

Résumé de cours de terminale : Les nombres complexes

1. Calculs dans $\mathbb{C}$ en Terminale

1.1. Complexes, partie réelle et imaginaire

● On admet l'existence d'un ensemble appelé ensemble des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés :

* $\mathbb{C}$ est un ensemble contenant $\mathbb{R}$ et un élément noté i tel que $i^2 = -1$.

* Tout élément $z \in \mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $z = a + i b$ où a et b sont des réels. Cette écriture, appelée écriture cartésienne de z , est unique.

a est la partie réelle de z et est notée $\operatorname{Re}(z)$

b est la partie imaginaire de z et est notée $\operatorname{Im}(z)$.

* Si $z = a + i b$ où a et b sont réels, $z = 0$ ssi $a = b = 0$.

* Si $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ sont écrits $z = a + i b$ et $z' = a' + i b'$ où a, b, a' et b' sont réels,

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

$$z \cdot z' = (a a' - b b') + i(a b + a' b').$$

● si $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et si $k \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$$

$$\operatorname{Re}(k z) = k \operatorname{Re}(z)$$

$$\operatorname{Im}(k z) = k \operatorname{Im}(z).$$

1.2. Conjugué d'un nombre complexe

● Si $z = a + i b$ où a et b sont réels, le conjugué de z est noté $\bar{z}$ et défini par $\bar{z} = a - i b$.

● Propriétés :

Si z et z' sont des complexes

$$* \overline{\bar{z}} = z$$

$$* \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$* \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$$

$$* \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$* \text{Si } n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

● Si $z \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

● Si $z \in \mathbb{C}$

$$* z \text{ est réel ssi } \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ ssi } z = \bar{z}$$

$$* z \text{ est un imaginaire pur ssi } \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ ssi } z = -\bar{z}.$$

1.3. Module d'un nombre complexe

- Si z est un complexe, $z \bar{z}$ est un réel positif ou nul.

Le module de z est défini par :

$$|z| = \sqrt{z \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

en écrivant $z = a + i b$ où a et b sont réels.

- Propriétés :

Si z et z' sont des complexes :

$$* |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|.$$

$$* \text{si } z = a + i b \text{ est un complexe non nul, } \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - i b}{a^2 + b^2}.$$

* si z est un complexe non nul,

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$$

$$* \text{si } z' \neq 0, \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$* \text{si } n \in \mathbb{N}, \bar{z}^n = (\bar{z})^n.$$

1.4. Ensemble des nombres complexes de module 1

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

$$* 1 \in \mathbb{U}, i \in \mathbb{U}.$$

$$* \text{Si } (z, z') \in \mathbb{U}^2,$$

$$z z' \in \mathbb{U}, \frac{1}{z} \in \mathbb{U} \text{ et } \frac{z}{z'} \in \mathbb{U}.$$

$$* \text{Si } z \in \mathbb{U}, -z \in \mathbb{U} \text{ et } \bar{z} \in \mathbb{U}.$$

$$* \text{Si } z \in \mathbb{U}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, z^n \in \mathbb{U}.$$

$$* z \in \mathbb{U} \text{ ssi } \frac{1}{z} \in \mathbb{U}.$$

Pour tout complexe z , $\bar{z}$, $-z$ ont même module que z .

1.5. Formule du binôme de Newton

Si z et z' sont des complexes et $n \in \mathbb{N}^*$

$$(z + z')^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k z'^{n-k}$$

$$\text{avec } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

où $0! = 1$

et si $k \in \mathbb{N}^*$, $k! = 1 \times 2 \times \dots \times k$.

1.6. Suite géométrique complexe en maths expertes

- Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite complexe. C'est une suite géométrique s'il existe $q \in \mathbb{C}$ (appelé raison) tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = q u_n$.

Les propriétés suivantes des suites géométriques réelles sont encore valables :

- La suite géométrique $(u_n)_{n \geq 0}$ de raison q vérifie pour tout entier n , $u_n = u_0 q^n$
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La suite géométrique $(u_n)_{n \geq k}$ de raison q vérifie pour tout entier $n \geq k$, $u_n = u_k q^{n-k}$
- Si $q \in \mathbb{C}$ et $q \neq 1$,

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

1.7. Résolution de deux équations d'ordre 1.

- Pour résoudre une équation de la forme $az + b = 0$ dans $\mathbb{C}$, lorsque $a \neq 0$, il suffit d'écrire :

$$z = \frac{-b}{a} = \frac{-b \bar{a}}{|a|^2}.$$

Il vaut mieux éviter d'introduire la partie réelle et imaginaire de z , ce qui alourdit la démonstration

- Pour résoudre une équation de la forme $az + b\bar{z} = c$ dans $\mathbb{C}$,

Il faut dans ce cas introduire $z = x + iy$ où x et y sont réels, et en égalant les parties réelles et imaginaires, on obtient un système de deux équations à deux inconnues.

