

Fiche méthode : Résoudre un système d'équations par substitution

Résoudre un système d'équations par substitution



Un système de 3 équations...

? Exemple

L'application des lois de Kirchhoff à un circuit électrique conduit au système suivant avec I , I_1 et I_2 comme inconnues :

$$\begin{cases} (1) E + 4RI - 2RI_1 = 0 \\ (2) 3E - 2RI_1 + 4RI_2 = 0 \\ (3) 2E + 2RI + RI_1 + 2RI_2 = 0 \end{cases}$$

Exprimer I en fonction de E et de R , à partir du système précédent.

Explication

- On commence par identifier les inconnues. Celle que l'on cherche à exprimer (en rouge), celles qu'on cherche à supprimer en bleu et rose.

$$\begin{cases} (1) E + 4RI - 2RI_1 = 0 \\ (2) 3E - 2RI_1 + 4RI_2 = 0 \\ (3) 2E + 2RI + RI_1 + 2RI_2 = 0 \end{cases}$$

- On observe qu'il n'y a pas I_2 dans la première équation. On va donc pouvoir s'en servir pour exprimer I_1 en fonction de I et substituer dans les deux autres équations : $I_1 = f(I)$
- Il n'y a que I_1 et I_2 dans l'expression (2) : on va donc s'en servir ensuite pour exprimer I_2 en fonction de I_1 et grâce à l'équation (1) en fonction de I
- On remplacera ensuite I_1 et I_2 par leur expression en fonction de I dans la troisième expression.

Calcul :

- On exprime I_1 en fonction de I grâce à (1) :

$$E + 4RI - 2RI_1 = 0 \Rightarrow 2RI_1 = E + 4RI \Rightarrow I_1 = \frac{E + 4RI}{2R}$$

- On exprime I_2 en fonction de I_1 dans (2) :

$$3E - 2RI_1 + 4RI_2 = 0 \Rightarrow 4RI_2 = 2RI_1 - 3E \Rightarrow I_2 = \frac{2RI_1 - 3E}{4R}$$

- On remplace I_1 par son expression en fonction de I :

$$I_2 = \frac{2RI_1 - 3E}{4R} = \frac{2R \left(\frac{E + 4RI}{2R} \right) - 3E}{4R} = \frac{E + 4RI - 3E}{4R} = \frac{2RI - 2E}{4R}$$

- On injecte les expressions précédentes dans (3) pour éliminer I_1 et I_2 :

$$2E + 2RI + \frac{E + 4RI}{2} + 2RI - E = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}E + 6RI = 0 \Rightarrow I = -\frac{E}{4R}$$

Deux méthodes possibles

Remarque

L'objectif est de manipuler des expressions littérales pour

- Éliminer ou isoler une inconnue
- Il existe deux méthodes :
 - Si une inconnue s'isole facilement dans l'une des relations : utiliser le procédé de substitution
 - Si l'inconnue est présente dans plusieurs équations : résoudre par combinaison

Résoudre un système par substitution

Méthode

- On repère la grandeur que l'on cherche à exprimer et les grandeurs que l'on souhaite supprimer.**
Ces grandeurs jouent le rôle des inconnues dans un système d'équations en mathématiques.
- On cherche dans quelle relation on peut facilement isoler une (ou la) grandeur à supprimer.**
On exprime donc la grandeur à supprimer en fonction de la grandeur que l'on veut isoler.
- On remplace la grandeur à supprimer dans la ou les autres expressions.**
- Et ainsi de suite jusqu'à avoir l'expression de la grandeur recherchée qui ne fait plus apparaître les grandeurs que l'on ne sait pas mesurer.