

Les matrices :

Introduction – Définitions Vocabulaire

Opérations sur les matrices (somme, multiplication par un scalaire, produit de deux matrices)

Inverse d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée

Les méthodes pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée

Puissance d'une matrice

Rang d'une matrice

Applications du calcul matriciel pour résoudre un système d'équations linéaires

L'utilisation des matrices et du calcul matriciel est nécessaire pour résoudre des systèmes d'équations linéaires, de plus, les opérations sur les applications linéaires se traduisent en opérations analogues sur les matrices.

I. Introduction – Définitions - Vocabulaire :

Définition et vocabulaire : Une matrice est un tableau de nombres caractérisé par son nombre de lignes et de colonnes. Une matrice $m \times n$ comporte m lignes et n colonnes.

On la note :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les nombres a_{ij} sont appelés les coefficients de la matrice.

On dit que la matrice est d'ordre (m, n) ou de dimension $m \times n$.

L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients réels se note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

Remarques sur la notation :

- Les coefficients s'écrivent sans "séparation" verticale ou horizontale contrairement aux tableaux que vous connaissez. La matrice est "encadrée" par des parenthèses (ou des crochets dans certains exercices).
- Si A est une matrice de dimension $m \times n$, on note généralement a_{ij} le coefficient qui se trouve à la $i^{\text{ème}}$ ligne et dans la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice, où $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. Autrement dit i est l'indice de la ligne et j est l'indice de la colonne.

Attention : ne pas confondre la matrice notée (a_{ij}) avec le scalaire a_{ij} .

Matrice ligne : c'est une matrice qui a une seule ligne et p colonnes.

$$(a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \dots \quad \dots \quad a_{1,p})$$

Matrice colonne : c'est une matrice qui a une seule colonne et n lignes.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}$$

Matrice nulle : c'est une matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Matrice carrée : c'est une matrice qui a autant de ligne que de colonne (par exemple n lignes et n colonnes).

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & a_{2,2} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & a_{n-1,n-1} & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On dit dans ce cas que la matrice est d'ordre n . L'ordre d'une matrice carrée est le nombre de ses lignes dans ce cas n (ou le nombre de ses colonnes).

La trace d'une matrice carrée est la somme des coefficients diagonaux.

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

Matrice diagonale : Une matrice est diagonale lorsque seuls les coefficients diagonaux sont non nuls.

$$\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Matrice identité (ou matrice unité) : la matrice identité est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire :

Matrice triangulaire supérieure : si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$.

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure : si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$.

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Egalité de deux matrices :

Soient quatre entiers n, p, n' et p' , on considère $A = (a_{ij})$ une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $A' = (a'_{ij})$ une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n',p'}(\mathbb{R})$, on a $A = A'$ si et seulement si $n = n'$ et $p = p'$ et

$$\forall i, 1 \leq i \leq n, \forall j, 1 \leq j \leq p \quad a_{ij} = a'_{ij}$$

Autrement dit deux matrices sont égales si elles ont le même format et si $a_{ij} = a'_{ij}$ pour tout i et pour tout j , c'est-à-dire que tous les éléments de A sont égaux aux éléments correspondants de B .

Transposée d'une matrice :

La transposée d'une matrice A noté A^T ou tA est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ou par exemple, la transposée d'un vecteur colonne est un vecteur ligne.

Remarque : La transposée de la transposée est la matrice initiale ${}^t({}^tA) = A$

Exercice 1 : Ecrire la transposée de chacune des matrices suivantes :

On considère les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

II. Opérations sur les matrices :

1) Somme de matrices :

$$A = (a_{ij}) \text{ et } B = (b_{ij})$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Autrement dit « on ajoute les coefficients qui sont à la même place ».

Attention : on ne peut additionner deux matrices que si elles ont le même format.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété : $(A + B)^T = A^T + B^T$

2) Produit par un scalaire :

$$A = (a_{ij}) \text{ et } \lambda \text{ un scalaire.}$$

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Autrement dit « on multiplie tous les coefficients par le scalaire λ ».

Exemple :

$$-2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Parenthèse vocabulaire :

On parle de **scalaires** pour désigner les nombres réels qui multiplient des vecteurs dans un espace vectoriel.

On parle de **matrice scalaire** pour désigner une matrice de la forme λI où λ est un scalaire et I la matrice identité.

Propriété : $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

Propriétés : Pour A , B et C trois matrices de type $m \times n$, et λ et μ deux réels quelconques, on a :

- 1) $A + B = B + A$
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- 3) $A + 0_{m \times n} = A$
- 4) $A + (-1)A = 0_{m \times n}$
- 5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- 6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- 7) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

La vérification de ces propriétés est laissée en exercice.

3) Produit de deux matrices :

Définition : Le produit de deux matrices A et B est défini si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

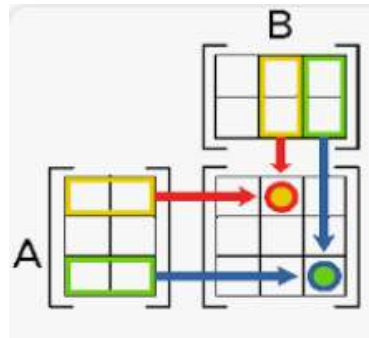
Si $A = (a_{ij})$ est une matrice à m lignes et n colonnes (type $(m \times n)$)

Et si $B = (b_{ij})$ est une matrice à n lignes et p colonnes (type $(n \times p)$)

Le produit $AB = (c_{ij})$ est la matrice à m lignes et p colonnes (type $(m \times p)$) définie par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Schéma de calcul :



Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit AB a un sens car la matrice A a 3 lignes et 2 colonnes et la matrice B a 2 lignes et 4 colonnes, la matrice AB aura 3 lignes et 4 colonnes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 \\ -9 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Propriétés : Le produit matriciel vérifie les propriétés suivantes :

- 1) $A(BC) = (AB)C$ avec $A_{m \times n}$, $B_{n \times p}$ et $C_{p \times q}$
- 2) $AI_n = I_m A = A$ avec $A_{m \times n}$, I_n et I_m les matrices identités
- 3) $A(B + C) = AB + AC$ avec $A_{m \times n}$, $B_{n \times p}$ et $C_{n \times p}$
- 4) $(A + B)C = AC + BC$ avec $A_{m \times n}$, $B_{m \times n}$ et $C_{n \times p}$

La vérification de ces propriétés est laissée en exercice.

