

Résumé de cours : Fonctions trigonométriques :

On suppose dans tout le chapitre que l'on se place dans le plan usuel $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Rappels : parité et périodicité des fonctions trigonométriques

• Soit $\vec{u}$ un vecteur.

La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application $t_{\vec{u}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}, M \mapsto M'$ avec $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Si $\vec{u}(\alpha, \beta)$, si M a pour coordonnées (x, y) , $M' = t_{\vec{u}}(M)$ a pour coordonnées $x' = x + \alpha$ et $y' = y + \beta$.

• Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ centré en 0 (c'est-à-dire de la forme $] -a, a[$, $[-a, a]$ où $a \in \mathbb{R}$ ou $I = \mathbb{R}$).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

* f est une fonction paire si pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$.

Si f est une fonction paire, son graphe est symétrique par rapport à l'axe Oy .

* f est une fonction impaire si pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.

Si f est impaire, son graphe est symétrique par rapport au point O .

• Soit $T > 0$ et $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ telle que si $x \in \mathcal{D}$,

pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x + nT \in \mathcal{D}$.

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$.

f est une fonction périodique de période T lorsque pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x + T) = f(x)$.

Pour une fonction périodique de période T et paire ou impaire, choisir de l'étudier

... d'abord sur $[-T/2, T/2] \cap \mathcal{D}$ (utilisation de la périodicité)

... puis par la suite sur $[0, T/2] \cap \mathcal{D}$ (pour utiliser la parité).

2. En utilisant le cercle trigonométrique en Terminale

On note Γ le cercle de centre O et de rayon 1.

Soit $M(x)$ de Γ tel que x soit une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

On rappelle les résultats :

• Tout réel $x + 2k\pi$ est aussi une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ et que l'on écrit $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = x \pmod{2\pi}$.

• Les coordonnées de $M(x)$ sont $(\cos(x), \sin(x))$.

• Pour tout réel x , $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

• Pour tout réel x ,

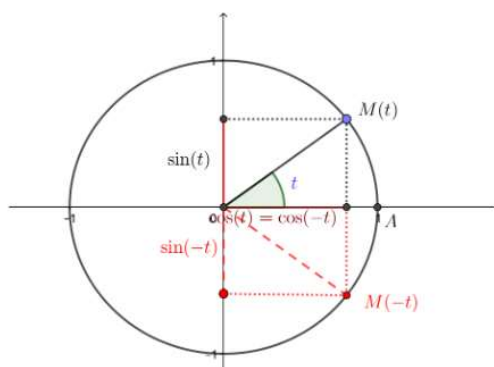
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

$$\text{et } \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

ce que l'on traduit en disant que les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont périodiques de période 2π .

• Pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$,

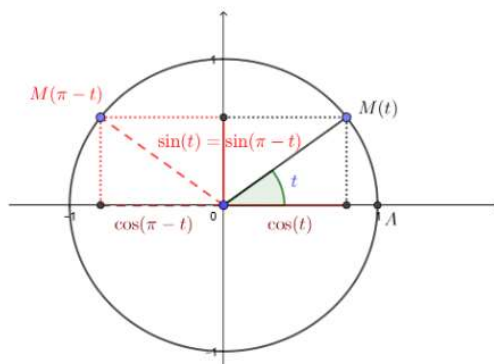
ce que l'on traduit en disant que la fonction $\cos$ est paire et la fonction $\sin$ est impaire.



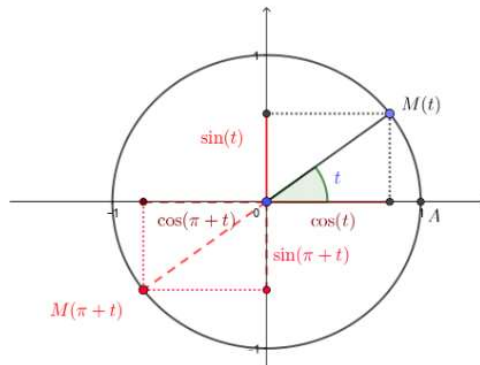
• Pour tout réel x , $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

$$\text{et } \sin(\pi - x) = \sin(x)$$

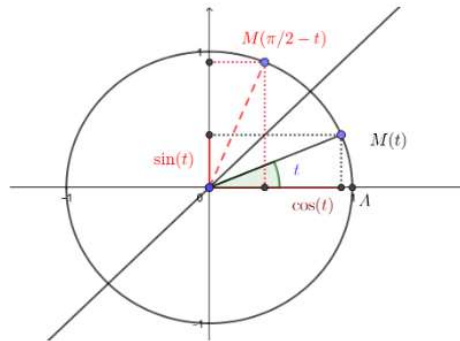
en utilisant $M(\pi - x)$ et $M(x)$ sont symétriques par rapport à Oy .



- Pour tout réel x , $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
 et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
 en utilisant $M(\pi + x)$ et $M(x)$ sont symétriques par rapport à O .



- Pour tout réel x , $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
 et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.



• Les valeurs à connaître

t	$\cos(t)$	$\sin(t)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

3. Etude de la fonction cosinus, fonction trigonométrique de Terminale

- La fonction cosinus est définie et continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et paire.

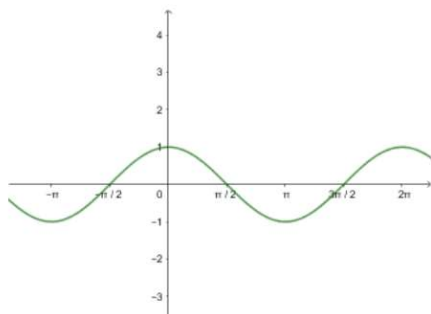
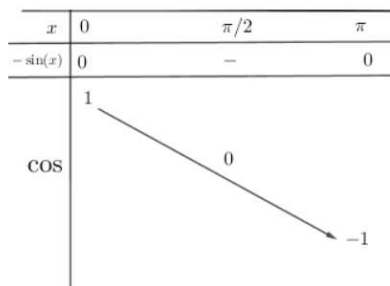
Il suffit de l'étudier sur $[-\pi, \pi]$ et enfin sur $[0, \pi]$.

On complète le graphe par symétrie par rapport à l'axe Oy puis par translation de vecteur $2\pi \vec{i}$.

- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x \mapsto -\sin(x)$
Elle est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

Remarque Pour tout réel x , $\cos'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

- On obtient donc le tableau de variation suivant et le graphe :



- Si u est une fonction dérivable sur l'intervalle I , $f : x \mapsto \cos(u(x))$ est une fonction dérivable sur I et si $x \in I$, $f'(x) = -u'(x) \sin(u(x))$.

- La fonction $\cos$ est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$ avec $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$, donc pour tout $a \in [-1, 1]$, il existe un unique $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $a = \cos(\alpha)$.

- La fonction $\cos$ n'a pas de limite en $\pm\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$.