

Résumé de cours terminale : Les matrices

A. Définitions des matrices en Terminale

- On appelle **matrice réelle** A tout tableau rectangulaire de réels.

On note n le nombre de lignes de la matrice M et p le nombre de colonnes de M .

On dit alors que A est une matrice de type (n, p) (ou de format (n, p)).

Dans le cas général pour une matrice A de type (n, p) , on note $a_{i,j}$ le terme dans la ligne numéro i et dans la colonne numéro j lorsque $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$ et on peut écrire

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Une matrice A de type $(2, 3)$ pourra être notée plus simplement

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Une matrice B de type $(3, 2)$ pourra être notée plus simplement

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}.$$

- La matrice de type (n, p) dont tous les éléments sont nuls, est appelée **matrice nulle** et notée $O_{n,p}$. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on la note O .

- Lorsque le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes de M , on dit que la matrice est une matrice carrée d'ordre n (le nombre commun de lignes ou de colonnes). On pourra la noter dans le cas général :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les termes $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $\cdots$, $a_{n,n}$ forment la *diagonale* de A .

Et simplement,

pour une matrice carrée A d'ordre 2,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et pour une matrice carrée d'ordre 3,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

- Lorsque la matrice n'a qu'une ligne ou est de type $(1, n)$, on dit que c'est une **matrice ligne** d'ordre n .

Elle pourra être notée

$$L = (x_1 \quad \cdots \quad x_j \quad \cdots \quad x_n).$$

Il suffit de l'écrire $L = (x \quad y)$ si $n = 2$ et $L = (x \quad y \quad z)$ si $n = 3$.

- Lorsque la matrice n'a qu'une colonne (ou est de type $(n, 1)$), on dit que c'est une **matrice colonne** d'ordre n .

Une matrice X colonne d'ordre n pourra donc être notée

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Avec les notations plus simples, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ pour une matrice colonne d'ordre 2 et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour une matrice colonne d'ordre 3.

B. Premières opérations sur les matrices en Terminale

1. Produit d'une matrice par un réel

Si A est une matrice de type (n, p) et si k est un réel, on note $k \times A = k A$ la matrice de type (n, p) obtenue en multipliant chaque terme de la matrice A par le réel k .

propriétés :

Si $k = 0$, $0 \times A$ est la matrice nulle (de même type que A).

Si $k = -1$, la matrice $(-1) \times A$ est notée $-A$ et appelée matrice opposée de A .

Pour tout réel k , si A est la matrice nulle, $k A = O$.

2. Addition de deux matrices en Maths expertes

- Si A et B sont deux matrices de même type (n, p) ,

$A + B$ est la matrice de type (n, p) dont l'élément en ligne i et colonne j est la somme de $a_{i,j}$ et de $b_{i,j}$.

$$\text{Si } A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$$

$$\text{et } B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$$

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$$

3. Propriétés de deux matrices

• Les matrices A et B étant de même format (n, p) ,

$$* A + B = B + A$$

$$* A + O_{n,p} = O_{n,p} + A = A$$

$$* A + (-A) = (-A) + A = O_{n,p}$$

$$* \text{Si } k \in \mathbb{R}, k(A + B) = kA + kB.$$

* On définit la différence des deux matrices A et B par $A + (-B)$ et on la note $A - B$
l'élément en ligne i et colonne j est égal à $a_{i,j} - b_{i,j}$.

$$* \text{Si } k \in \mathbb{R}, k(A - B) = kA - kB.$$

C. Produit matriciel en Terminale

1. Produit d'une matrice par une matrice colonne

On commence par des cas particuliers

$$\bullet A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

AX est une matrice colonne à 2 lignes donnée par

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

$$\bullet A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

AX est une matrice colonne à 3 lignes donnée par

$$AX = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + iz \end{pmatrix}.$$

2. Produit de deux matrices carrées de même ordre

Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n , on peut définir le produit AB et on obtient une matrice carrée d'ordre n .