Remarques :

- Le produit de deux matrices non nulles peut-être nul. (Attention lors de la résolution d'équations matricielles)
- Le produit de deux matrices n'est généralement pas commutatif. (Attention aux manipulations algébriques de matrices)

Autrement dit :

Le produit matriciel est associatif (1). **IL N'EST PAS COMMUTATIF ($AB \neq BA$)**.

La matrice identité ou unité est l'élément neutre pour multiplication (2).

Il est distributif par rapport à l'addition (3 et 4).

Propriétés :

Linéarité à droite : Si B et C sont deux matrices de mêmes dimensions, si λ et μ sont deux réels et si A a autant de colonnes que B et C ont de lignes, alors

$$A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC$$

Linéarité à gauche : Si A et B sont deux matrices de mêmes dimensions, si λ et μ sont deux réels et si C a autant de lignes que A et B ont de colonnes, alors

$$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$$

Ces propriétés se vérifient grâce à la définition précédente (produit de deux matrices), laissées en exercice.

Propriété : $(AB)^T = B^T A^T$ **attention au changement d'ordre.** Avec A type (m, n) et B type (n, p) .

La vérification de cette propriété est laissée en exercice.

Exemple : On reprend les matrices A et B de l'exemple précédent, on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -9 & 3 \\ -1 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Remarque : Le produit d'une matrice par sa transposée est toujours défini.

$$A^t A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 13 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}^t A A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Le résultat est une matrice carrée symétrique.

Définition : matrice symétrique : Soit n un entier positif et A une matrice carrée à n lignes et n colonnes, on dit que A est une matrice symétrique si pour tout $i, j = 1, \dots, n$ ses coefficients d'ordre $a_{i,j}$ et $a_{j,i}$ sont égaux. Ce qui est équivalent à dire que A est égale à sa transposée.

Le produit d'une matrice par sa transposée est toujours une matrice symétrique.

En effet on a :

$${}^t(A^t A) = {}^t({}^t A) {}^t A = A^t A.$$

En général si le produit AB est défini, le produit BA n'a aucune raison de l'être. Le produit d'une matrice par sa transposée est une exception, les matrices carrées en sont une autre : si A et B sont deux matrices à n lignes et n colonnes, les produits AB et BA sont tous deux définis et ils ont les mêmes dimensions que A et B . En général ils ne sont pas égaux.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2:

On considère les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Etant données deux matrices A, B appartenant à l'ensemble ci-dessus, calculer ceux des produits $AB, {}^tAB, A{}^tB, {}^tA{}^tB$ qui sont définis.

III. Inverse d'une matrice carrée :

Définition : Soit n un entier positif et A une matrice carrée à n lignes et n colonnes, on dit que A est inversible s'il existe une matrice carrée d'ordre n notée A^{-1} telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Unicité de la matrice inverse si elle existe : Nous verrons plus loin une méthode qui permet de savoir si une matrice est inversible, et de calculer son inverse quand elle l'est. **Observons que l'inverse, s'il existe, est nécessairement unique.** En effet, soient B_1 et B_2 deux matrices telles que $AB_1 = B_1A = I_n$ et $AB_2 = B_2A = I_n$. En utilisant l'associativité, le produit B_1AB_2 vaut $B_1(AB_2) = B_1I_n = B_1$, mais aussi $(B_1A)B_2 = I_n B_2 = B_2$. Donc $B_1 = B_2$. Il suffit de trouver une matrice B telle que $AB = I_n$ pour être sûr que A est inversible et que son inverse est B .

Théorème : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n$. Supposons qu'il existe une matrice B telle que $AB = I_n$ ou bien $BA = I_n$. Alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

Démonstration : (pour info toutes les notions ne sont pas encore connues)

Supposons qu'il existe une matrice B telle que $AB = I_n$. Considérons l'application, de $\mathcal{M}_n$ dans lui-même, qui à une matrice X associe le produit XA . D'après $(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$, c'est une application linéaire, donc un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$. Montrons qu'elle est injective, c'est-à-dire que son noyau ne contient que la matrice nulle. Si $XA = 0$, alors $(XA)B = 0$, mais $(XA)B = X(AB) = XI_n = X$ par hypothèse : donc $X = 0$. Une application linéaire entre deux espaces de même dimension qui est injective est aussi surjective. Donc il existe une matrice X telle que $XA = I_n$. Il reste à vérifier que cette matrice est B . Si $XA = AB = I_n$, alors $X(AB) = X$ et $(XA)B = B$. D'où le résultat. On procède de façon symétrique si $BA = I_n$, en considérant l'application qui à X associe AX .

Si A et B sont deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$, leur produit est inversible.

Propriété : Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$. Le produit AB est inversible et son inverse est $B^{-1}A^{-1}$, c'est-à-dire : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Démonstration : En utilisant le théorème, ainsi que l'associativité du produit :

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

Propriétés :

Si A est inversible, on a :

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$(\text{diag}(D_{ii}))^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{D_{ii}}\right)$$

La matrice A est dite orthogonale si $A^{-1} = A^T$ (une matrice orthogonale représente une base orthonormée)

Démonstrations :

1) Par définition : $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

$$(A^{-1})^{-1}A^{-1} = (AA^{-1})^{-1} = I_n^{-1} = I_n$$

$$(A^{-1})^{-1}A^{-1} = I_n \text{ donc } (A^{-1})^{-1} = A$$

2) $AA^{-1} = I_n$

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I_n^T = I_n \text{ d'où } (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

3) $\text{diag}(D_{ii})(\text{diag}(D_{ii}))^{-1} = I_n$

$$\begin{pmatrix} D_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & D_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{D_{11}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{D_{nn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

D'où $(\text{diag}(D_{ii}))^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{D_{ii}}\right)$

4) Une matrice est orthogonale si et seulement si elle est inversible et son inverse est égale à sa transposée.

