

Résumé de cours : Les intégrales

1. Intégrale d'une fonction continue et positive ou nulle sur $[a, b]$.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$.

Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

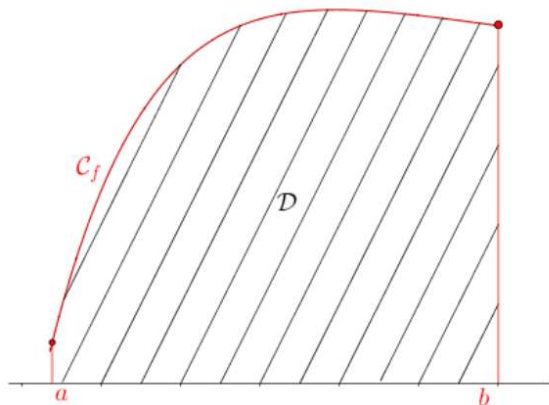
On appelle

- Unité d'aire (u.a.) : l'aire du rectangle construit à partir des points O , $I(1, 0)$ et $J(0, 1)$.

- Domaine sous la courbe : domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Ce qui se traduit par : $\{(x, y) / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

- Intégrale de f sur $[a, b]$: la mesure de l'aire en u.a. du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}_f$.

On note : $\int_a^b f(x) dx$ la mesure de cette aire.



Intégration : Intégrale d'une fonction continue sur $[a, b]$

Définition : ● Théorème 1 : toute fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ admet une primitive sur I .

Si $I = [a, b]$

On admet que pour toute fonction f continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq m$.

On note $g(x) = f(x) - m$; g est continue sur $[a, b]$ à valeurs positives ou nulles.

g admet donc une primitive G sur $[a, b]$.

On pose $F : x \mapsto G(x) + mx$

F est dérivable sur $[a, b]$ et si $x \in [a, b]$, $F'(x) = G'(x) + m = g(x) + m = f(x)$

donc F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Intégration : méthodes d'approximation

On cherche à trouver une valeur approchée de $I = \int_a^b f(t) dt$.

On introduit $n \in \mathbb{N}^*$ et les points $a_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On note A_k le point du graphe de f d'abscisse a_k .

Méthode des trapèzes

Méthode :

On remplace f sur $[a_k, a_{k+1}]$ par le trapèze rectangle de base $[a_k, a_{k+1}]$ et de côté opposé $[A_k, A_{k+1}]$.

Il a pour aire $\frac{b-a}{2} (f(a_k) + f(a_{k+1}))$

(Hauteur multipliée par la demi-somme de la grande base et de la petite base)

On approche donc I par $T_n = \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(a_k) + f(a_{k+1}))$

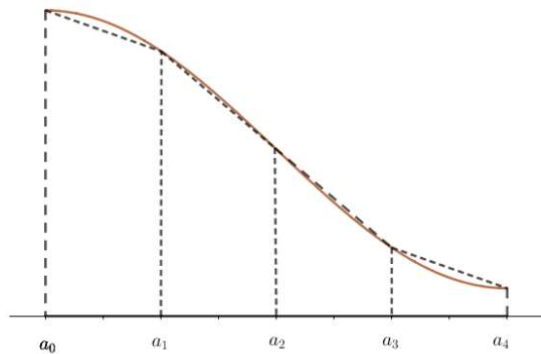
ce qui s'écrit aussi $T_n = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \right)$

👉 1. On peut remarquer que $T_n = \frac{1}{2} (RG_n + RD_n)$.

👉 2. Si f est convexe, $I \leq T_n$

(sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, le graphe de f est situé sous le segment $[A_k, A_{k+1}]$.)

👉 3. Si f est concave, $I \geq T_n$ (sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, le graphe de f est situé au dessus du segment $[A_k, A_{k+1}]$.)



Majoration de l'erreur

Hypothèses : On suppose que f est une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$ et qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $|f''(x)| \leq M$.

On admet que

$$|T_n - I| \leq \frac{(b-a)^3 M}{12 n^2}.$$