2. Plan complexe sur les nombres complexes en terminale

Dans toute la suite, on suppose le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On dit que l'on se place dans le plan complexe.

2.1. Affixe d'un point

- À tout complexe $z = x + iy$, on associe le point $M(x, y)$.

On dit que z est l'affixe du point M et que M est l'image du complexe z .

- À tout point M de coordonnées (x, y) on associe le complexe $z = x + iy$.

- *Cas particuliers*

* Un point M a une affixe réelle ssi il appartient à l'axe des abscisses appelé axe des réels.

* Un point M a une affixe imaginaire pure ssi il appartient à l'axe des ordonnées appelé axe des imaginaires purs.

* Deux points sont égaux ssi ils ont même affixe.

• **Propriétés :**

- * les images M et M' de z et $-\bar{z}$ sont symétriques par rapport à O .
- * Les images M et M'' de z et de $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.
- * Les images M et M_1 de z et $-\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
- * si M est l'image du complexe z , $|z| = OM$.

- Si A et B ont pour affixes z_A et z_B , le milieu C du segment $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A + z_B}{2}$.

2.2. Affixe d'un vecteur

- A tout complexe $z = x + iy$, on associe le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on dit que $z = x + iy$ est l'affixe du vecteur $\vec{w}$

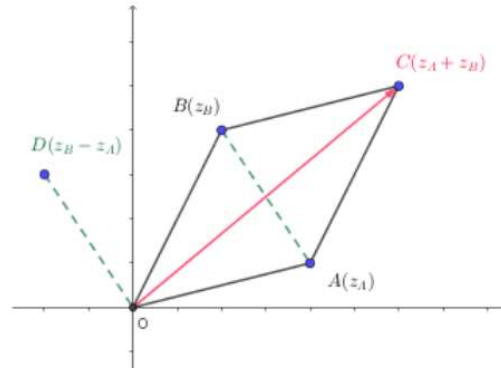
- Réciproquement, à tout vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on associe le complexe $z = x + iy$.

- z est l'affixe du point M ssi z est l'affixe du vecteur $\vec{OM}$.

- Si z_A est l'affixe de A et z_B est l'affixe de B , $z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\vec{AB}$.

- Si z_A est l'affixe de A et z_B est l'affixe de B , $z_A + z_B$ est l'affixe du point C tel que $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$.
 OC est une diagonale du parallélogramme construit sur $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$.

- $z_B - z_A$ est l'affixe du quatrième sommet D du parallélogramme construit sur $\vec{OA}$ et $\vec{AB}$.
 (voir le dessin ci-dessous)



3. Forme trigonométrique d'un complexe non nul

Dans toute la suite, on suppose le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3.1. Définition de l'argument d'un complexe non nul

• Soit $z = x + iy$ un complexe non nul.

Il existe un réel θ tel que

$$\cos \theta = \frac{x}{|z|} \text{ et } \sin \theta = \frac{y}{|z|}.$$

Et si θ est solution, toute autre solution est de la forme $\theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

On dit que θ est un argument du complexe z et on écrit

$$\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$$

et on lit que l'argument de z est égal à θ modulo 2π .

0 n'a pas d'argument !

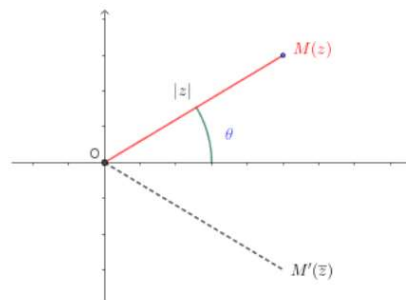
3.2. Interprétation de l'argument d'un complexe non nul

• Soit z un complexe non nul et M son image.

* $\arg(z)$ est une mesure en radian de l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$,

on note $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z) \pmod{2\pi}$.

• Si $\vec{w}$ est le vecteur image du complexe z , $\arg(z)$ est une mesure de l'angle de vecteurs $(\vec{u}, \vec{w})$.