Par définition d'une matrice orthogonale, on a $A^T A = I_n$ en multipliant à droite par A^{-1} , il vient :

$$A^T A A^{-1} = I_n A^{-1} \text{ d'où } A^T = A^{-1}$$

Déterminer l'inverse d'une matrice 2x2 :

Inverse d'une matrice 2x2 : Pour découvrir comment déterminer l'inverse d'une matrice 2x2, on va résoudre un système 2x2 :

(on a déjà vu la résolution de système d'équations dans le chapitre calculs numériques et algébriques)

Partons du système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - 7y = -9 \end{cases}$$

(Résoudre un tel système c'est chercher les coordonnées du point d'intersection des deux droites d'équation $2x + 3y = 8$ et $5x - 7y = -9$)

Par la méthode de substitution :

On exprime x en fonction de y ou y en fonction de x et on résout le système par exemple :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = \frac{8-3y}{2} = 4 - \frac{3}{2}y \\ 5 \times (4 - \frac{3}{2}y) - 7y = -9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - \frac{3}{2}y \\ 20 - \frac{15}{2}y - 7y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - \frac{3}{2}y \\ -\frac{29}{2}y = -29 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3 = 1 \\ y = 2 \end{cases} &\text{La solution du système est } (1; 2). \end{aligned}$$

Par la méthode de combinaison linéaire :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 3y = 8 & L_1 \\ 5x - 7y = -9 & L_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -29y = -58 \end{cases} &\quad \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 - 5L_1 \end{matrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ y = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6 = 8 \\ y = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

La solution du système est $(1; 2)$.

En utilisant le calcul matriciel :

L'intérêt du calcul matriciel est qu'il permet de trouver, en une seule opération le couple de nombres $(x; y)$ qui constitue la solution de ce système.

En notation matriciel le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Chaque tableau de nombres entre parenthèse est une matrice.

Dans le membre de droite les deux matrices sont multipliées entre elles. Le produit matriciel doit donc être défini de manière à retrouver dans cette écriture le système d'équations de départ. De telle manière que :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 5x - 7y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 5x - 7y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$AX = P$$

$$\text{Avec } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax + by \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Pour trouver la solution, à ce stade nous sommes tentés d'écrire :

$X = \frac{P}{A} = A^{-1}P$ mais attention cette opération n'est pas la division d'un simple nombre, il s'agit de déterminer A^{-1} qui est la matrice inverse de la matrice A .

Afin de découvrir les éléments de la matrice A^{-1} , résolvons le système de manière ordinaire, par élimination de variables. La longueur du processus montrera bien l'intérêt d'une résolution matricielle.

A partir du système :

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

Commençons par éliminer y . Pour cela, multiplions la première équation par d (qui est le facteur de y dans la seconde) et la seconde par b (qui est le facteur de y dans la première) :

$$\begin{cases} adx + bdy = dp \\ cbx + dbx = bq \end{cases}$$

Soustrayons la seconde de la première. Les termes bdy se simplifient. Il reste :

$$adx - cbx = dp - bq \text{ d'où } x = \frac{dp - bq}{ad - b}$$

Même travail en éliminant x , pour cela, multiplions la première équation par c (qui est le facteur de x dans la seconde) et la seconde par a (qui est le facteur de x dans la première) :

$$\begin{cases} acx + bcy = pc \\ cax + day = qa \end{cases}$$

Soustrayons la seconde de la première. Les termes acx se simplifient. Il reste :

$$bcy - day = pc - qa \text{ d'où } y = \frac{pc}{bc-da} = \frac{qa-cp}{ad-bc}$$

Le système devient alors :

$$\begin{cases} x = \frac{dp-b}{ad-qa-cp} \\ y = \frac{qa-cp}{ad-bc} \end{cases} \quad (*)$$

On observe que le même dénominateur apparaît $ad - bc$ dans les solutions de x et de y . Ce nombre est calculé en utilisant tous les éléments de la matrice A , et seulement eux. Il est la différence entre le produit ad des éléments de sa diagonale principale et le produit bc des éléments de son autre diagonale. S'il était nul, le système n'aurait pas de solution. Ce nombre est appelé déterminant de la matrice A , il est noté $\det(A)$, et on a :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a * d - c * b$$

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

En multipliant les équations de notre système (*) par $\det(A)$, il vient :

$$\begin{cases} \det(A) x = dp - bq \\ \det(A) y = qa - cp = -cp + qa \end{cases}$$

En notation matricielle ce système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \det(A) x \\ \det(A) y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\det(A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

On avait : $X = A^{-1}P$, on aboutit donc à : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Théorème : Pour une matrice d'ordre 2 (c'est-à-dire 2×2), si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ alors A est inversible

$$\text{et } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

La condition $ad - bc \neq 0$ est nécessaire pour que l'inverse de la matrice A existe.

La formule pour une matrice 2×2 est relativement simple à retenir, il n'existe pas de formule aussi simple pour une matrice 3×3 ou au-delà.

Vocabulaire :

- On dit que A est inversible ou régulière.
- Si la matrice n'est pas inversible (c'est-à-dire $ad - bc = 0$), on dit qu'elle est singulière.

Propriété : Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

IV. Déterminant d'une matrice carrée de taille n :

On peut calculer le déterminant d'une matrice de taille n à l'aide de n déterminants de matrices de taille $n - 1$ obtenues en enlevant à la matrice de départ une ligne et une colonne. Si A est la matrice de départ, pour tout i et j , on note $A_{i,j}$ la matrice obtenue en enlevant à A sa i -ième ligne et sa j -ième colonne.

$$A_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Exemple :

Matrice

Sous-matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{23} =$$

Pour la matrice ci-dessus, il y a huit autres sous-matrices : $A_{12}, A_{13}, A_{21}, \dots$ qui peuvent être obtenues de la même façon.

On peut alors développer le calcul du déterminant de A suivant une ligne ou une colonne (on essaiera de choisir une ligne ou une colonne où apparaissent des zéros pour s'épargner des calculs)

Si on développe suivant la ligne i , on aura :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

Si on développe suivant la colonne j , on aura :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

Le terme $(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$ est appelé le **cofacteur** du terme $a_{i,j}$ et le terme $\det(A_{i,j})$ est appelé le **mineur** du terme $a_{i,j}$.

Cette méthode de calcul du déterminant d'une matrice est appelée, méthode des cofacteurs, ou méthode de Laplace ou méthode des mineurs, ou encore développement suivant une ligne (ou une colonne).

Remarque : on trouve les notations suivantes :

Pour une matrice 2x2, on a : $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Pour une matrice 3x3, on a : En développant selon la première ligne

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} &= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg \end{aligned}$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Calculer le déterminant de cette matrice.

Développons par exemple suivant la dernière ligne,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= 1 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -6 - 7 - 2 \times (-15 - 14) + 5 - 4 = 46 \end{aligned}$$

Le déterminant de cette matrice vaut 46.

