

Exercices : Primitives et équations différentielles:

Exercice 1 :

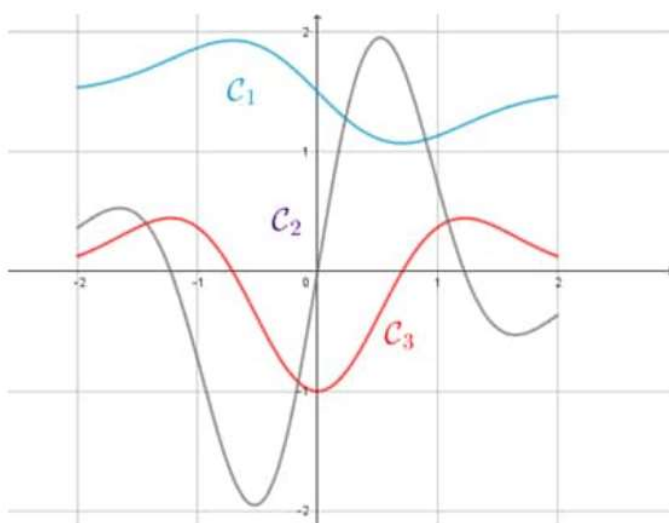
1. Calcul Primitives

Exercice 1 : lecture graphique d'une primitive :

Soit f une fonction dérivable de dérivée continue et F une primitive de f sur l'intervalle $I = [-2, 2]$.

On a représenté les fonctions f , f' et F dans le même repère.

Donner les valeurs a , b et c telles que C_a est le graphe de f , C_b celui de f' et C_c celui de F .



Solution 1 :

Correction de l'exercice 1 sur les primitives :

On utilise la propriété suivante :

Si le graphe d'une fonction h a une tangente horizontale en $(x_0, h(x_0))$, alors $h'(x_0) = 0$.

On va donc raisonner suivant le nombre de points où les courbes coupent l'axe horizontal.

Toutes les courbes ont des points à tangente horizontale.

* C_1 a deux points à tangente horizontale et ne coupe pas l'axe Ox .

* C_2 a quatre points à tangente horizontale et coupe trois fois l'axe Ox .

* C_3 a trois points à tangente horizontale et coupe deux fois l'axe Ox .

On note g_i la fonction de graphe C_i si $1 \leq i \leq 3$.

● On en déduit que g_1 n'est pas la dérivée de g_2 ou de g_3 .

Donc $G_1 = F$ et $\boxed{c = 3}$.

● Les tangentes à C_1 sont horizontales en $a \in]-1, 0[$ et $b \in]0, 1[$.

C_3 est la courbe qui coupe l'axe Ox aux points d'abscisse a et b , donc $F' = f$ a pour courbe représentative C_3 , alors $\boxed{a = 3}$.

● Et pour vérification :

Les tangentes à C_3 sont horizontales en $c \in]-2, -1[$, 0 et $d \in]1, 2[$. La courbe C_2 coupe Ox aux points d'abscisse $c, 0, d$, donc c'est la courbe représentative de f' . Ce qui donne $\boxed{b = 2}$.

Exercice 2 :

Exercice 2 : primitive d'une fonction

Déterminer les **primitives** des fonctions suivantes en précisant l'intervalle de définition.

- $x \mapsto \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2$
- $x \mapsto \frac{(1 - \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}$
- $x \mapsto \frac{x^4 - 2x^2 + 2}{(x - 1)^2}$
- $x \mapsto 5 \cos(3x) - 4 \sin(3x)$

Solution 2 :

Correction de l'exercice 2 sur les primitives :

- On cherche une **primitive** sur $I_1 = \mathbb{R}^{+*}$ ou sur $I_2 = \mathbb{R}^{-*}$.

$$f(x) = x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}$$

Les **primitives** sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{x^5}{5} + 2x - \frac{1}{3x^3} + k \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

