x^2 + y^2}$

ssi $x \geq 0$ et $4x^2 = x^2 + y^2$

ssi $x \geq 0$ et $3x^2 = y^2$

ssi $x \geq 0$ et $y = \sqrt{3}x$ ou $y = -\sqrt{3}x$

L'ensemble des solutions est la réunion des deux ensembles :

$$\{x(1 + i\sqrt{3}) \mid x \geq 0\}$$

$$\{x(1 - i\sqrt{3}) \mid x \geq 0\}.$$

Question 2 :

Nombre de solutions : 2

$$\bullet |z| = |z^2| \text{ssi} |z| = |z|^2$$

$$\text{ssi} |z| (1 - |z|) = 0$$

$$\text{ssi} |z| = 0 \text{ ou } |z| = 1.$$

• Si $|z| = 0$ alors $z = 0$ donc $1 - z = 1$, les trois modules ne sont pas égaux.

• Si $|z| = 1$, on écrit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $x^2 + y^2 = 1$

$$|1 - z|^2 = (1 - x)^2 + y^2$$

$$|1 - z|^2 = x^2 + y^2 - 2x + 1 = 2 - 2x$$

$$|1 - z| = 1 \text{ssi} 2 - 2x = 1 \text{ssi} x = 1/2$$

$$\text{alors } y^2 = 1 - x^2 = 3/4.$$

Il y a deux solutions

$$\boxed{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}}.$$

Exercice 4 :**Exercices sur les équations des nombres complexes****Question 1 :**

$$\text{L'équation } (4 - i)(1 + 3i)z = 2 - 3i$$

admet une unique solution $z = x + iy$ avec $x; y = ?$ **Question 2 :**

$$\text{L'équation } (3 + 2i)z + (1 - 5i)\bar{z} = -19 - 2i$$

admet une unique solution $z = x + iy$ avec $x; y = ?$ **Solution 4 :****Correction des exercices sur les équations des nombres complexes****Question 1 :**

$$x; y = -19/170; -43/170$$

$$(4 - i)(1 + 3i)z = 5 - 3i$$

$$\text{ssi} (4 - i + 12i + 3)z = 2 - 3i$$

$$\text{ssi} (7 + 11i)z = 2 - 3i$$

$$\text{ssi } z = \frac{2 - 3i}{7 + 11i}$$

$$\text{ssi } z = \frac{(2 - 3i)(7 - 11i)}{(7 + 11i)(7 - 11i)}$$

$$\text{ssi } z = \frac{49 + 121}{14 - 33 - (21 + 22)i}$$

$$\text{ssi } z = \frac{-19 - 43i}{170}$$

$$\text{ssi } \boxed{z = \frac{-19 - 43i}{170}}.$$

Question 2 :

$$x; y = 4; 5$$

$$(3 + 2i)z + (1 - 5i)\bar{z} = -19 - 2i$$

On note $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

L'équation s'écrit

$$(3 + 2i)(x + iy) + (1 - 5i)(x - iy) = -19 - 2i$$

$$\text{ssi } 3x - 2y + i(2x + 3y) + x - 5y - i(5x + y) = -19 - 2i$$

$$\text{ssi } 4x - 7y + i(2y - 3x) = -19 - 2i.$$

En égalant parties réelles et imaginaires, on obtient le système

$$\begin{cases} 4x - 7y = -19 \\ 2y - 3x = -2 \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} 4x - 21x/2 + 7 = -19 \\ y = 3x/2 - 1 \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} -13x/2 = -26 \\ y = 3x/2 - 1 \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \times 2 - 1 = 5 \end{cases}$$

L'équation admet une unique solution $\boxed{4 + 5i}$.

Exercice 5 :

2. Formes trigonométriques, nombres complexes : Terminale Maths Expertes

Exercices sur les modules et les arguments des nombres complexes

Question 1 :

Module et argument de $\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{\sqrt{3} + i}$

Question 2 :

a - Module et argument de $z = \frac{\sqrt{3} - i}{1 + i}$

b - En déduire $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

c - En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Solution 5 :

Correction des exercices sur les modules et les arguments des nombres complexes

Question 1 :

En multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur,

$$Z = \frac{\sqrt{2} + i \sqrt{6}}{\sqrt{3} + i}$$

$$Z = \frac{(\sqrt{2} + i \sqrt{6})(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)}$$

$$Z = \frac{2\sqrt{6} + i(3\sqrt{2} - \sqrt{2})}{3 + 1}$$

$$Z = \frac{\sqrt{6} + i \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right)$$

$u = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}$ est un complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{6}$ car

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{|Z| = \sqrt{2}} \text{ et } \boxed{\arg(Z) = \frac{\pi}{6} \quad (2\pi)}.$$

Question 2 :

a -

$$\bullet u = \sqrt{3} - i$$

$$|u|^2 = 3 + 1 = 4, \text{ donc } |u| = 2$$

Puis on cherche $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin(t) = \frac{-1}{2}$$

on peut donc choisir $t = \frac{-\pi}{6}$

$$\arg(u) = \frac{-\pi}{6} \quad (2\pi).$$

$$\bullet v = 1 + i$$

$$|v|^2 = 1 + 1 = 2, \text{ donc } |v| = \sqrt{2}$$

Puis on cherche $t' \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos(t') = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \sin(t') = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On peut donc choisir $t' = \frac{\pi}{4}$.