Propriétés des déterminants :

- $\det(A^t) = \det(A)$
- $\det(AB) = \det A \times \det B$
- Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est égal au produit des éléments diagonaux. En particulier $\det(I_n) = 1$
- Si A est régulière, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

En effet car $\det(AA^{-1}) = \det(A) \times \det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$ d'où

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

- Si A est orthogonale, $\det(A) = \pm 1$

En effet car $\det(AA^T) = (\det(A))^2$ et comme A est orthogonale $AA^T = I_n$

D'où $\det(AA^T) = (\det(A))^2 = \det(I_n) = 1$ d'où $\det(A) = \pm 1$

Exercice 4:

Vérifier les identités suivantes en développant chaque déterminant

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \right| & \text{b)} \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} a & b \\ ka+c & kb+d \end{array} \right| \\ \text{c)} \left| \begin{array}{cc} a & kb \\ c & kd \end{array} \right| = k \cdot \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| & \text{d)} \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a & e \\ c & f \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} a & b+e \\ c & d+f \end{array} \right| \end{array}$$

Exercice 5 :

Calculer $\left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right|$.

Exercice 6:

Soit A une matrice ayant n lignes et p colonnes ($A \in M_{n,p}(K)$), et B une matrice ayant p lignes et n colonnes.

1. Quel est le format de la matrice produit AB ?

V. Les méthodes pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée

Inverser une matrice 3x3 : soit un système de 3 équations à 3 inconnues :

Déjà vu dans le chapitre calculs numériques et algébriques.

Résoudre le système :

$$\begin{cases} 5x + 2y + 7z = 2 \\ 2x + y - 3z = 7 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

Pour résoudre un tel système il existe plusieurs méthodes dont l'une consiste à utiliser les matrices, nous utiliserons cette méthode dans la suite du cours.

Rappels (déjà vu) : Comment résoudre ce système si on ne connaît pas les matrices.

Par combinaison :

$$(L1) - 2(L2) \Rightarrow 5x - 4x + 2y - 2y + 7z + 6z = 2 - 14 \text{ soit } x + 13z = -12$$

$$(L1) - 5(L3) \Rightarrow 5x - 5y + 2y - 10y + 7z - 5z = 2 - 20 \text{ soit } -8y + 2z = -18$$

$$(L2) - 2(L3) \Rightarrow 2x - 2x + y - 4y - 3z - 2z = 7 - 8 \text{ soit } -3y - 5z = -1$$

Soit un nouveau système :

$$\begin{cases} x + 13z = -12 \\ 4y - z = 9 \\ 3y + 5z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 13z = -12 \\ z = 4y - 9 \\ 3y + 5(4y - 9) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 13z = -12 \\ z = 4y - 9 \\ 3y + 20y - 45 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 13z = -12 \\ z = 4y - 9 \\ y = \frac{46}{23} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -12 - 13 \times (-1) = 1 \\ z = 4 \times 2 - 9 = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

En utilisant les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice correspond au système donné dans l'énoncé « il s'agit des coefficients positionnés devant les inconnues ».

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Si A est inversible en multipliant à gauche par A^{-1} il vient $A^{-1}AX = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

Soit $X = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ car $A^{-1}A = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par définition.

Maintenant on sait **multiplier deux matrices** et on va **déterminer sans calculatrice la matrice inverse** pour résoudre facilement le système donné.

On avait trouvé dans le chapitre calculs numériques et algébriques :

1. A la calculatrice, on trouve que la matrice A est inversible et :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/46 & 6/23 & -13/46 \\ -5/46 & -1/23 & 29/46 \\ 3/46 & -4/23 & 1/46 \end{pmatrix}$$

2. Si l'on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, le système proposé est équivalent à :

$$A \times X = B$$

Les solutions sont obtenues en calculant $X = A^{-1} \times B$ (voir théorème) :

$$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 7/46 & 6/23 & -13/46 \\ -5/46 & -1/23 & 29/46 \\ 3/46 & -4/23 & 1/46 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'unique solution du système est donc le triplet $(x; y; z) = (1; 2; -1)$

Maintenant on va inverser la matrice A sans calculatrice.

1^{ière} étape : Montrer que la matrice est inversible :

Il faut calculer le déterminant de la matrice pour vérifier qu'il est différent de zéro et que la matrice est inversible. On l'a déjà calculé précédemment, on trouvait $\det(A) = 46$. Car, une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Donc cette matrice est inversible.

1^{ière} méthode : en utilisant le système linéaire :

On écrit $AX = P$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

Correspond au système suivant :
$$\begin{cases} 5x + 2y + 7z = p \\ 2x + y - 3z = q \\ x + 2y + z = r \end{cases}$$

Et maintenant **il faut exprimer x, y et z en fonction de p, q et r .**

$$\begin{cases} 4x + 6z = p - r & (L_1 - L_3) \\ -3y - 5z = q - 2r & (L_2 - 2L_3) \\ 8y - 2z = 5r - p & (5L_3 - L_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 6z = p - r \\ -3y - 5z = q - 2r \\ -46z = 8q - r - 3p & (8L_2 + 3L_3) \end{cases}$$

On en déduit

$$z = \frac{3}{46}p - \frac{8}{46}q + \frac{1}{46}r$$

De $8y - 2z = 5r - p$ on en déduit $8y = 5r - p + 2z$ on remplace z par $\frac{3}{46}p - \frac{8}{46}q + \frac{1}{46}r$, on obtient :

$$y = -\frac{5}{46}p - \frac{2}{46}q + \frac{29}{46}r$$

Connaissant y et z on remplace dans $x + 2y + z = r$ et on obtient :

$$x = \frac{7}{46}p + \frac{12}{46}q - \frac{13}{46}r$$

On a maintenant :

$$\begin{cases} x = \frac{7}{46}p + \frac{12}{46}q - \frac{13}{46}r \\ y = -\frac{5}{46}p - \frac{2}{46}q + \frac{29}{46}r \\ z = \frac{3}{46}p - \frac{8}{46}q + \frac{1}{46}r \end{cases}$$

On a obtenu par la méthode du pivot de Gauss la matrice inverse de A

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{46} & \frac{6}{23} & -\frac{13}{46} \\ \frac{5}{46} & \frac{1}{23} & \frac{29}{46} \\ -\frac{3}{46} & -\frac{4}{23} & \frac{1}{46} \end{pmatrix}$$

On peut vérifier notre résultat en calculant AA^{-1} ou $A^{-1}A$ on doit trouver la matrice identité I_3 .

