

Résoudre une équation du second degré dans R



Équation du second degré simple

? Exemple

Un fauteuil électrique est alimenté par un générateur de force électromotrice E et de résistance interne r non nulle. On appelle I l'intensité qui circule dans le circuit électrique. La puissance fournie aux bornes du générateur lors du fonctionnement est $P = (E - rI) \cdot I$.

Calculer les expressions possibles de l'intensité I qui circule dans le circuit en fonction de E , P et r sachant que $E^2 > 4rP$.

Explication

On ne peut pas simplement isoler I . On va donc développer l'expression pour se ramener à une équation du second degré (avec I^2).

Calcul :

- On développe et on obtient : $P = E \cdot I - r \cdot I^2$.
- **On reconnaît une équation du second degré** dont l'inconnue est I
- On se ramène à la forme caractéristique de l'équation du second degré (de la forme $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$) : $rI^2 - E \cdot I + P = 0$
- **On calcule le discriminant** : $\Delta = (-E)^2 - 4(r)(P) = E^2 - 4r \cdot P$
- **On détermine les solutions**
 - Par hypothèse, $\Delta > 0$
 - On a donc 2 valeurs possibles pour I : $I_1 = \frac{E + \sqrt{E^2 - 4rP}}{2r}$ et $I_2 = \frac{E - \sqrt{E^2 - 4rP}}{2r}$

Équation du second degré avec des fractions

? Exemple

Un objet AB et un écran E sont fixes et distants de D . Entre l'objet et l'écran on place une lentille mince convergente de distance focale f' . On peut montrer que si $D > 4f'$, il existe au moins une position de la lentille distante de p de l'écran pour laquelle il y a une image nette de l'objet sur l'écran. Les lois de conjugaison amènent à l'expression : $\frac{1}{p} - \frac{1}{p - D} = \frac{1}{f'}$

Déterminer l'expression de p en fonction de D et f' , position possible pour l'obtention d'une image nette sur l'écran.

Raisonnement : p est présent plusieurs fois, il ne sera pas possible de l'isoler "simplement". On commence par se ramener à une équation en ligne avec p uniquement au numérateur.

Calcul :

- **On se ramène à une équation en ligne**

- On ramène le terme de gauche au même dénominateur : $\frac{(p-D)-p}{p(p-D)} = \frac{1}{f'}$
- On calcule le numérateur de la première fraction : $\frac{-D}{p(p-D)} = \frac{1}{f'}$
- On se ramène à une équation en ligne : $-Df' = p(p-D)$

- **On se ramène à une équation du second degré**

- On développe : $-Df' = p^2 - pD$
- On voit que p apparaît aussi au carré, on se ramène donc à la forme caractéristique de l'équation du second degré ($a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$) : $p^2 - pD + Df' = 0$

- **On calcule le discriminant et les solutions**

- Le discriminant $D^2 - 4Df' = D(D - 4f')$ est positif (énoncé)
- Il existe donc deux solutions distinctes pour p : $p_+ = \frac{1}{2} \left[D + \sqrt{D^2 - 4Df'} \right]$ et $p_- = \frac{1}{2} \left[D - \sqrt{D^2 - 4Df'} \right]$

Équation du second degré avec contrainte sur la solution

? Exemple

Une fusée éclairante suit une trajectoire parabolique et son équation horaire selon l'axe vertical (Oy) s'écrit :

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + h \text{ où toutes les constantes sont définies positives.}$$

Déterminer le temps de vol $t > 0$ tel que $y(t) = 0$.

La condition de l'énoncé se traduit par une équation du second degré que l'on va ensuite résoudre.

- **On reconnaît une équation du second degré :**

- La condition de l'énoncé se traduit par : $-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + h = 0$
- On reconnaît une équation du second degré dont l'inconnue est t qui est déjà mise sous forme canonique ($a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$) : $-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + h = 0$

- **On calcule le discriminant :** $\Delta = v_0^2 \sin^2 \alpha - 4h \left(-\frac{1}{2}g\right) = v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh$

- **On détermine les solutions :**

- On constate que $\Delta > 0$ et on a donc deux valeurs possibles pour t :

$$t_1 = \frac{-v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{-g} \text{ et } t_2 = \frac{-v_0 \sin \alpha - \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{-g}$$

- On simplifie les signes moins :

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha - \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g} \text{ et } t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}$$

- **On choisit la solution compatible** avec la contrainte $t > 0$

- L'énoncé dit que t est toujours positif
- La solution t_2 est négative puisque $\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh} > v_0 \sin \alpha$
- La solution est donc $t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}$

Résoudre une équation du second degré



1. **Se ramener à une équation en ligne**
2. **Ordonner les différents termes de l'équation** pour se ramener à la forme $ax^2 + bx + c = 0$
3. **Calculer le discriminant :** $\Delta = b^2 - 4ac$
4. Justifier que le **discriminant est positif** : $\Delta > 0$
5. Exprimer les **solutions** : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Quand il n'y a pas de terme constant



Si le terme constant du trinôme est nul, factoriser directement sans calculer le discriminant

Impossibilité de résoudre le problème



Lorsque $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solution réelle, l'inconnue ne peut être extraite ou isolée avec cette méthode.
Il faudra recourir aux nombres complexes (voir fiche suivante).

Résoudre une équation du 2d degré dans C



Système oscillant

? Exemple

La position x d'un système masse-ressort qui se déplace autour de sa position d'équilibre est décrit par l'équation différentielle : $x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x = 0$.

La position x est une fonction du temps t et λ et ω sont deux constantes positives telles que $\lambda < \omega$.

Le polynôme caractéristique de cette équation différentielle s'écrit : $r^2 + 2\lambda r + \omega^2$

Calculer toutes les solutions de l'équation qui annule le polynôme caractéristique de l'équation différentielle.

Explication

Pour déterminer les solutions, on calcule le discriminant et selon son signe, on écrit les solutions.

Calcul littéral :

- Le discriminant est $\Delta = (2\lambda)^2 - 4\omega^2 = 4\lambda^2 - 4\omega^2 = 4(\lambda^2 - \omega^2)$
- Comme $\lambda < \omega$ alors $\Delta < 0$
- Les solutions sont donc $r_1 = -\lambda + i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ et $r_2 = -\lambda - i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$

On écrit parfois que les solutions sont $r = -\lambda \pm i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$

Résolution d'une équation du second degré dans C

Méthode

- On se ramène à la **forme canonique** $ax^2 + bx + c = 0$ et on identifie les termes qui jouent le rôle de a , b et c en mathématiques.
- On calcule le **discriminant** : $\Delta = b^2 - 4ac$
- On étudie son signe

Si Δ est **positif ou nul** : l'équation a une ou deux solutions réelles (voir fiche méthode précédente),

Si Δ est **négatif** : l'équation a 2 solutions complexes :

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

- On **calcule les solutions**
- On réorganise les résultats si nécessaire :
Simplifier
Séparer les parties réelle et imaginaire si nécessaire

Attention

Lorsque le discriminant Δ est négatif

- Par exemple : $\Delta = -36$,

Alors $-\Delta$ est bien un nombre positif et $\sqrt{-\Delta}$ existe dans $\mathbb{R}$

- Dans l'exemple précédent, on a : $-\Delta = -(-36) = 36$ et $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{36} = 6$

Des solutions conjuguées

Remarque

Les 2 solutions complexes d'une équation à coefficient réels sont **conjuguées**.