

Exercices : Dérivées, dérivées partielles

1^{ère} partie : Dérivation :

Exercice 1 :

1. Calcul de dérivées en terminale générale

Exercice sur les calcul de dérivée :

On précisera s'il y a lieu l'ensemble des réels où f est dérivable. Puis on donnera une expression simplifiée de la dérivée.

Question 1 :

$$f : x \mapsto (x^2 - 4x + 1) e^{x^2}$$

Question 2 :

$$f : x \mapsto \left(\frac{x}{x+2} \right)^5$$

Question 3 :

$$f : x \mapsto e^{1/(x-1)}$$

Solution 1 :

Correction de l'exercice sur les calculs de dérivées

Question 1 :

On écrit $f(x) = u(x) e^{v(x)}$

avec $u(x) = x^2 - 4x + 1$ et $v(x) = x^2$

Puis on note $w(x) = e^{v(x)}$

• Dérivabilité

* v est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc w est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

* u est une fonction polynôme, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$,

par produit de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}$

• Calcul de la dérivée

Pour tout réel x ,

$$f'(x) = u'(x) e^{v(x)} + u(x) v'(x) e^{v(x)}$$

$$f'(x) = (u'(x) + u(x) v'(x)) e^{v(x)}$$

$$f'(x) = (2x - 4 + (x^2 - 4x + 1) 2x) e^{x^2}$$

$$f'(x) = 2 (x^3 - 4x^2 + 2x - 2) e^{x^2}.$$

Question 2 :

On note $u : x \mapsto \frac{x}{x+2}$, u est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, donc $f = u^5$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et $f' = 5 u' u$.

On écrit $u(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ avec $a(x) = x$ et $b(x) = x + 2$

$$u'(x) = \frac{a'(x)b(x) - a(x)b'(x)}{b^2(x)}$$

$$u'(x) = \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}.$$

Donc si $x \neq -2$, $f'(x) = 5 \times \frac{2}{(x+2)^2} \times \left(\frac{x}{x+2}\right)^4$

$$f'(x) = \frac{10x^4}{(x+2)^6}.$$

Question 3 :

• Domaine de dérivabilité

$$f(x) = e^{u(x)}$$

u est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

• Calcul de la dérivée

Si $x \neq 1$, $f'(x) = u'(x) e^{u(x)}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} e^{1/(x-1)}.$$

Exercice 2 :

Exercice sur les dérivées en terminale générale :

Déterminer les fonctions polynômes P non nulles telles qu'il existe un réel a tel que $P = a P'^2$.

Solution 2 :

Correction de l'exercice sur les dérivées :

• On cherche le degré d'une solution P .

On suppose que P est une fonction polynôme de degré n que l'on écrit sous la forme $P(x) = a_n x^n + Q(x)$ où Q est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

Pour tout réel x , $P'(x) = n a_n x^{n-1} + Q'(x)$

alors $P'^2(x) = n^2 a_n^2 x^{2n-2} + R(x)$ avec R fonction polynôme de degré au plus égal à $2n - 3$.

Si $P(x) = a P'(x)^2$, on doit avoir $n = 2n - 2$ ssi $n = 2$.

• On détermine P .

Dans la suite on cherche donc $P : x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $\alpha \neq 0$

$P' : x \mapsto 2\alpha x + \beta$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a P'(x)^2$

ssi pour tout réel x , $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = a (4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2)$

On obtient les conditions nécessaires et suffisantes par égalité de deux fonctions polynômes

$$\begin{cases} \alpha = 4a\alpha^2 \\ \beta = 4a\alpha\beta \\ \gamma = a\beta^2 \end{cases}$$

Comme $\alpha \neq 0$

$$\begin{cases} 1 = 4a\alpha \\ \beta(1 - 4a\alpha) = 0 \\ \gamma = a\beta^2 \end{cases} \text{ssi} \begin{cases} 1 = 4a\alpha \\ \beta \times 0 = 0 \text{ssi} \begin{cases} 1 = 4a\alpha \\ \gamma = \beta^2/(4\alpha) \end{cases} \end{cases}$$

Les solutions non nulles sont les fonctions polynômes $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \frac{\beta^2}{4\alpha}$
avec $\alpha \neq 0$ et dans ce cas $a = \frac{1}{4\alpha}$.