2^{de} méthode : Par la méthode du pivot

Introduction : La méthode du pivot sert à trouver l'inverse de toute matrice carrée A d'ordre n . Dans ce cas on augmente la matrice A de la matrice identité d'ordre n , et on effectue des opérations élémentaires de lignes pour passer de $(A|I_n)$ à $(I_n|C)$. Si cette transformation est possible, on obtient une matrice C qui est l'inverse de la matrice A .

On écrit la matrice de départ à gauche et la matrice identité à droite, on réalise des opérations sur les lignes pour obtenir la matrice identité à gauche, alors à droite on obtiendra la matrice inverse de la matrice de départ.

$$\begin{array}{cccccc|cccc} 5 & 2 & 7 & & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 2 & 1 & -3 & & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}$$

$L_2 - L_3$ en L'_2 et $5L_3 - L_1$ en L'_3 , il vient :

$$\begin{array}{cccccc|cccc} 5 & 2 & 7 & & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -3 & -5 & & 0 & 10 & -2 & & & & \\ 0 & 8 & -2 & & -1 & 0 & 5 & & & & \end{array}$$

$8L'_2 + 3L'_3$ en L''_3 et $3L'_1 + 2L'_2$ en L''_1 et $L'_3/(-46)$ en L''_3 il vient :

$$\begin{array}{cccccc|cccc} 15 & 0 & 11 & & 3 & 2 & -4 & & & & \\ 0 & -3 & -5 & & 0 & 1 & -2 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \frac{3}{46} & -\frac{8}{46} & \frac{1}{46} & & & & \end{array}$$

$L''_1 - 11L''_3$ en L'''_1 et $L''_2 + 5L''_3$ en L'''_2 , il vient

$$\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 0 & 0 & 3 - \frac{33}{46} & 2 + \frac{88}{46} & -4 - \frac{11}{46} \\ 0 & -3 & 0 & \frac{15}{46} & 1 - \frac{40}{46} & -2 + \frac{5}{46} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{46} & -\frac{8}{46} & \frac{1}{46} \end{array}$$

Enfin on divise la première ligne par 15 et la seconde par -3 et on finalise les calculs, il vient :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{46} & \frac{12}{46} & -\frac{13}{46} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{46} & -\frac{2}{46} & \frac{29}{46} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{46} & -\frac{8}{46} & \frac{1}{46} \end{array} \text{ soit } \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{46} & \frac{6}{23} & -\frac{13}{46} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{46} & -\frac{1}{23} & \frac{29}{46} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{46} & -\frac{8}{46} & \frac{1}{46} \end{array}$$

On obtient finalement :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{46} & \frac{6}{23} & -\frac{13}{46} \\ -\frac{5}{46} & -\frac{1}{23} & \frac{29}{46} \\ \frac{3}{46} & -\frac{8}{46} & \frac{1}{46} \end{pmatrix}$$

Exercice 7 :

Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Méthode n°3 : méthode des cofacteurs :

Propriété : Si une matrice est inversible, alors son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{comp}(A) = \frac{1}{\det(A)} {}^t \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Avec $\text{comp}(A)$ le complémentaire de A et $\det(A)$ le déterminant de A .

Et les coefficients c_{ij} sont les déterminant A_{ij} des comatrices associées à A multipliés par $(-1)^{i+j}$

La comatrice de la matrice $A = (a_{ij})$ est définie par :

$C = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ où A_{ij} est le mineur de l'élément a_{ij} .

Et où chaque c_{ij} est le cofacteur de l'élément a_{ij} de A .

La matrice complémentaire de A (matrice adjointe en anglais) $comp(A)$ est la transposée de la comatrice C , c'est à dire : $comp(A) = C^T$ ou tC .

En résumé :

- Il faut dans un premier temps vérifier que la matrice étudiée est inversible en calculant son déterminant et en vérifiant qu'il est non nul. En développant suivant la ligne i par exemple (choisir judicieusement la ligne pour s'épargner des calculs) :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

- Ensuite on calcule les cofacteurs.

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$$

- On transpose la matrices des cofacteurs obtenus.
- On divise par le déterminant
- On obtient l'inverse de la matrice de départ.

Reprenons notre exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a calculé le déterminant précédemment, on trouvait 46

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 3) = -5$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 14) = 12$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 7 = -2$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(10 - 2) = -8$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 7 = -13$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -(-15 - 14) = 29$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$

On obtient : $C = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 3 \\ 12 & -2 & -8 \\ -13 & 29 & 1 \end{pmatrix}$ d'où

$${}^t \begin{pmatrix} 7 & -5 & 3 \\ 12 & -2 & -8 \\ -13 & 29 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 12 & -13 \\ -5 & -2 & 29 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{46} \begin{pmatrix} 7 & 12 & -13 \\ -5 & -2 & 29 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{46} & \frac{12}{46} & -\frac{13}{46} \\ -\frac{5}{46} & -\frac{2}{46} & \frac{29}{46} \\ \frac{3}{46} & -\frac{8}{46} & \frac{1}{46} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{46} & \frac{6}{23} & -\frac{13}{46} \\ -\frac{5}{46} & -\frac{1}{23} & \frac{29}{46} \\ \frac{3}{46} & -\frac{4}{23} & \frac{1}{46} \end{pmatrix}$$

Exercice 8 :

Indiquer pour les matrices suivantes si elles sont inversibles et, si oui, calculer leur inverse en utilisant la matrice des cofacteurs.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 9 :

Soient A et B les deux matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1} .
2. Vérifier que B est inversible et calculer B^{-1} .
3. On pose $M = AB$. Justifier le fait que M est inversible et calculer M^{-1} , en utilisant les résultats des deux questions précédentes.

Exercice 10:

Indiquer pour les matrices suivantes si elles sont inversibles et si oui, calculer leur inverse en utilisant la matrice des cofacteurs. On discutera éventuellement suivant les valeurs du paramètre.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $M_k = \begin{pmatrix} k & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$

VI. Puissance d'une matrice

Définition : Soit A une matrice carrée d'ordre n et p un entier naturel.

Le carré de A est la matrice notée A^2 , telle que $A^2 = A \times A$

Le cube de A est la matrice notée A^3 , telle que $A^3 = A \times A \times A$

Plus généralement, la puissance p -ième de A est la matrice notée A^p égale au produit de p facteurs A .

