

Résumé de cours : dérivation, dérivation partielle

Rappels de Terminale sur la dérivation :

1. Retour sur les cours de première

1.1. Définitions de fonctions sur les dérivées et la convexité

- Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I contenant a .

f est dérivable en a ssi la fonction τ définie pour $x \in I$ et $x \neq a$ par $\tau(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

admet une limite finie L en a .

L = le nombre dérivé de la fonction f en a

$\tau(x)$ est le taux d'accroissement de la fonction f en x .

- S'il existe un réel L_d tel que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L_d$,

f est dite dérivable à droite en a et son nombre dérivé à droite en a L_d est noté $f'_d(a)$.

- S'il existe un réel L_g tel que $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L_g$,

f est dite dérivable à gauche en a et son nombre dérivé à gauche en a L_g est noté $f'_g(a)$.

- Si $a \in I$ n'est pas une borne de I , f est dérivable en a ssi f est dérivable à droite et à gauche en a et si $f'_d(a) = f'_g(a)$.

- Si $I = [a, b]$, f est dérivable à droite en a ssi f est dérivable en a .

Si $I = [b, a]$, f est dérivable à gauche en a ssi f est dérivable en a .

À savoir : la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 , mais elle est dérivable à droite et à gauche en 0 avec : $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.

1.2. Interprétation des fonctions dérivées en Terminale Générale

- Si f est dérivable en a , le graphe de f admet une tangente en $(a, f(a))$ d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

La tangente est la position limite des sécantes $M(a)M(x)$ lorsque x tend vers a , en notant $M(x)$ le point de coordonnées $(x, f(x))$.

- Si f est continue sur $[a, b[$ et si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$, le graphe de f admet une tangente verticale (à droite) en $(a, f(a))$.

On raisonne de même pour une tangente verticale à gauche d'un point.

1.3. La fonction dérivée et son utilisation

• D: si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de I , la fonction dérivée de f est la fonction $f' : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$.

• Dérivée et variation

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle I à valeurs réelles.

* f est constante sur I ssi pour tout $x \in I, f'(x) = 0$.

* f est croissante sur I ssi pour tout $x \in I, f'(x) \geq 0$.

* f est décroissante sur I ssi pour tout $x \in I, f'(x) \leq 0$.

• Dérivée et extremum

Soit f une fonction admettant un extremum en $a \in I$, où a n'est pas une borne de I .

Si f est dérivable en $a, f'(a) = 0$.

La réciproque est fautive comme dans l'exemple $f : x \mapsto x^3$, la dérivée s'annule en 0 et f n'admet pas d'extremum en 0.

• Programme de Terminale : Si f est dérivable en a, f est continue en a .

1.4. La fonction dérivée et son utilisation

• Si u et v sont dérivables sur I ,

* $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$

* Si $k \in \mathbb{R}, k u$ est dérivable sur I et

$$(k u)' = k u'$$

* $u v$ est dérivable sur I et $(u v)' = u' v + u v'$.

• Si u et v sont dérivables sur I et si v ne s'annule pas sur I ,

* $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

* $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$.

• $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et si $x > 0, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

• Soit f dérivable sur I . Soient a, b deux réels avec $a \neq 0$.

On note $J = \{x \in \mathbb{R} / a x + b \in I\}$.

On définit $g : J \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(ax + b)$.

g est dérivable sur J et

si $x \in J, g'(x) = a f'(ax + b)$.

2. Dérivées d'une fonction composée en Terminale Générale

2.1. Théorème de composition en terminale

Si v est une fonction dérivable sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, si la fonction u est dérivable sur l'intervalle J à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si pour tout $x \in I$, $v(x) \in J$, la fonction $u \circ v$ est définie sur I et dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $(u \circ v)'(x) = v'(x) u'(v(x))$.

ce que l'on écrit sous la forme $(u \circ v)' = v' \cdot u' \circ v$.

2.2. Les dérivées à connaître en terminale

On suppose que u est dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$

* pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$(u^n)' = n u' u^{n-1}.$$

* si u ne s'annule pas,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{-n u'}{u^{n+1}}.$$

* on note $e^u : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{u(x)}, (e^u)' = u' e^u$.

* On suppose que u est à valeurs strictement positives sur I .

$$\text{On note } \sqrt{u} : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{u(x)}, (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

* On note $\cos u : t \mapsto \cos(u(t))$ et $\sin u : t \mapsto \sin(u(t))$

$$(\cos u)' = -u' \sin u \quad (\sin u)' = u' \cos u.$$

3. La convexité en Terminale Générale

3.1. Dérivée seconde

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, si f' est dérivable sur I , on dit que f admet une dérivée seconde sur I et on note $f'' = (f')'$.

3.2. Fonction convexe et fonction concave

• Soit f une fonction définie sur l'intervalle I . On note Γ son graphe.

* f est convexe lorsque pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, la courbe Γ est située sous la corde $[AB]$ où $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

* f est concave lorsque pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, la courbe Γ est située au dessus de la corde $[AB]$ où $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

• Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I à valeurs réelles.

Il y a équivalence entre

* f est convexe sur I

* f' est croissante sur I

* f'' est à valeurs positives ou nulles

* pour tout $a \in I$, le graphe Γ de f est situé au dessus de la tangente en $(a, f(a))$ à la courbe Γ .

• Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I à valeurs réelles.

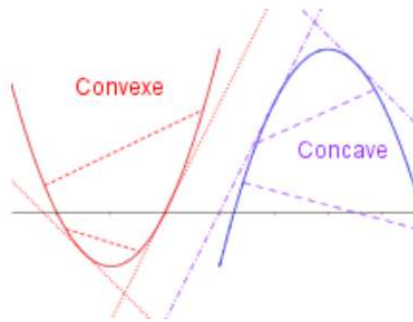
Il y a équivalence entre

* f est concave sur I

* f' est décroissante sur I

* f'' est à valeurs négatives ou nulles

* pour tout $a \in I$, le graphe Γ de f est situé en dessous de la tangente en $(a, f(a))$ à la courbe Γ .



Démonstration à connaître

Si la fonction f'' est positive ou nulle,

pour tout $a \in I$, le graphe Γ de f est situé en dessous de la tangente en $(a, f(a))$ à la courbe Γ .

3.3. Point d'inflexion au programme de terminale

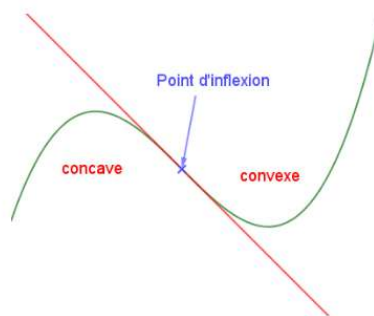
• Soit f une fonction dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et Γ son graphe.

Soit $a \in I$ et $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de Γ lorsque la courbe traverse sa tangente en A .

Ce qui est équivalent à f change de concavité en a .

Lorsque f est deux fois dérivable,

$A(a, f(a))$ est un point d'inflexion ssi f'' s'annule en changeant de signe en a .



3.4. Application à la démonstration d'inégalité

• En utilisant un raisonnement de convexité, on va montrer que

* pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$

* si a, b sont réels, $e^{(a+b)/2} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$.

• La fonction $f : x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car elle est deux fois dérivable et $f''(x) = f'(x) = e^x \geq 0$
 $f'(0) = 1$.

La tangente en $(0, f(0)) = (0, 1)$ a pour équation $y = 1 + x$.

La courbe est au dessus de sa tangente en $(0, 1)$: pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$

• On conserve la même fonction.

On considère les points $A(a, e^a)$ et $B(b, e^b)$

Le milieu C de ce segment a pour coordonnées $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{e^a + e^b}{2}\right)$, il est situé au dessus du point d'abscisse $(a+b)/2$ de Γ

donc $e^{(a+b)/2} \leq \frac{e^a + e^b}{2}$.

• En utilisant un raisonnement de convexité, on va montrer que pour tout $x > -1$, $\sqrt{1+x} \leq \frac{x}{2}$.

• La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est deux fois dérivable sur $] -1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{1+x}$$

en posant $v(x) = 2\sqrt{1+x}$ et en utilisant $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$ avec $v' : x \mapsto \frac{1}{4\sqrt{1+x}}$

$$f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{1+x}(1+x)} < 0$$

f est concave.

$$f'(0) = \frac{1}{2}$$

La tangente en $(0, f(0))$ a pour équation $y = 1 + \frac{1}{2}x$.

La courbe est située sous cette tangente donc $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$.

Dérivée partielle :

Dérivée partielle Soit $f : \Omega \rightarrow F$ une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé F . Soit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$ et soit $i \in [1; n]$. La dérivée partielle de f par rapport à la variable x_i est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}.$$

♦ On la note également $D_i f(\mathbf{a})$, ou $\partial_i f(\mathbf{a})$. ♦ Elle est égale à la dérivée selon le i -ième vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

REMARQUE : Lorsque l'espace de départ est $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, il est d'usage de noter x, y et z les coordonnées et de noter

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Autrement dit, la dérivée partielle d'une fonction à plusieurs variables est sa dérivée par rapport à l'une de ses variables, les autres étant gardées constantes.

Notation : La dérivée partielle de f par rapport à x est souvent notée $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Si f est une fonction à n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ et $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ des accroissements infinitésimaux de $x_1, x_2, \dots, x_n$ respectivement, alors l'accroissement infinitésimal correspondant de f est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \text{ cette expression est la « différentielle totale » de } f.$$

Remarque : Dans le cas où la fonction ne dépend que d'une seule variable, la dérivée et la dérivée partielle sont identiques : $f' = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}$.

Dans le cas d'une fonction de deux variables $(x, y) \mapsto f(x, y)$, on a :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}}$$

Remarque.

Pour une fonction d'une variable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on distingue le nombre dérivé $f'(x_0)$ et la fonction dérivée f' définie par $x \mapsto f'(x)$. Il en est de même avec les dérivées partielles. Pour $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ sont des nombres réels.
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont des fonctions de deux variables, par exemple :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

Exemple :

Calculer les dérivées partielles premières de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 e^{3y}.$$

Solution.

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, qui est la dérivée partielle de f par rapport à x , on considère que y est une constante et on dérive $x^2 e^{3y}$ comme si c'était une fonction de x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x e^{3y}.$$

Pour l'autre dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$, on considère que x est une constante et on dérive $x^2 e^{3y}$ comme si c'était une fonction de y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 e^{3y}.$$