Exercice 3 : Exercice sur la convexité

On note $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

et si $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x+1}$.

Question 1 :

$$f''(x) = \frac{x^2 + ax + b}{(x+1)^3} e^{-x}$$

$a; b = ?$

Question 2 :

La fonction f

- a. est convexe
- b. est concave
- c. change de concavité.

Question 3 :

En écrivant l'équation réduite de la tangente en $(0, f(0))$, trouver une inégalité faisant intervenir $f(x)$ valable sur $] -1, +\infty[$.

Solution 3 :

Question 1 :

$$a; b = 4; 5$$

f est deux fois dérivable sur $\mathcal{D}$

• Dérivée première

En écrivant $f(x) = \frac{1}{a(x)} \times e^{-x}$

$$f'(x) = \frac{-a'(x)}{a^2(x)} \times e^{-x} - \frac{1}{a(x)} \times e^{-x}$$

$$f'(x) = \left(\frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} \right) e^{-x}$$

$$f'(x) = \frac{-2-x}{(1+x)^2} e^{-x}.$$

• Dérivée seconde

On écrit $f'(x) = u(x) \frac{1}{v^2(x)} e^{-x}$

donc

$$f''(x) = u'(x) \frac{1}{v^2(x)} e^{-x} - u(x) \frac{2v'(x)}{v^3(x)} e^{-x} - \frac{u(x)}{v^2(x)} e^{-x}$$

$$f''(x) = \left(\frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{2(x+2)}{(x+1)^3} + \frac{x+2}{(x+1)^2} \right) e^{-x}$$

Par réduction au même dénominateur

$$f''(x) = \frac{N(x)}{(x+1)^3} e^{-x}$$

avec $N(x) = -(x+1) + 2(x+2) + (x+2)(x+1)$

$$N(x) = x + 3 + x^2 + 3x + 2$$

$$N(x) = x^2 + 4x + 5.$$

$$f''(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{(x+1)^3} e^{-x}.$$

Question 2 :

$$f''(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{(x+1)^3} e^{-x}$$

Le discriminant de $x^2 + 4x + 5 = 0$ est $\Delta = 16 - 20 < 0$, donc $x^2 + 4x + 5 > 0$ pour tout réel.

$f''(x)$ est du signe de $(x+1)^3$.

$f''(x) > 0$ si $x > -1$ et $f''(x) < 0$ si $x < -1$.

f change de concavité sur $\mathcal{D}$.

Mais le graphe n'admet pas de point d'inflexion, puisque f n'est pas définie en -1 .

Question 3 :

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = -2$$

La tangente a pour équation réduite $y = f'(0)x + f(0)$ soit $y = -2x + 1$.

La fonction f est convexe sur $] -1, +\infty[$. La courbe est au dessus de la tangente en $(0, f(0))$:

$$\text{pour tout } x > -1, \frac{e^{-x}}{x+1} \geq 1 - 2x.$$

On peut aussi écrire puisque $x + 1 > 0$,

$$\text{si } x > -1, e^{-x} \geq (1 - 2x)(x + 1)$$

cette inégalité reste vraie en -1 .

$$\text{Si } x \geq -1, \boxed{e^{-x} \geq (1 - 2x)(1 + x)}.$$

Exercice 4 :

$$f : x \mapsto (x + 1)e^{-x^2}$$

Question 1 :

Pour tout réel x , $f''(x) = 2Q(x)e^{-x^2}$ avec $Q(x) = a(x^3 + x^2) - 3x - 1$.

$$a = ?$$

Question 2 :

$$\text{On peut écrire } Q(x) = (x - 1)(2x^2 + \alpha x + \beta)$$

$$\text{avec } \alpha; \beta = ?$$

Question 3 :

Quel est le nombre de points d'inflexion du graphe de f ?

On précisera leur(s) abscisse(s).

Nombre ?