$$\arg(v) = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi).$$

• alors si $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} = \frac{u}{v}$

$$|z| = \frac{|u|}{|v|} = \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ soit } |z| = \sqrt{2}$$

et $\arg(z) = \arg(u) - \arg(v) \quad (2\pi)$

$$\arg(z) = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$$

$$\boxed{\arg(z) = -\frac{5\pi}{12} \quad (2\pi)}$$

b -

On cherche la forme cartésienne de z :

$$z = \frac{\sqrt{3} - i}{1 + i} = \frac{(\sqrt{3} - i)(1 - i)}{1 + 1}$$

$$z = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} - i \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

On a trouvé la forme trigonométrique de z :

$$z = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \right)$$

donc en égalant les parties réelles et imaginaires

$$\sqrt{2} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

et $\sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

$$\text{donc } \boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}} \text{ et } \boxed{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}}$$

c -

Puis en utilisant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}$

$$\cos(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \text{ et } \sin(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}}$$

Exercice 6 :

Exercices sur l'utilisation du plan complexe en Terminale

Dans ce paragraphe, on se place dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit x un réel non nul. On note A, B et C les points du plan complexe d'affixes respectives

$$z_A = 1 - xi, z_B = 2i \text{ et } z_C = -2.$$

Question 1 :

Calculer AB et AC .

Question 2 :

Trouver x tel que le triangle soit isocèle en A .

$$x = ?$$

Question 3 :

Existe-t-il un réel x tel que le triangle ABC soit équilatéral ?

Question 4 :

Donner les valeurs de x tel que le triangle ABC soit rectangle

Question 5 :

Les points A, B et C sont alignés pour $x = ?$

Question 6 :

Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Solution 6 :

Correction des exercices sur l'utilisation du plan complexe en Terminale

Question 1 :

$$AB = |z_B - z_A| = |(-1 + (2+x)i)|$$
$$AB^2 = 1 + (2+x)^2 = x^2 + 4x + 5.$$

$$AC = |z_C - z_A| = |(-3 + xi)|$$
$$AC^2 = 9 + x^2.$$

Question 2 :

$$x = 1$$

$$AB^2 = AC^2 \text{ssi } x^2 + 4x + 5 = x^2 + 9 \text{ssi } x = 4 \text{ssi } \boxed{x = 1}.$$

Question 3 :

$$\text{Si } x = 1, AB^2 = 10$$

$$\text{et } BC = |z_C - z_B| = |-2 - 2i|$$

$$BC^2 = 4 + 4 = 8.$$

Le triangle ne peut pas être équilatéral.

Question 4 :

* Le triangle est rectangle en A

$$\text{ssi } AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\text{ssi } x^2 + 4x + 5 + x^2 + 9 = 8$$

$$\text{ssi } 2x^2 + 4x + 6 = 0$$

$$\text{ssi } x^2 + 2x + 3 = 0$$

Cette équation n'a pas de racine réelle car $\Delta = 4 - 12 < 0$.

* Le triangle est rectangle en B

$$\text{ssi } BA^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\text{ssi } x^2 + 4x + 5 + 8 = x^2 + 9$$

$$\text{ssi } 4x = 9 - 13 = -4$$

$$\text{ssi } x = -1.$$

* Le triangle est rectangle en C

$$\text{ssi } CA^2 + CB^2 = AB^2$$

$$\text{ssi } x^2 + 9 + 8 = x^2 + 4x + 5$$

$$\text{ssi } 4x = 12 \text{ssi } x = 3.$$

Le triangle est rectangle ssi $x = -1$ ou $x = 3$.

Question 5 :

$$x = -3$$

On calcule les affixes u et v de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$

$$u = z_C - z_A = -3 + xi$$

$$v = z_C - z_B = -2 - 2i$$

Il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{BC}$ ssi $u = kv$ ssi $-3 = -2k$ et $x = -2k$
ssi $k = 3/2$ et $x = -3$.

Les points sont alignés ssi $\boxed{x = -3}$.

Question 6 :

On suppose donc que A , B et C ne sont pas alignés c'est à dire $x \neq -3$.

$ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\text{ssi } z_B - z_A = z_C - z_D$$

$$\text{ssi } z_D = z_C + z_A - z_B$$

$$\text{ssi } z_D = -2 + 1 - x - 2i$$

$$\text{ssi } \boxed{z_D = -1 - x - 2i}.$$

Exercice 7 :

3. La trigonométrie et les nombres complexes en Terminale Maths Expertes

Exercices avec $\cos(a \pm b)$ etc ... en Terminale

Question 1 :

Pour tout réel x , $\cos^4(x) - \sin^4(x) = \cos(2x)$

Vrai ou Faux ?