Pour résoudre certains problèmes on a besoin savoir calculer des puissances de matrices, nous verrons en Algèbre linéaire 2 la diagonalisation de matrice qui permet ces calculs.

VII. Rang d'une matrice :

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice. On appelle rang de la matrice A la dimension du sous-espace vectoriel (de $\mathbb{R}^m$) engendré par ses vecteurs colonnes.

Autrement dit on regarde si les vecteurs colonnes sont linéairement indépendants, car le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs colonnes.

Ou encore, le rang d'une matrice est égal à l'ordre maximal d'un mineur non nul que l'on peut extraire de la matrice.

Remarque : la connaissance du rang fournit un critère d'inversibilité.

Proposition : Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si son rang est n .

Démonstration : (pour info toutes les notions ne sont pas encore connues)

Une matrice est inversible, si et seulement si elle représente une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Or une application linéaire est bijective si et seulement si l'image qu'elle donne d'une base est une base, c'est-à-dire si son rang est n .

Proposition : Une matrice et sa transposée ont le même rang.

Démonstration : (pour info toutes les notions ne sont pas encore connues)

Une matrice A de rang r est équivalente à une matrice J_r obtenue en complétant I_r par des zéros. Or ${}^t J_r$ est du même type que J_r : elle contient la matrice identité I_r , complétée par des zéros. Elle est aussi de rang r . De plus, si A est équivalente à la matrice J_r on a $A = QJ_rP^{-1}$, la transposée de A s'écrit :

${}^t A = {}^t (QJ_rP^{-1}) = {}^t P^{-1} {}^t J_r {}^t Q$ et comme la transposée d'une matrice inversible est inversible et qu'on a montré que ${}^t A$ est équivalente à ${}^t J_r$, qui est de rang r . On conclut qu'une matrice et sa transposée ont le même rang.

Echelonner une matrice va nous permettre de déterminer son rang :

Définitions :

- Le pivot d'une ligne d'une matrice est le premier élément non nul de cette ligne

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \text{ est un pivot} \\ \leftarrow 2 \text{ est un pivot} \\ \leftarrow 3 \text{ est un pivot} \end{array}$$

cette matrice n'est pas échelonnée
contrairement à celle-ci :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \text{ est un pivot} \\ \leftarrow 2 \text{ est un pivot} \\ \leftarrow 3 \text{ est un pivot} \end{array}$$

- Une matrice A est dite **échelonnée** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) Le pivot d'une ligne est toujours situé à droite du pivot de la ligne précédente.
- 2) Toutes les lignes nulles de la matrice (c'est-à-dire constituée entièrement de zéro) sont situées sous les lignes qui comptent des éléments non nuls (donc un pivot).

Définition :

- Une matrice A est dite **échelonnée réduite** si elle est échelonnée et si elle possède encore deux nouvelles conditions :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cette matrice est
échelonnée réduite

- 1) Tous les pivots de la matrice valent 1.
- 2) Dans toute colonne qui contient un pivot, tous les éléments autres que le pivot sont nuls.

Définition : Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'une matrice sont de trois types :

- (1) Permutation de 2 lignes.
- (2) Multiplication d'une ligne par une constante non nulle.
- (3) Ajout d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.

Théorème : Les opérations élémentaires ne modifient pas l'ensemble de solutions de l'équation matricielle $AX = B$

Exemple :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 6 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

(1) Permutation de 2 lignes.

Il est clair qu'on peut permuer la première et deuxième lignes du système d'équations sans changer l'ensemble solution puisque celui-ci ne dépend nullement de l'ordre des équations. Ainsi,

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 6 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

sont des **systèmes d'équations équivalents**, car ils admettent le même ensemble solution. Matriciellement, ce résultat fournit l'équivalence :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) L_1 \Leftrightarrow L_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

(2) Multiplication d'une ligne par une constante non nulle.

Si on multiplie une (ou plusieurs) ligne du nouveau système, on ne change pas non plus l'ensemble solution, puisque toute opération effectuée des 2 côtés d'une équation ne modifie en rien la solution

On a donc matriciellement

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) L_3 \rightarrow 2L_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

(3) Ajout d'un multiple d'une ligne à une autre.

Il s'agit donc d'une combinaison linéaire de 2 équations d'un système. Ceci ne modifie pas l'ensemble de solutions du système.

On a donc matriciellement

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) L_3 \rightarrow L_3 + 2L_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array} \right)$$

Définition : Appliquer une transformation élémentaire aux lignes d'une matrice revient à multiplier à gauche cette matrice par une matrice que l'on appelle **matrice élémentaire**.

Exemple : On considère la première opération élémentaire suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) L_1 \leftrightarrow L_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Déterminer la matrice élémentaire E_1 tel que :

$$E_1 \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

En résumé : (1) Permuter les lignes i et j d'une matrice A est équivalent à multiplier à gauche la matrice A par la matrice élémentaire E_1

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & \dots & 1 \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par le nombre α est équivalent à multiplier à gauche la matrice A par la matrice E_2

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(3) Ajouter α fois la ligne j à la ligne i de A revient à multiplier à gauche la matrice A par la matrice E_3

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème : • Toute matrice se transforme en une matrice échelonnée (ou mieux: échelonnée réduite) par une suite d'opérations élémentaires.

Théorème : On considère A une matrice carrée d'ordre n . Alors

$$\text{rang}(A) = n \Leftrightarrow A \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple : Échelonnons la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

On transforme successivement A en A' de la manière suivante :

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

On a d'abord permuté les deux premières lignes de A . On a ensuite soustrait la première ligne de la dernière, et enfin on a soustrait deux fois la deuxième ligne de la troisième. Et si l'on désire sa forme **échelonnée réduite** A'' :

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A''$$

Définition : On appelle **rang** d'une matrice A le nombre de lignes non identiquement nulles de la matrice échelonnée associée à A .

- On peut démontrer que le rang d'une matrice A est indépendant de l'échelonnement effectué. Nous admettrons ce fait.

Exemple : 1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est de rang 1 car :

On a les vecteurs colonnes qui constituent la matrice qui ne pas linéairement indépendants, en effet $2C_1 - C_2 = 0$

VIII. Applications du calcul matriciel pour résoudre un système d'équations linéaires :

Définition : On appelle système de n équations linéaires à p inconnues $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ le système suivant :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases}$$

Ecriture matricielle de ce système :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_{np} X_p = B_n$$

Avec X_p et B_n deux matrices colonnes, et A_{np} appelée matrice de transformation à n ligne et p colonnes.

a_{ij} et b_i sont des nombres réels (ou des nombres complexes) et x_j sont les inconnues avec $1 \leq i \leq n$ et

$$1 \leq j \leq p.$$

Le système est dit homogène si $b_i = 0$, non homogène sinon.

