

Quizz : Equations différentielles



De quelle équation différentielle la fonction $f(x) = 7e^{-0,5x} - 4$ peut-elle être solution ?

☐

$$y' = y + 4$$

☐

$$y' + 0,5y = 2$$

☐

$$y' = -0,5y + 7$$

☐

$$y' = -0,5y - 2$$



$$y' = y + 4$$

trouver la solution de cette équation différentielle



$$y' + 0,5y = 2$$

trouver la solution de cette équation différentielle



$$y' = -0,5y + 7$$

trouver la solution de cette équation différentielle



$$y' = -0,5y - 2$$



Explication Générale

Cours : Les solutions d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$

Raisonnement : Ici on aurait $k = 7$, $a = -0,5$ et $-\frac{b}{a} = -4 \implies b = -2$ donc la fonction donnée est une solution de l'équation différentielle $y' = -0,5y - 2$, cette solution vérifie que $f(0) = 3 \implies k = 7$

Remarque : une autre méthode consiste à dériver la fonction et à vérifier de quelle équation différentielle elle est solution. C'est à dire : $f'(x) = 7 \times (-0,5)e^{-0,5x} = -0,5f(x)$, donc :
 $y' = -0,5(y + 4) = -0,5y - 2$



Quelle est la fonction constante solution de l'équation différentielle $y' = -4y - 3$?

☐

$$-\frac{3}{4}$$

☐

$$\frac{3}{4}$$

☐

$$\frac{4}{3}$$

☐

$$-\frac{4}{3}$$



$$-\frac{3}{4}$$



$$\frac{3}{4}$$

Erreur de calcul. La fonction constante vérifie $y' = 0$.



$$\frac{4}{3}$$

Erreur de calcul. La fonction constante vérifie $y' = 0$.



$$-\frac{4}{3}$$

Erreur de calcul. La fonction constante vérifie $y' = 0$.



Explication Générale

Raisonnement :

- On remplace dans l'équation la fonction solution y par une constante

Calcul :

- La solution y constante vérifie $y' = 0 \iff -4y - 3 = 0 \iff y = -\frac{3}{4}$



Un fil conducteur parcouru par un courant électrique s'échauffe par effet Joule. Sa température est une fonction θ du temps.

Dans les conditions de l'expérience, la fonction θ vérifie l'équation $\theta'(t) + 0,1 \cdot \theta(t) = 2$

Quelle est l'expression de $\theta(t)$?

Dans les propositions suivantes, K est une constante.

☐

$$Ke^{-0,1t} + 20$$

☐

$$Ke^{-0,1t}$$

☐

$$Ke^{-0,1t} - 20$$



$$Ke^{-0,1t} + 20$$



$$Ke^{-0,1t}$$

Il manque le second membre et la solution particulière



$$Ke^{-0,1t} - 20$$

Attention au signe de la solution particulière



Explication Générale

Cours: Une équation différentielle du type $y' + ay = b$ a pour solution $y = Ke^{-at} + \frac{b}{a}$

Raisonnement: on identifie : $a = 0,1$ et $b = 2$



À haute température, le dioxyde d'azote NO_2 , se décompose en NO et O_2 .

Si $c(t)$ représente l'évolution temporelle de la concentration de NO_2 (en moles/litre), alors, à 600°K , $c(t)$ se modifie suivant la loi de réaction $\frac{dc(t)}{dt} = -0,05c^2(t)$ (Eq) (temps t en secondes).

Quel est le type mathématique de l'équation différentielle mise en jeu dans ce problème ?

☐

$$y' = ay^2, a \text{ est une constante}$$

☐

$$ay' = b, a \text{ et } b \text{ sont deux constantes}$$

☐

$$ay' = by, a \text{ et } b \text{ sont deux constantes}$$

☐

$$ay' = b(x), a \text{ est une constante}$$

☒ $y' = ay^2$, a est une constante

☐ $ay' = b$, a et b sont deux constantes

il manque la fonction y (et donc c) dans l'expression

☐ $ay' = by$, a et b sont deux constantes

il faut que la fonction y (et donc c) soit à la puissance 2

☐ $ay' = b(x)$, a est une constante

ne pas confondre second membre et fonction intervenant dans l'équation



Explication Générale

Méthode : Si la variable est t et la fonction est $c(t)$, on peut écrire $\frac{dc}{dt} = c'(t) = c'$.

Identification de l'équation : (Eq) devient $c' = -0,05c^2$

Avec $c = y$, et $a = -0,05$, par identification : (Eq) a la forme $y' = ay^2$



Une population $N(t)$ de noyaux radioactifs décroît selon la fonction $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ avec $N(t=0) = N_0$

De quelle équation différentielle cette fonction est-elle solution ?