Question 2 :

Si $\cos(x) \sin(x) \neq 0$, simplifier

$$\frac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)}.$$

Solution 7 :

Correction des exercices avec $\cos(a \pm b)$ etc ... en Terminale

Question 1 :

Vrai

$$\cos^4(x) - \sin^4(x) = (\cos^2(x) - \sin^2(x)) (\cos^2(x) + \sin^2(x))$$

$$\cos^4(x) - \sin^4(x) = \cos(2x) \times 1$$

$$\cos^4(x) - \sin^4(x) = \cos(2x)$$

Question 2 :

$$A = \frac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)}$$

$$A = \frac{\sin(3x) \cos(x) - \cos(3x) \sin(x)}{\sin(x) \cos(x)}$$

$$A = \frac{\sin(3x - x)}{\sin(x) \cos(x)}$$

$$A = \frac{\sin(2x)}{\sin(x) \cos(x)}$$

$$A = \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{\sin(x) \cos(x)} = 2.$$

Exercice 8 :

Exercices sur la formule de Moivre

Question 1 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$

Question 2 :

En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Solution 8 :

Correction des exercices sur la formule de Moivre

Question 1 :

● Première méthode :

$$\cos(4x) = \cos(2 \times 2x) = 2 \cos^2(2x) - 1$$

$$\cos(4x) = 2(2 \cos^2(x) - 1)^2 - 1$$

$$= 2(4 \cos^4(x) - 4 \cos^2(x) + 1) - 1$$

$$\cos(4x) = 8 \cos^4(x) - 8 \cos^2(x) + 1$$

● Deuxième méthode :

$$\cos(4x) + i \sin(4x) = (\cos(x) + i \sin(x))^4$$

par le binôme de Newton

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\cos(4x) + i \sin(4x) = \cos^4(x) + 4i \cos^3(x) \sin(x) - 6 \cos^2(x) \sin^2(x) - 4i \cos(x) \sin^3(x) + \sin^4(x)$$

en égalant les parties réelles

$$\cos(4x) = \cos^4(x) - 6 \cos^2(x) \sin^2(x) + \sin^4(x)$$

$$\text{avec } \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

$$\cos(4x) = \cos^4(x) - 6 \cos^2(x)(1 - \cos^2(x))$$

$$+ (1 - \cos^2(x))^2$$

après simplifications :

$$\boxed{\cos(4x) = 8 \cos^4(x) - 8 \cos^2(x) + 1.}$$

Question 2 :

$$\text{On pose } x = \frac{\pi}{8}, 4x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{donc } 0 = 8 \cos^4(x) - 8 \cos^2(x) + 1.$$

En posant $t = \cos^2(x)$ alors $t \in [0, 1]$, on résout l'équation $8t^2 - 8t + 1 = 0$

de discriminant $\Delta = 64 - 32 = 32$

$$\text{on a deux racines } t_1 = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{16} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{et } t_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} < \frac{1}{2}.$$

comme $\cos(\pi/8) > \cos(\pi/4) > 0$, $\cos^2(x) > \frac{1}{2}$, on doit éliminer la valeur t_2 et donc $\cos^2(x) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$.

$$\text{Sachant que } \cos(x) > 0, \text{ on obtient } \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}}.$$

Exercice 9 :

Exercice sur la linéarisation en Terminale

Résoudre l'équation

$$\cos^4(x) + \sin^4(x) = \frac{6 + \sqrt{3}}{8}.$$

Quelles sont les solutions de cette équation dans $[0, 2\pi[$?

Solution 9 :

Correction de l'exercice sur la linéarisation en Terminale

$$\begin{aligned}\cos^4(x) + \sin^4(x) &= (\cos^2(x) + \sin^2(x))^2 - 2 \sin^2(x) \cos^2(x) \\&= 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x) \\&= 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos(4x)) \\&= \frac{3}{4} + \frac{\cos(4x)}{4}\end{aligned}$$

L'équation est équivalente à

$$\begin{aligned}\cos(4x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{ssi } \exists k \in \mathbb{Z}, 4x &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou } \exists p \in \mathbb{Z}, 4x &= -\frac{\pi}{6} + 2p\pi \\ \text{ssi } \exists k \in \mathbb{Z}, x &= \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \\ \text{ou } \exists p \in \mathbb{Z}, x &= -\frac{\pi}{24} + \frac{p\pi}{2}\end{aligned}$$

Si l'on cherche les solutions dans $[0, 2\pi[$, ce sont les réels

$$\frac{\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \frac{23\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}, \frac{35\pi}{24}, \frac{47\pi}{24}.$$

Exercice 10 :

Exercice sur la transformation de $a \cos(x) + b \sin(x)$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) \neq 0$, il existe un réel φ tel que

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi)$$

Introduire le complexe $a + ib$ et sa forme trigonométrique.

Correction de l'exercice sur la transformation de $a \cos(x) + b \sin(x)$

$a + ib$ a pour module $\sqrt{a^2 + b^2}$ et un argument φ et donc $a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\varphi}$

alors $a = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\varphi)$ et $b = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\varphi)$

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos(x) \cos(\varphi) + \sin(x) \sin(\varphi))$$

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi)$$