On peut numéroter les lignes L_i .

Définition : On appelle opérations élémentaires d'un système d'équations linéaires, les opérations suivantes :

La multiplication d'une ligne par un scalaire k (non nul) : $L_i \leftarrow kL_i$

La permutation de deux lignes : $L_i \ll L_j$

L'addition à une ligne d'un multiple d'une autre ligne : $L_i \leftarrow L_i + kL_j$

Propriété : Toute opération élémentaire sur les lignes d'un système d'équations linéaires transforme ce dernier en un système équivalent ayant le même ensemble de solutions.

1) Résoudre un système de n équations à n inconnues :

Définition : On appelle système de Cramer un système de n équations linéaires à n inconnues avec $\det(A) \neq 0$ (déterminant de la matrice carrée de transformation). (ou autrement dit si la matrice A est inversible).

Ecriture matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_{nn} X_n = B_n$$

Résoudre un tel système revient à résoudre l'équation : $AX = B$

En multipliant par A^{-1} à gauche les deux membres de l'égalité, il vient :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

Or $A^{-1}A = I$, d'où $X = A^{-1}B$

1^{ière} Méthode de résolution : Règle de Cramer :

Un système de Cramer admet une solution unique donnée par :

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \text{ pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } \det(A) \neq 0.$$

$\det(A_i)$ est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la i ème colonne de A par la colonne B .

Démonstration :

Le système est de Cramer, il admet donc une solution unique

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Les scalaires x_i vérifient la relation

$$x_1 C_1(A) + x_2 C_2(A) + \dots + x_n C_n(A) = B \text{ Alors comme}$$

$$\det(A_i) = \det(C_1(A), C_2(A), \dots, C_{i-1}(A), B, C_{i+1}(A), \dots, C_n(A))$$

$$\text{Et que } B = x_1 C_1(A) + x_2 C_2(A) + \dots + x_n C_n(A)$$

$$\det(A_i) = \det(C_1(A), C_2(A), \dots, C_{i-1}(A), x_1 C_1(A) + x_2 C_2(A) + \dots + x_n C_n(A), C_{i+1}(A), \dots, C_n(A))$$

Or un déterminant est une forme n -linéaire alternée, donc l'égalité devient :

$$\det(A_i) = \det(C_1(A), C_2(A), \dots, C_{i-1}(A), x_i C_i(A), C_{i+1}(A), \dots, C_n(A))$$

$$\det(A_i) = x_i \det(C_1(A), C_2(A), \dots, C_{i-1}(A), C_i(A), C_{i+1}(A), \dots, C_n(A))$$

$$\det(A_i) = x_i \det(A) \text{ Comme le déterminant de } A \text{ est non nul, on a :}$$

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Exercice 11: Résoudre

Résolution du système :

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 50 \\ 3x + 5y - 4z = 2 \\ 4x + 7y - 2z = 31 \end{cases}$$

Exercice 12 :

$$\text{Etude du système } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Les formules de Cramer se démontrent et s'énoncent très simplement, mais peuvent conduire à des calculs fastidieux (beaucoup de déterminants à calculer). Dans la pratique, la méthode du Pivot de Gauss est souvent plus rapide.

Exercice 13 :

Résoudre les systèmes linéaires suivants en utilisant les formules de Cramer :

$$1. \begin{cases} (1+i)x + 2iy = 5-i \\ ix - 3y = 2-3i \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

2) Résoudre un système de m équations à n inconnues :

Démarche : Résoudre le système (I) consistera à résoudre l'équation matricielle $AX = B$ où

$$A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$X = (x_i)_{n \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = (b_i)_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

À ce système d'équations, nous associons la matrice suivante, appelée **matrice augmentée** du système

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

On échelonne la matrice avec la méthode de Gauss, et on détermine son rang, puis on résout le système obtenu après échelonnement.

En effet, on peut montrer que le système correspondant à la forme échelonnée de la matrice augmentée a les mêmes solutions que le système de départ.

Le résultat suivant permet de déterminer le nombre de solutions d'un système en comparant le rang de la matrice à celui de la matrice augmentée.

Théorème :

- Si $\text{rang}(A|B) > \text{rang}(A)$ alors le système $AX=B$ n'a pas de solution.
- Si $\text{rang}(A|B) = \text{rang}(A)$ alors le système $AX=B$ a au moins une solution.
- Si $\text{rang}(A|B) = \text{rang}(A) = n$ alors le système $AX=B$ a une solution unique.

Remarques :

En effet, dans le premier cas, le système contient une équation de la forme $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = \alpha, \alpha \neq 0$, ce qui est impossible.

Si $\text{rang}(A|B) = \text{rang}(A)$, on résout le système ligne par ligne à partir des lignes du bas. Les variables "non pivot" sont fixées arbitrairement et chaque ligne non nulle permet de déterminer une nouvelle variable pivot en fonction des variables d'indices suivants déjà déterminées.

Si de plus $\text{rang}(A|B) = \text{rang}(A) = n$ alors la matrice A est inversible et l'unique solution du système $AX=B$ est donnée par $X=A^{-1}B$.

Exercice 14 :

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

Exercice 15 :

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 5y - 2z = 4 \\ 3x + 15y - 6z = 12 \\ -2x + 10y + 4z = 12 \end{cases}$$

Exercice 16 :

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + 7z = 6 \\ z = 1 \end{cases}$$

2.3 QCM

Donnez-vous une heure pour répondre à ce questionnaire. Les 10 questions sont indépendantes. Pour chaque question 5 affirmations sont proposées, parmi lesquelles 2 sont vraies et 3 sont fausses. Pour chaque question, cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies. Chaque question pour laquelle les 2 affirmations vraies sont cochées rapporte 2 points.

Question 1. Soient A et B deux matrices.

- ☐ A Si la somme $A + B$ est définie, alors le produit AB est défini.
- ☐ B Si la somme $A + B$ est définie, alors le produit tAB est défini.
- ☐ C Si le produit AB est défini, alors la somme $A + {}^tB$ est définie.
- ☐ D Si les produits AB et BA sont définis, alors la somme $A + B$ est définie.
- ☐ E Si les produits AB et BA sont définis, alors la somme ${}^tA + B$ est définie.

