

Résumé de cours : Primitives

1. Définition et généralités sur les primitives

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . On dit qu'une fonction F , définie sur I , est une primitive de la fonction f sur I si :

- la fonction F est dérivable sur I ;
- pour tout x de I , $F'(x) = f(x)$.

Théorème :

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Propriété:

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

- Soit F et G deux de ses primitives. Alors la fonction $F - G$ est une fonction constante sur I .
- Soit F une de ses primitives. Alors l'ensemble des primitives de f sur I est égal à l'ensemble des fonctions de la forme $F + k$, où k est une constante.
- Soit x_0 un élément de I et y_0 un nombre réel. Alors il existe une et une seule primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0 .
- Soient a et b deux nombres réels de I . Soit F une des primitives de la fonction f sur I . La différence $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie.

Propriété: primitive et intégrales :

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et F une de ses primitives. On a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Expression de $f(x)$ sur I	Expression de $F(x)$ sur I
$f(x) = 0$	$F(x) = k, k \in \mathbb{R}$
$f(x) = 1$	$F(x) = x + k, k \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k, k \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k, k \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k, k \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}, n \geq 2$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + k = -\frac{1}{n-1}x^{-n+1} + k, k \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + k, k \in \mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + k, k \in \mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k, k \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + k, k \in \mathbb{R}$

Dans le tableau suivant, f, g, u, v sont des fonctions continues sur un intervalle I , les fonctions F et G sont des primitives des fonctions f et g sur I . Les notations α, β désignent des nombres réels, et k désigne une constante.

Fonctions définies sur I	Primitives définies sur I
$f + g$	$F + G + k, k \in \mathbb{R}$
αf	$\alpha F + k, k \in \mathbb{R}$
$\alpha f + \beta g$	$\alpha F + \beta G + k, k \in \mathbb{R}$
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + k, k \in \mathbb{R}$
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + k, k \in \mathbb{R}$

2. Primitives et intégrale d'une fonction

Primitives et intégrale d'une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle

Dans cette section, on considérera, sauf mention contraire, des fonctions continues et de signe quelconque sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On généralise les résultats précédemment énoncés pour les fonctions continues et positives.

Définition: intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux nombres réels de I . Soit F une des primitives de la fonction f sur I . On appelle intégrale de a à b de la fonction f le nombre $F(b) - F(a)$ et on note

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Théorème :

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, la fonction G définie sur $[a; b]$ par

$$G : x \in [a; b] \mapsto G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est la primitive de f qui s'annule en a .

Propriété

- $\int_a^b f(t)dt = - \int_b^a f(t)dt$
- $\int_a^a f(t)dt = 0$

Propriété: linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$.

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad & \int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt \\ &= \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt \end{aligned}$$

Propriété: relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$.

$$\begin{aligned} \forall c \in [a; b], \quad & \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

Propriété: positivité

On suppose ici que f une fonction continue et positive sur l'intervalle I .

$$\forall a, b \in I, a \leq b : \int_a^b f(t) dt \geq 0$$

ATTENTION. La propriété de positivité de l'intégrale ne se généralise pas aux fonctions continues de signe quelconque !

Propriété: encadrement

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , telles que $f \leq g$, c'est-à-dire telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout x de I . Soit a et b dans I tels que $a \leq b$, alors:

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

Définition: valeur moyenne d'une fonction continue

La valeur moyenne d'une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$, avec $a < b$, est égale au nombre

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Propriété: inégalité de la moyenne

Soit une fonction f continue sur l'intervalle $[a; b]$, avec $a \neq b$, et deux nombres m et M tels que

$$\forall x \in [a; b], m \leq f(x) \leq M$$

Alors:

$$m \leq \mu \leq M$$

où $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ est la valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$.

Propriété: aire entre deux courbes

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$, telles que, pour tout t de $[a; b]$, $f(t) \leq g(t)$.

L'aire du domaine E limité par la courbe représentative de f , celle de g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ mesure

$$\int_a^b [g(t) - f(t)] dt \text{ en units d'aire}$$