3.3. Propriétés de l'argument d'un complexe non nul

• propriétés simples à connaître :

$$* \arg(z) = 0 \quad (2\pi) \text{ ssi } z \in \mathbb{R}^{+*}$$

$$* \arg(z) = \pi \quad (2\pi) \text{ ssi } z \in \mathbb{R}^{-*}$$

$$* \arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \text{ ssi } z \text{ est un imaginaire pur à partie imaginaire strictement positive.}$$

$$* \arg(z) = \frac{3\pi}{2} \quad (2\pi) \text{ ssi } z \text{ est un imaginaire pur à partie imaginaire strictement négative.}$$

• Si z est un complexe non nul

$$* \arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad (2\pi)$$

$$* \arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad (2\pi)$$

$$* \arg(-\bar{z}) = \pi - \arg(z) \quad (2\pi)$$

• si z et z' sont deux complexes non nuls

$$* \arg(z z') = \arg(z) + \arg(z') \quad (2\pi)$$

$$* \text{si } n \in \mathbb{N}^*, \arg(z^n) = n \arg(z) \quad (2\pi)$$

$$* \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad (2\pi)$$

$$* \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad (2\pi)$$

3.4. Forme trigonométrique

Soit z un complexe non nul, on note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \quad (2\pi]$

Alors $z = r (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$.

Une telle écriture est appelée la forme trigonométrique du complexe z .

• *Propriété*

Deux complexes z et z' non nuls vérifient

$$z = z' \text{ ssi } \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') \quad (2\pi) \end{cases}$$

3.5. Pour trouver la forme trigonométrique d'un complexe (première partie)

• **M1.** Lorsque l'on a obtenu $Z = r (\cos(t) + i \sin(t))$,

ne pas conclure hâtivement:

* si $r = 0$, $Z = 0$, module nul, pas d'argument,

* si $r > 0$, $|Z| = r$ et $\arg(Z) = t \quad (2\pi)$

* si $r < 0$,

$|Z| = -r$ et $\arg(Z) = \pi + t \quad (2\pi)$.

• **M2.** On peut faire le calcul de $|Z| = \sqrt{Z \bar{Z}}$, puis écrire

$$Z = |Z| (u + i v),$$

alors il reste à trouver un réel t tel que

$u + i v = \cos(t) + i \sin(t)$, c'est à dire à trouver un réel t tel que $\cos(t) = u$ et $\sin(t) = v$.

Les cas particuliers

$z =$	tel que	$\arg(z)$
x	$x > 0$	0
x	$x < 0$	π
iy	$y > 0$	$\frac{\pi}{2}$
iy	$y < 0$	$-\frac{\pi}{2}$

On rappelle en particulier les formules à apprendre par cœur :

t	$\cos(t)$	$\sin(t)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

- **M3.** Lorsque Z est un produit ou un quotient de deux complexes, il est souvent plus simple de calculer module et argument des deux facteurs du produit ou du quotient et d'appliquer les règles sur les modules et arguments des produits ou des quotients.

4. Formules de trigonométrie programme de maths expertes en terminale

4.1. Formule de trigonométrie pour la fonction cosinus

Pour tous réels a et b ,

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

Démonstration :

On se place dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On note Γ le cercle de centre O et de rayon 1.

On introduit les points A et B de Γ tels que $(\vec{u}, \vec{OA}) = a \pmod{2\pi}$

et $(\vec{u}, \vec{OB}) = b \pmod{2\pi}$

alors $(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{u}, \vec{OB}) - (\vec{u}, \vec{OA}) \pmod{2\pi}$

$(\vec{OA}, \vec{OB}) = b - a \pmod{2\pi}$

alors $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \cdot OB \cos(\vec{OA}, \vec{OB})$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos(b - a).$$

Les coordonnées de $\vec{OA}$ sont $\begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix}$ celles de $\vec{OB}$ sont $\begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix}$

On calcule le produit scalaire :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b).$$

On a prouvé que $\cos(b - a) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$

et on termine par parité de la fonction cos :

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

Puis en remplaçant b par $-b$ et comme $\cos(-b) = \cos(b)$ et $\sin(-b) = -\sin(b)$,

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

4.2. Formule de trigonométrie pour la fonction sinus

Pour tous réels a et b ,

$$*\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$$

$$*\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$$

Démonstration :

On rappelle que pour tout réel t

$$\sin(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \cos(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right).$$

$$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right).$$

$$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right).$$

On utilise la formule donnant $\cos(a' - b)$ pour $a' = \frac{\pi}{2} - a$

$$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos(b) + \sin(b) \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a).$$

En remplaçant b par $-b$ et en utilisant $\sin(-b) = -\sin(b)$ et $\cos(-b) = \cos(b)$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a).$$

4.3. Formule de trigonométrie pour l'angle double

• Pour tout réel t ,

$$*\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$$

$$\cos(2t) = 2 \cos^2(t) - 1 = 1 - 2 \sin^2(t)$$

$$*\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$

Démonstration :