Question 2. Soit A une matrice.

- ☐ A Le produit AA est toujours défini.
- ☐ B Le produit $A{}^tA$ est toujours défini.
- ☐ C Le produit $(A{}^tA)({}^tAA)$ est défini si et seulement si A est carrée.
- ☐ D Si A est carrée alors $A{}^tA = {}^tAA$.
- ☐ E Si $A{}^tA = {}^tAA$ alors $A = {}^tA$.

Question 3. Soit A une matrice carrée, et I la matrice identité, de même taille que A .

- ☐ A Si A est inversible, alors $A{}^tA$ est inversible.
- ☐ B Si A est inversible, alors $I - A$ est inversible.
- ☐ C Si A est inversible, alors $A + {}^tA$ est inversible.
- ☐ D Si A est inversible, alors $(A^{-1}{}^tA)^{-1} = {}^tA^{-1}A$.
- ☐ E Si A est inversible, alors $(A{}^tA)(A^{-1}{}^tA^{-1}) = I$.

Question 4. On considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A .

- ☐ A L'application f est injective.
- ☐ B L'application f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans une certaine base de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ C L'application $f \circ f$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ D La matrice A est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ E La matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 5. On considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est A .

- ☐ A L'application f est surjective.
- ☐ B Le noyau de f est un plan vectoriel.
- ☐ C La matrice A est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ D La matrice A est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ E La matrice A est de rang 2.

Question 6. Soit A une matrice.

- ☐ A Le rang de $A^t A$ est toujours supérieur ou égal au rang de A .
- ☐ B Le rang de ${}^t A$ est toujours égal au rang de A .
- ☐ C Le rang de ${}^t A A$ est toujours inférieur ou égal au rang de A .
- ☐ D Si A a plus de lignes que de colonnes, alors le rang de A est égal à son nombre de colonnes.
- ☐ E Si le rang de A est égal à son nombre de colonnes, alors A est inversible.

Question 7. Soit A une matrice à 4 lignes, 3 colonnes, de rang 2.

- ☐ A A est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$.
- ☐ B A est la matrice d'une application linéaire dont le noyau est un plan vectoriel.
- ☐ C A est la matrice d'une application linéaire dont l'image est un plan vectoriel.
- ☐ D A est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- ☐ E A est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 8. Soit $A \in \mathcal{M}_n$ une matrice carrée inversible. Soit f l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui a pour matrice A dans la base canonique.

- ☐ A A est semblable à la matrice identité de même taille que A .
- ☐ B Le noyau de f est une droite vectorielle.
- ☐ C A est équivalente à la matrice identité de même taille que A .
- ☐ D L'image de f est $\mathbb{R}^n$.
- ☐ E Le système linéaire $Ax = 0$ admet une solution non nulle.

Question 9. On considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit I la matrice identité à deux lignes et deux colonnes.

- ☐ A L'inverse de A est égal à A .
- ☐ B La matrice A est semblable à I .
- ☐ C L'inverse de A a des coefficients non entiers.
- ☐ D La matrice $\frac{1}{2}(A + A^{-1})$ est égale à I .
- ☐ E La matrice $A + A^{-1}$ est diagonale.

Question 10. On considère la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit I la matrice identité à trois lignes et trois colonnes.

- ☐ A $A - I$ est inversible.
- ☐ B $A^2 = A$.
- ☐ C $A^{-1} = {}^tA$.
- ☐ D $A + A^2$ est de rang 2.
- ☐ E $I + A + A^2$ est de rang 1.

Réponses : 1-DE 2-BC 3-AD 4-BD 5-BD 6-BC 7-CD 8-CD 9-DE 10-CE

Questions de cours : Soit $A \in \mathcal{M}_n$ une matrice carrée. On note I la matrice identité de dimension n . On suppose qu'il existe une matrice B telle que $AB = I$.

1. Soit f l'application de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathcal{M}_n$ qui à une matrice X associe le produit XA . Montrer que f est une application linéaire.
2. Montrer que f est injective. En déduire que f est bijective.
3. Montrer qu'il existe une matrice $B_* \in \mathcal{M}_n$ telle que $B_*A = I$. Montrer que $B_* = B$. En déduire que A est inversible.
4. Soit B^* une matrice telle que $AB^* = I$. Montrer que $B^* = B$.
5. Soit $C \in \mathcal{M}_n$ une autre matrice inversible. Montrer que le produit AC est inversible et que $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$.

Questions de cours :

1. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_n$ deux matrices, λ, μ deux réels.

$$(\lambda X + \mu Y)A = \lambda XA + \mu YA,$$

car le produit matriciel est distributif par rapport à l'addition. Donc l'application f est linéaire.

2. Pour montrer qu'une application linéaire est injective, il suffit de montrer que son noyau est réduit à $\{0\}$. Soit X un élément du noyau de f , c'est-à-dire une matrice telle que $XA = 0$ (matrice nulle). En multipliant à droite par B , et en utilisant l'associativité du produit matriciel :

$$(XA)B = X(AB) = XI = X.$$

Or si $XA = 0$, alors $(XA)B = 0$, donc $X = 0$. Donc le noyau de f ne contient que la matrice nulle : f est injective.

Une application linéaire entre deux espaces de même dimension, si elle est injective, est aussi surjective, donc bijective.

3. Puisque f est surjective, il existe $B_* \in \mathcal{M}_n$ telle que $f(B_*) = I$, soit $B_*A = I$. Pour montrer que $B_* = B$, on utilise encore l'associativité du produit matriciel : $B_*(AB) = (B_*A)B$. Or :

$$B_*(AB) = B_*I = B_* \quad \text{et} \quad (B_*A)B = IB = B.$$

Par définition, s'il existe une matrice B telle que $BA = AB = I$, la matrice A est inversible.

4. La démonstration est la même que précédemment : $B(AB^*) = (BA)B^*$. Or :

$$B(AB^*) = BI = B \quad \text{et} \quad (BA)B^* = IB^* = B^*.$$

5. Utilisons encore l'associativité du produit matriciel.

$$(AC)(C^{-1}A^{-1}) = A(CC^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Il existe donc une matrice qui, multipliée à droite par AC donne l'identité. Par application de ce qui précède, la matrice AC est donc inversible et son inverse est la matrice $C^{-1}A^{-1}$.