- On cherche une primitive sur $I = \mathbb{R}^{+*}$

$$f(x) = \frac{1 - 2\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 + \sqrt{x}$$

Les **primitives** sont les fonctions $x \mapsto 2\sqrt{x} - 2x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

- On cherche une **primitive** sur $I_1 =]\infty, 1[$ ou sur $I_2 =]1, +\infty[$. Comme $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$

$$x^4 - 2x^2 + 2 = (x - 1)^2(x + 1)^2 + 1$$

on peut simplifier l'expression de $f(x)$,

$$f(x) = \frac{(x - 1)^2(x + 1)^2}{(x - 1)^2} + \frac{1}{(x - 1)^2}$$

$$f(x) = (x + 1)^2 + \frac{1}{(x - 1)^2}$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{(x - 1)^2}.$$

Les **primitives** sur I_1 (puis sur I_2) sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{x^3}{3} + x^2 + x - \frac{1}{x - 1} + k \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

- On cherche une **primitive** sur $\mathbb{R}$.

Les **primitives** sont $x \mapsto \frac{5}{3} \sin(3x) + \frac{4}{3} \cos(3x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 :

2. Calcul Equation différentielle

Exercice 1 Equations différentielles : résoudre une équation

- Résoudre l'équation $y' + y = e^{2x}$ en cherchant une solution particulière sous la forme $x \mapsto a e^{2x}$ où $a \in \mathbb{R}$
- Résoudre $y' + y = (x + 1) e^{-x}$ en cherchant une solution particulière sous la forme $x \mapsto (a x^2 + b x) e^{-x}$.
- Résoudre l'équation $7 y' + 2 y = 2 x^3 - 5 x^2 + 4 x - 1$ en cherchant une solution particulière sous forme d'une **fonction polynôme de degré 3**.

Solution 3 :

Correction de l'exercice 1 sur les équations différentielles

1. La solution générale de l'équation $y' + y = 0$ est $x \mapsto k e^{-x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Soit $f : x \mapsto a e^{2x}$

Pour tout réel x , $f'(x) = 2 a e^{2x}$

Pour tout réel x , $f'(x) + f(x) = e^{2x}$

$$\text{ssi } 3 a e^{2x} = e^{2x} \text{ ssi } a = \frac{1}{3}.$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{3} e^{2x} + k e^{-x} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

2. La solution générale de l'équation $y' + y = 0$ est $x \mapsto k e^{-x}$ où $k \in \mathbb{R}$. Soit pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (a x^2 + b x) e^{-x}$

$$f'(x) = -(a x^2 + b x) e^{-x} + (2 a x + b) e^{-x}$$

$$f'(x) = (-a x^2 + (2 a - b) x + b) e^{-x}.$$

Pour tout réel x ,

$$f'(x) + f(x) = (x + 1) e^{-x}$$

ssi pour tout réel x ,

$$((a - a) x^3 + (b + 2 a - b) x + b) e^{-x} = (x + 1) e^{-x}$$

$$\text{ssi } 2 a x + b = x + 1$$

$$\text{ssi } \begin{cases} 2 a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{ssi } a = \frac{1}{2}, b = 1$$

Donc $x \mapsto \left(\frac{1}{2} x^2 + x\right) e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation.

La solution générale de l'équation $y' + y = (x + 1) e^{-x}$ est $x \mapsto \left(\frac{1}{2} x^2 + x + k\right) e^{-x}$ où $k \in \mathbb{R}$.

3. • La solution générale de l'équation homogène $7 y' + 2 y = 0$ soit $y' = -\frac{2}{7} y = 0$ est $x \mapsto k e^{-2x/7}$ où $k \in \mathbb{R}$.

