

Simplifier une expression avec des logarithmes



Différence de logarithmes

? Exemple

Au cours d'une transformation isotherme, l'énergie thermique échangée vaut :

$$Q = nRT_A (\ln(V_B) - \ln(V_A))$$

Simplifier l'expression précédente .

 Explication

- Sachant que $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$, il vient : $\ln(V_B) - \ln(V_A) = \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$
- Finalement : $Q = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

Logarithme d'un inverse

? Exemple

La demi-vie $t_{1/2}$ d'un échantillon radioactif peut se déduire de l'expression :

$$-\lambda t_{1/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Écrire $t_{1/2}$ en fonction de $\ln(2)$

 Explication

- On cherche à isoler $t_{1/2}$ d'où : $t_{1/2} = -\frac{\ln(1/2)}{\lambda}$
- Sachant que $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$, il vient : $t_{1/2} = -\frac{-\ln(2)}{\lambda}$
- Finalement : $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$

 Méthode

Les propriétés abordées précédemment visent souvent à :

- Alléger des expressions littérales : on préfère par exemple écrire le $\ln$ d'une fraction plutôt qu'une différence de $\ln$
- Développer des calculs : on rencontre souvent des $\ln$ ou des $\log$ de produits que l'on peut développer pour travailler sur une expression littérale

Utiliser les propriétés du logarithme



Expression avec le logarithme décimal

? Exemple

Le niveau sonore L d'une guitare émettant un son d'intensité I est donné par la relation $L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ avec I_0 une constante.

Lorsque deux guitares jouent simultanément, l'intensité sonore est doublée et le niveau sonore est alors noté L_2 .

Déterminer l'expression du niveau sonore L_2 correspondant en fonction de L .

Explication

- On traduit la condition donnée dans l'énoncé : $L_2 = 10 \log\left(\frac{2I}{I_0}\right)$
- On doit exprimer L_2 en fonction de L , il faut donc chercher à faire apparaître

$L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ dans l'expression de L_2 .

- On utilise la propriété $\log ab = \log a + \log b$ et on obtient :

$$L_2 = 10 \log\left(2 \times \frac{I}{I_0}\right) = 10 \left(\log 2 + \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \right)$$

- On développe : $L_2 = 10 \log(2) + 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$
- On identifie : $L_2 = 10 \log(2) + L$

Méthode

Lorsqu'il faut exprimer une grandeur à partir d'une expression avec des logarithmes, on peut utiliser l'une des propriétés du logarithme suivantes :

- $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
- $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$
- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
- $\log(a^n) = n \log(a)$

Remarque

- Toutes les propriétés du logarithme peuvent se retrouver à partir de la première propriété : $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
- Les propriétés du logarithme népérien ($\ln$) et du logarithme décimal ($\log$) sont les mêmes.

Attention

Il n'y a pas de propriété remarquable sur $\log(a + b)$ ou $\ln(a + b)$

Utiliser les fonctions réciproques



Exprimer v_E en fonction des autres grandeurs du problème à partir de la relation $f_R = \frac{v_{son}}{v_{son} - v_E} \times f_E$.

? Exemple

Exprimer v_E en fonction des autres grandeurs du problème à partir de la relation $f_R = \frac{v_{son}}{v_{son} - v_E} \times f_E$.

 Explication

- On repère quelle est la grandeur à isoler en la surlignant sur la copie : ici v_E est au dénominateur à droite $f_R = \frac{v_{son}}{v_{son} - v_E} \times f_E$
- On se ramène à une équation en ligne en multipliant par $(v_{son} - v_E)$ donc :
$$f_R \times (v_{son} - v_E) = v_{son} \times f_E$$
- On isole la grandeur recherchée :
 - On développe : $f_R v_{son} - f_R v_E = v_{son} f_E$
 - On isole le terme contenant v_E en ajoutant $-f_R v_{son}$ de part et d'autre du signe égal :
$$-f_R v_E = v_{son} f_E - f_R v_{son}$$
 - On isole v_E en divisant l'expression par le préfacteur " $-f_R$ " et on obtient :
$$v_E = \frac{v_{son}(f_E - f_R)}{-f_R}$$
- On simplifie : $v_E = v_{son} \left(1 - \frac{f_E}{f_R} \right)$

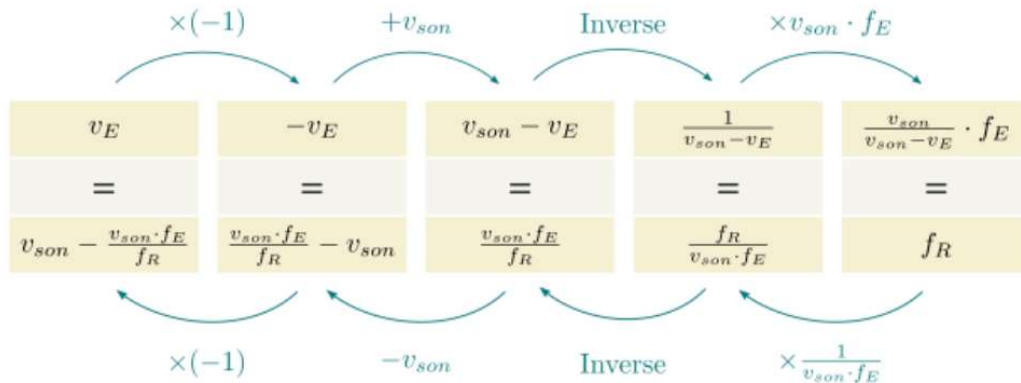
Exprimer une grandeur à partir d'une relation quelconque

 Méthode

1. On identifie la grandeur recherchée qui joue le rôle de l'inconnue x en mathématiques
2. Si l'inconnue est présente au dénominateur : on se ramène à une équation en ligne
3. Si l'inconnue n'est présente qu'une fois mais "dans" une fonction :
On utilise les procédés réciproques pour progressivement isoler la grandeur recherchée

Les procédés réciproques

Une méthode qui marche souvent pour trouver comment isoler une grandeur dans une expression compliquée, c'est de recourir aux procédés réciproques. L'idée est de construire étape par étape l'expression de départ à partir de la grandeur à isoler ; et ensuite, de suivre les étapes dans l'ordre inverse en utilisant les procédés réciproques.



À la fin, il ne faut pas oublier de simplifier l'expression obtenue. Dans le cas de l'exemple illustré :

$$v_E = v_{son} - \frac{v_{son} f_E}{f_R} = v_{son} \left(1 - \frac{f_E}{f_R} \right)$$

Les procédés réciproques



Procédé	Procédé réciproque
Ajouter	Soustraire
Multiplier par ...	Diviser par ...
Élever au carré	Prendre la racine carrée
Prendre l'inverse de	Prendre l'inverse de
Prendre le logarithme népérien de ...	Prendre l'exponentielle de ...
Prendre le logarithme décimal de ...	Prendre la puissance de 10 de ...
Prendre le sin , le cos , la tan de ...	Prendre arcsin , arccos , arctan de ...
Procédé réciproque	Procédé

Attention aux domaines de définition des fonctions correspondantes. Quand plusieurs valeurs sont possibles il faut résoudre l'équation et pas juste appliquer les procédés réciproques.

Isoler n'est pas équivalent à résoudre une équation



Lorsque l'on manipule les fonctions trigonométriques et la fonction racine carrée, il faut vérifier :

- Que la solution existe
- Si il en existe plusieurs