

Exercices : Dérivées, dérivées partielles

1^{ère} partie : Dérivation :

Exercice 1 :

1. Calcul de dérivées en terminale générale

Exercice sur les calcul de dérivée :

On précisera s'il y a lieu l'ensemble des réels où f est dérivable. Puis on donnera une expression simplifiée de la dérivée.

Question 1 :

$$f : x \mapsto (x^2 - 4x + 1)e^{x^2}$$

Question 2 :

$$f : x \mapsto \left(\frac{x}{x+2} \right)^5$$

Question 3 :

$$f : x \mapsto e^{1/(x-1)}$$

Exercice 2 :

Exercice sur les dérivées en terminale générale :

Déterminer les fonctions polynômes P non nulles telles qu'il existe un réel a tel que $P = a P'^2$.

Exercice 3 : Exercice sur la convexité

On note $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
et si $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x+1}$.

Question 1 :

$$f''(x) = \frac{x^2 + ax + b}{(x+1)^3} e^{-x}$$

$a; b = ?$

Question 2 :

La fonction f

- a. est convexe
- b. est concave
- c. change de concavité.

Question 3 :

En écrivant l'équation réduite de la tangente en $(0, f(0))$, trouver une inégalité faisant intervenir $f(x)$ valable sur $] -1, +\infty[$.

Exercice 4 :

$$f : x \mapsto (x + 1) e^{-x^2}$$

Question 1 :

Pour tout réel x , $f''(x) = 2Q(x) e^{-x^2}$ avec $Q(x) = a(x^3 + x^2) - 3x - 1$.

$$a = ?$$

Question 2 :

On peut écrire $Q(x) = (x - 1)(2x^2 + \alpha x + \beta)$

avec $\alpha, \beta = ?$

Question 3 :

Quel est le nombre de points d'inflexion du graphe de f ?

On précisera leur(s) abscisse(s).

Nombre ?

Question 4 :

Préciser l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1

2nde partie : dérivées partielles :

Exercice 5 : Déterminer les dérivées partielles :

Pour $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \cos(x + y^2)e^{-z}$,

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x^2 y + 3y^3}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0), \\ f(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Déterminer les dérivées partielles de f en un point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Exercice 7 :

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivante admet des dérivées partielles en tout point mais n'est pas continue en $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{en } (0, 0) \end{cases}$$

Déterminer les dérivées partielles en dehors de l'origine.

Exercice 8 :

Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

1. $f(x, y) = e^x \cos y$.
2. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos(xy)$.
3. $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}$.