☐ $\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda t$

☐ $\frac{dN(t)}{dt} - \lambda t = 0$

☐ $\frac{dN(t)}{dt} + \lambda t = 0$

☐ $\frac{dN(t)}{dt} = \lambda t$

☒ $\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda t$

☐ $\frac{dN(t)}{dt} - \lambda t = 0$

Au cours d'une durée dt , la population $N(t)$ diminue et on a donc $\frac{dN(t)}{dt} < 0$ puisque $dN(t) < 0$, ce qui n'est pas cohérent avec cette équation différentielle sachant que $\lambda > 0$

☒ $\frac{dN(t)}{dt} + \lambda t = 0$

☐ $\frac{dN(t)}{dt} = \lambda t$

Au cours d'une durée dt , la population $N(t)$ diminue et on a donc $\frac{dN(t)}{dt} < 0$ puisque $dN(t) < 0$, ce qui n'est pas cohérent avec cette équation différentielle sachant que $\lambda > 0$



Explication Générale

Raisonnement :

La solution doit vérifier l'équation différentielle

Calcul :

$$(e^{-\lambda t})' = -\lambda e^{-\lambda t}$$



Un circuit électrique comprend un générateur de tension E (exprimée en volts V), une bobine d'inductance L (exprimée en henrys H) et un conducteur ohmique de résistance R (exprimée en ohms Ω) placés en série. L'intensité du courant électrique i , exprimée en ampères (A), est fonction du temps t , exprimé en secondes, et est solution de l'équation différentielle: (Eq) $Li'(t) + Ri(t) = E$

A la mise sous tension du générateur, le courant est nul dans le circuit, soit $i(0) = 0$

Quelle est la solution $i(t)$?

☐ $\frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

☐ $\frac{E}{R}(1 - e^{\frac{R}{L}t})$

☐ $\frac{E}{R}(e^{-\frac{R}{L}t} - 1)$

☒ $\frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

☐ $\frac{E}{R}(1 - e^{\frac{R}{L}t})$

erreur de calcul de la solution de l'équation homogène

☐ $\frac{E}{R}(e^{-\frac{R}{L}t} - 1)$

Reprendre le calcul de la constante d'intégration et de l'expression de la solution générale



Explication Générale

Cours: Une équation différentielle du type $y' + ay = b$ a pour solution $y = Ke^{-at} + \frac{b}{a}$

Raisonnement:

- On divise (Eq) par L et on obtient $i'(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{E}{L}$ en divisant par L

On identifie $a = \frac{R}{L}$ et $b = \frac{E}{L}$

On peut donc écrire : $i(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$

- Condition initiale : $i(0) = 0$

donc $i(0) = Ke^{-\frac{R}{L}0} + \frac{E}{R} = K \times 1 + \frac{E}{R}$

d'où $K = -\frac{E}{R}$

Donc $i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$



Un circuit électrique comprend un générateur de tension E (exprimée en volts V), une bobine d'inductance L (exprimée en henrys H) et un conducteur ohmique de résistance R (exprimée en ohms Ω) placés en série. L'intensité du courant électrique i , exprimée en ampères (A), est fonction du temps t , exprimé en secondes, et est solution de l'équation différentielle: (Eq) $Li'(t) + Ri(t) = E$

K est la constante d'intégration apparaissant lors de la recherche de la solution $i(t)$ de (Eq)

Quelle est la solution $i(t)$?

☐ $Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$

☐ $Ke^{\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$

☐ $Ke^{-\frac{R}{L}t} - \frac{E}{R}$

☒ $Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$

☐ $Ke^{\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$

erreur de calcul de la solution de l'équation homogène

☐ $Ke^{-\frac{R}{L}t} - \frac{E}{R}$

erreur de calcul de la solution particulière



Explication Générale

Cours: Une équation différentielle du type $y' + ay = b$ a pour solution $y = Ke^{-at} + \frac{b}{a}$

Raisonnement: Il faut transformer (Eq) en $i'(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{E}{L}$ en divisant par L

On identifie $a = \frac{R}{L}$ et $b = \frac{E}{L}$



Un circuit électrique comprend un générateur de tension E (exprimée en volts V), un condensateur de capacité C (exprimée en Farad F) et un conducteur ohmique de résistance R (exprimée en ohms Ω) placés en série. La tension aux bornes du condensateur, exprimée en volts (V), est fonction du temps t , exprimé en secondes, et est solution de l'équation différentielle: (Eq) $RCu'(t) + u(t) = E$

A la mise sous tension du générateur, la tension aux bornes du condensateur est nulle, soit $u(0) = 0$

Quelle est la solution $u(t)$?

☐ $E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

☐ $E(1 - e^{\frac{t}{RC}})$

☐ $E(-e^{-\frac{t}{RC}} - 1)$

☒ $E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

☐ $E(1 - e^{\frac{t}{RC}})$

erreur de calcul de la solution de l'équation homogène

☐ $E(-e^{-\frac{t}{RC}} - 1)$

reprendre le calcul de la constante d'intégration



Explication Générale

Cours : Une équation différentielle du type $y' + ay = b$ a pour solution $y = Ke^{-at} + \frac{b}{a}$

Raisonnement: Il faut transformer (Eq) en $u'(t) + \frac{1}{RC}u(t) = \frac{E}{RC}$ en divisant par RC

- On identifie $a = \frac{1}{RC}$ et $b = \frac{E}{RC}$
- Condition initiale : $u(0) = 0$ donc $u(0) = Ke^{-\frac{0}{RC}} + E = K \times 1 + E$
d'où $K = -E$

On obtient $u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$