On utilise les formules du début du paragraphe avec $a = b = t$

puis la formule $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

5. Fonction exponentielle complexe en maths expertes

5.1. Définition et propriétés de la fonction exponentielle complexe

- Si $x \in \mathbb{R}$, on note

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x).$$

Cas particuliers

$$* e^{i(2k\pi)} = 1 \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}$$

$$* e^{i\pi} = -1$$

$$* i = e^{i\pi/2}.$$

- **Propriétés** si x et y sont réels

$$* e^{ix} = e^{iy} \text{ ssi il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x - y = 2k\pi$$

$$* |e^{ix}| = 1$$

$$* \arg(e^{ix}) = x \pmod{2\pi}$$

$$* e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

$$* \overline{e^{ix}} = e^{-ix}$$

$$* \frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$$

$$* \text{Si } n \in \mathbb{N}, (e^{ix})^n = e^{inx}.$$

5.2. Formules d'Euler

- Pour tout réel t ,

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

- Utilisation pour linéariser (c'est-à-dire transformer un produit en une somme)

Pour linéariser une expression de la forme $\cos^p(t) \sin^q(t)$ où p et q sont dans $\mathbb{N}$, remplacer $\cos(t)$ et $\sin(t)$ par les formules d'Euler, utiliser le binôme de Newton, développer, regrouper les termes en e^{ikt} et e^{-ikt} pour transformer selon le signe en $\cos(kt)$ ou $\sin(kt)$

- Transformer une expression de la forme $\cos(x) \cos(y)$, $\cos(x) \sin(y)$ ou $\sin(x) \sin(y)$:

remplacer par les formules d'Euler, simplifier et regrouper les termes de la forme e^{it} et e^{-it} pour transformer selon le signe en $\cos(t)$ ou $\sin(t)$.

5.3. Simplification de fonction exponentielle

- **M1.** Pour simplifier lorsque t et t' sont réels, $e^{it} + e^{it'}$ ou $e^{it} - e^{it'}$, on met en facteur « e puissance la demi-somme des exposants », ce qui donne :

$$* e^{it} + e^{it'} = e^{i(t+t')/2} \left(e^{i(t-t')/2} + e^{-i(t-t')/2} \right)$$

$$e^{it} + e^{it'} = 2 \cos\left(\frac{t-t'}{2}\right) e^{i(t+t')/2}$$

$$* e^{it} - e^{it'} = e^{i(t+t')/2} \left(e^{i(t-t')/2} - e^{-i(t-t')/2} \right)$$

$$e^{it} - e^{it'} = 2i \sin\left(\frac{t-t'}{2}\right) e^{i(t+t')/2}.$$

- **M2.** En particulier, il est conseillé de savoir retrouver très rapidement les formules très utilisées

$$1 + e^{it} = 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) e^{it/2}$$

$$1 - e^{it} = -2i \sin\left(\frac{t}{2}\right) e^{it/2}$$

Pour cela, on pose $1 = e^{i0}$.

5.4. Formule de Moivre

Si $n \in \mathbb{N}$ et si $t \in \mathbb{R}$

$$(\cos(t) + i \sin(t))^n = \cos(nt) + i \sin(nt).$$

En utilisant le binôme de Newton avec $a = \cos(t)$ et $b = i \sin(t)$,

on développe et en égalant suivant le cas, les parties réelles ou imaginaires, on peut calculer $\cos(nt)$ ou $\sin(nt)$.

5.5. Forme exponentielle d'un complexe non nul

- Tout complexe z non nul peut être écrit sous la forme $z = r e^{i\theta}$ où $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

r est le module de z

$$\text{et } \arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$$

On a écrit la forme exponentielle du complexe z .

Lorsque l'on a obtenu $Z = r e^{it}$, ne pas conclure hâtivement:

* si $r = 0$, $Z = 0$, module nul, pas d'argument,

* si $r > 0$,

$$|Z| = r \text{ et } \arg(Z) = t \pmod{2\pi}.$$

* si $r < 0$,

$$|Z| = -r \text{ et } \arg(Z) = \pi + t \pmod{2\pi}.$$

Utilisation pour le module et argument de la somme de deux complexes de même module

Lorsque $Z = r(e^{it} \pm e^{it'})$, appliquer la transformation indiquée en 5.3. et il faudra faire attention au signe selon de cas de $\cos\left(\frac{t-t'}{2}\right)$

ou de $\sin\left(\frac{t-t'}{2}\right)$ (cf ce qui précède)