Question 4 :

Préciser l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1

Solution 4 :

Question 1 :

$$a = 2$$

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

• Dérivée première

$$f(x) = a(x) e^{b(x)}$$

$$f(x) = a'(x) e^{b(x)} + a(x) b'(x) e^{b(x)}$$

$$f'(x) = (a'(x) + a(x) b'(x)) e^{b(x)}$$

$$f'(x) = (1 - 2x(x + 1)) e^{-x^2}$$

$$f'(x) = (1 - 2x - 2x^2) e^{-x^2}.$$

• Dérivée seconde

comme ci-dessus,

$$f''(x) = (a'(x) + a(x) b'(x)) e^{b(x)}$$

$$\text{avec } a(x) = 1 - 2x - 2x^2$$

$$f''(x) = (-2 - 4x - 2x(1 - 2x - 2x^2)) e^{-x^2}$$

$$= 2(-1 - 2x - x + 2x^2 + 2x^3) e^{-x^2}$$

$$f''(x) = 2(2x^3 + 2x^2 - 3x - 1) e^{-x^2}.$$

Question 2 :

$$\text{avec } \alpha; \beta = 4; 1$$

$Q(1) = 0$, on peut factoriser $x - 1$ et écrire

$$Q(x) = (x - 1)(\gamma x^2 + \alpha x + \beta)$$

en comparant les termes en x^3 , on obtient $\gamma = 2$.

On développe

$$Q(x) = (x - 1)(2x^2 + \alpha x + \beta)$$

$$Q(x) = 2x^3 + (\alpha - 2)x^2 + (\beta - \alpha)x - \beta$$

par unicité de l'écriture d'une fonction polynôme

$$\begin{cases} \alpha - 2 = 2 \\ \beta - \alpha = -3 \\ -\beta = -1 \end{cases} \text{ssi} \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$\text{donc } Q(x) = (x - 1)(2x^2 + 4x + 1).$$

Question 3 :

$$\text{Nombre} = 3$$

Les racines de $2x^2 + 4x + 1 = 0$ sont $\frac{-2 - \sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2} - 2}{2}$.

Q et donc f'' s'annule en changeant de signe en

$$1, \frac{-2 - \sqrt{2}}{2} \text{ et } \frac{\sqrt{2} - 2}{2}$$

On a trois points d'inflexion.

Question 4 :

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 est

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ f(1) &= 2e^{-1}, f'(1) = -3e^{-1} \\ \boxed{y &= e^{-1}(-3x+5)} \end{aligned}$$

2^{nde} partie : dérivées partielles :

Exercice 5 : Déterminer les dérivées partielles :

Pour $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \cos(x + y^2)e^{-z}$,

Solution 5 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\sin(x + y^2)e^{-z} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -2y \sin(x + y^2)e^{-z} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\cos(x + y^2)e^{-z}$$

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x^2y + 3y^3}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0), \\ f(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Déterminer les dérivées partielles de f en un point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Solution 6 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2y + 3y^3}{x^2 + y^2} = \frac{2xy(x^2 + y^2) - 2x(x^2y + 3y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = -4 \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{x^2y + 3y^3}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + 9y^2)(x^2 + y^2) - 2y(x^2y + 3y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 8x^2y^2 + 3y^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Exercice 7 :

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivante admet des dérivées partielles en tout point mais n'est pas continue en $(0, 0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{en } (0, 0) \end{cases}$$

Déterminer les dérivées partielles en dehors de l'origine.

Solution 7 :

On se place en un point $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Dans un voisinage de ce point, f est définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. La fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ est donc continue et dérivable au voisinage de x_0 . La dérivée partielle s'obtient en dérivant la fonction d'une variable $x \mapsto f(x, y_0)$. Ainsi, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{y_0^3 - x_0^2 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}.$$

De même, en dérivant la fonction $y \mapsto f(x_0, y)$, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{x_0^3 - x_0 y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2}.$$

Exercice 8 :

Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

1. $f(x, y) = e^x \cos y$.
2. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos(xy)$.
3. $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}$.

Solution 8 :

Pour tout réel y fixé, la fonction $x \mapsto e^x \cos y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui justifie l'existence de la dérivée partielle par rapport à la première variable dans le premier exemple. La justification est identique pour les autres fonctions et on trouve respectivement :

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin y.$$

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \cos(xy) - y(x^2 + y^2) \sin(xy),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \cos(xy) - x(x^2 + y^2) \sin(xy).$$

3.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{xy^2}{\sqrt{1 + x^2 y^2}}, \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{yx^2}{\sqrt{1 + x^2 y^2}}.$$