• Soit si $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$

$$P'(x) = 3 a x^2 + 2 b x + c$$

Pour tout réel x ,

$$7 P'(x) + 2 P(x) = 2 x^3 - 5 x^2 + 4 x - 1$$

ssi pour tout réel x

$$2 a x^3 + (2 b + 21 a) x^2 + (2 c + 14 b) x + 2 d + 7 c = 2 x^3 - 5 x^2 + 4 x - 1$$

$$\text{ssi } \begin{cases} 2 a = 2 \\ 2 b + 21 a = -5 \\ 2 c + 14 b = 4 \\ 2 d + 7 c = -1 \\ a = 1 \\ 2 b = -26 \\ 2 c = 4 + 14 \times 13 \\ 2 d = -1 - 7 \times 93 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions $x \mapsto k e^{-2x/7} + x^3 - 13 x^2 + 93 x - 326$ où $k \in \mathbb{R}$

Exercice 4 :

Exercice 2 Equations différentielles : trouver la solution

- Déterminer les solutions de $y'' - 6y' + 9y = \frac{1-x}{x^3}e^{3x}$ sur $I =]0, +\infty[$.

Indication : On cherchera une fonction u telle que pour tout $x \in I$, $f(x) = u(x)e^{3x}$.

- Démontrer et déterminer qu'il existe une seule solution f telle que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$.
- Soit u une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I . Calculer la dérivée seconde de $f : x \mapsto x^2 u(x)$.

Solution 4 :

Correction de l'exercice 2 sur les équations différentielles

- Comme la fonction $x \mapsto e^{3x}$ ne s'annule pas, la fonction f est deux fois dérivable ssi la fonction u définie par $u : x \mapsto e^{-3x} f(x)$ est deux fois dérivable sur I . En notant donc pour $x \in I$, $f(x) = u(x)e^{3x}$

$$f'(x) = u'(x)e^{3x} + 3u(x)e^{3x}$$

$$f'(x) = (u'(x) + 3u(x))e^{3x}$$

$$\text{et } f''(x) = (u''(x) + 3u'(x))e^{3x} + 3(u'(x) + 3u(x))e^{3x}$$

$$f''(x) = (u''(x) + 6u'(x) + 9u(x))e^{3x}$$

f est solution sur I ssi pour tout $x \in I$,

$$(u''(x) + (6 - 6)u'(x) + (9 - 18 + 9)u(x))e^{3x} = \frac{1-x}{x^3}e^{3x}$$

$$\text{ssi pour tout } x \in I, u''(x) = \frac{1-x}{x^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$$

$$\text{ssi il existe } a \in \mathbb{R} \text{ tel que pour tout } x \in I, u'(x) = \frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{x} + a$$

$$\text{ssi il existe deux réels } a \text{ et } b \text{ tels que pour tout } x \in I, u(x) = \frac{1}{2x} + \ln(x) + ax + b.$$

$$\text{L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions } x \mapsto \left(\frac{1}{2x} + \ln(x) + ax + b \right) e^{3x}$$

où a et b sont réels.

- On cherche a et b tels que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$.

$$\text{En utilisant } f(x) = u(x)e^{3x}$$

$$\text{et } f'(x) = (3u(x) + u'(x))e^{3x}$$

$$\text{on obtient les conditions équivalentes } u(1) = 0 \text{ et } 3u(1) + u'(1) = 0$$

$$\text{ssi } u(1) = u'(1) = 0$$

$$\text{ssi } \frac{1}{2} + a + b = 0 \text{ et } \frac{-1}{2} + \frac{1}{1} + a = 0$$

$$\text{ssi } a = -\frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2} - a = 0$$

(on a repris les expressions de u et u' obtenues dans la question précédente).

Le problème admet une unique solution définie par $f : x \mapsto \left(\frac{1}{2x} + \ln(x) - \frac{1}{2} \right) e^{3x}$.

- $f(x) = x^2 u(x)$

$$f'(x) = 2xu(x) + x^2 u'(x)$$

$$f''(x) = 2u(x) + 2xu'(x) + 2xu'(x) + x^2 u''(x)$$

$$f''(x) = 2u(x) + 4xu'(x) + x^2 u''(x).$$