- On commence par le cas d'un produit de deux matrices carrées d'ordre 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix}.$$

- Pour le produit de deux matrices carrées d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$$

AB est égale à

$$\begin{pmatrix} ax + by + cz & ax' + by' + cz' \\ dx + ey + fz & dx' + ey' + fz' \\ gx + hy + iz & gx' + hy' + iz' \end{pmatrix}$$

et sa troisième colonne est

$$\begin{pmatrix} ax'' + by'' + cz'' \\ dx'' + ey'' + fz'' \\ gx'' + hy'' + iz'' \end{pmatrix}$$

Le terme en ligne i et colonne j s'obtient en multipliant la ligne i de A par la colonne j de B .

3. Produit d'une matrice ligne par une matrice en Terminale

- Si A est une matrice carrée d'ordre 2 et L une matrice ligne à deux colonnes,

LA est une matrice ligne à deux colonnes

$$LA = (x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$LA = (ax + cy \ bx + dy).$$

- Si A est une matrice carrée d'ordre 3 et L une matrice ligne à trois colonnes,

LA est une matrice ligne à trois colonnes

$$LA = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$LA = (ax + dy + gz \ bx + ey + hz \ cx + fy + zi).$$

D. Propriétés du produit matriciel en Terminale en Maths Expertes

1. Propriétés du produit matriciel en Maths Expertes

• Sous réserve de définition de la somme et du produit,
pour toutes matrices A, B et C et tout réel k ,

$$* A(kB) = (kA)B = k(AB) \text{ que l'on note } kAB.$$

$$* A(BC) = (AB)C$$

$$* A(B + C) = AB + AC$$

$$* (A + B)C = AC + BC.$$

$$* A \text{ de type } (n, p), AO_{p,k} = O_{n,k}$$

$$\text{et } O_{k,n}A = O_{k,p}.$$

2. Matrices identité d'ordre n ,

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note I_n la matrice carrée d'ordre n , dont tous les termes sont nuls sauf les termes de la diagonale (soit d'indices (i, i)) sont égaux à 1. On l'appelle matrice identité d'ordre n .

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

* Sous réserve que les produits soient définis, $AI_n = A$ et $I_nB = B$

donc si A est carrée d'ordre n , $I_nA = AI_n = A$.

3. Matrice inversible en terminale générale

• Soit A une matrice carrée d'ordre n . S'il existe deux matrices B et C carrées d'ordre n telles que $AB = I_n$ et $CA = I_n$, alors $B = C$.

• Soit A une matrice carrée d'ordre n . On dit que A est une **matrice inversible** lorsqu'il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$.

Dans ce cas, la matrice B est unique et on l'appelle matrice inverse de la matrice A et on note $B = A^{-1}$.

• Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible et B et C deux matrices de type (n, p) ,

$$AB = C \text{ ssi } B = A^{-1}C.$$

4. Puissance n -ième d'une matrice carrée A d'ordre p .

- Si A est une matrice carrée d'ordre p , on définit

$$A^0 = I_n \text{ et si } n \in \mathbb{N}, A^{n+1} = A^n A.$$

Si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, A^n est le produit de n matrices A et $A^1 = A$.

- Si A est une matrice carrée et si $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $A^{n+p} = A^n A^p$.

- Si D est une matrice carrée diagonale et $n \in \mathbb{N}$,

$$* D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

$$* D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}.$$

Ce sera en particulier simple

* lorsque $A^2 = \alpha A$,

il faudra prouver que $A^n = \alpha^{n-1} A$ lorsque $n \geq 1$.

* lorsque $A^3 = \alpha A$,

il faudra alors prouver que $A^{2n+1} = \alpha^n A$ et $A^{2n} = \alpha^{n-1} A^2$ si $n \geq 1$.

* Dans certains cas, on peut trouver une relation de récurrence vérifiée par les coefficients a_n , b_n , etc de la matrice A^n .