

Les intégrales :

Partie 1 : Intégrale et aire

Partie 2 : Intégrale et primitive

Partie 3 : Propriétés des intégrales

Partie 4 : Intégration par parties

Partie 5 : Applications du calcul intégral

Partie 1 : Intégrale et aire

1) Unité d'aire

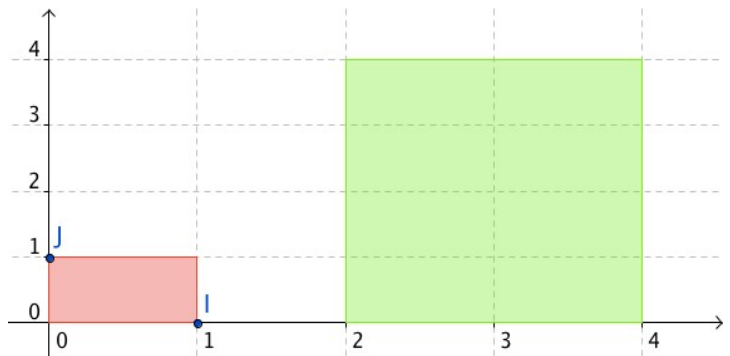
Dans le repère (O, I, J) , le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1.

Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.

L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.

L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.

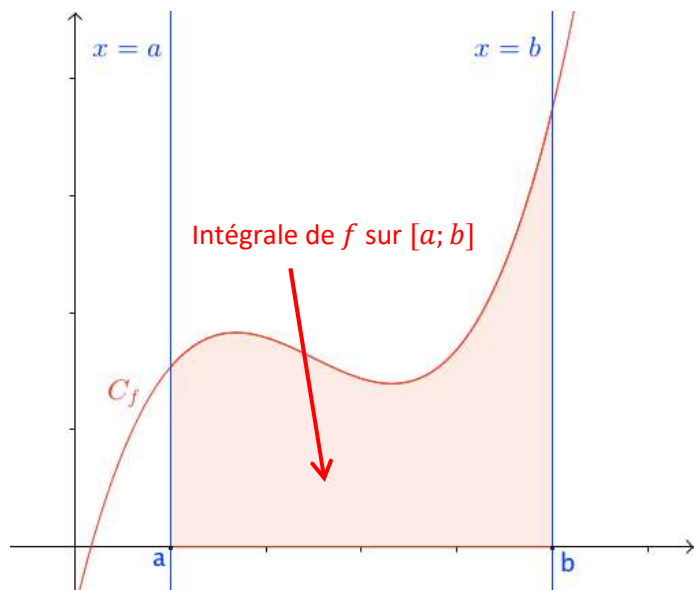
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).



2) Définition

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

On appelle **intégrale** de f sur $[a ; b]$ l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



3) Notation

L'intégrale de la fonction f sur $[a ; b]$ se note :

$$\int_a^b f(x) dx$$

Et on lit « intégrale de a à b de $f(x) dx$ ».

Remarques :

- a et b sont appelés les **bornes d'intégration**.
- x est la **variable d'intégration**. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

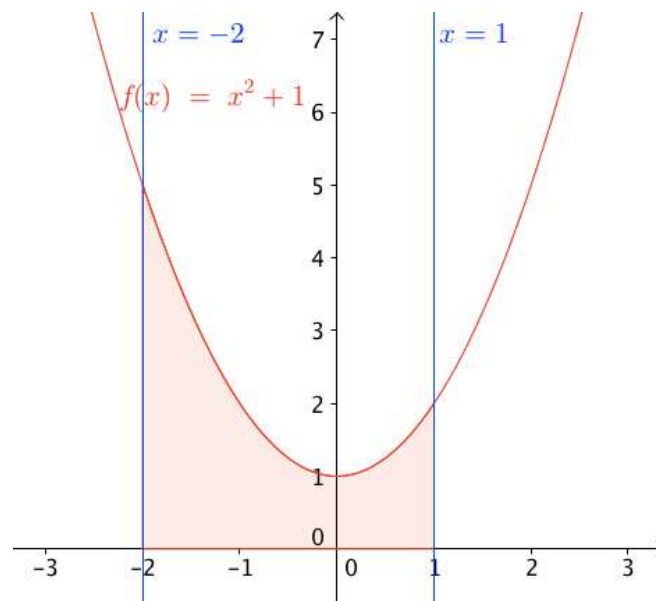
Ainsi on peut écrire : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

" dx " ou " dt " nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

Exemple :

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$ est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 1]$ et se note :

$$\int_{-2}^1 x^2 + 1 dx$$



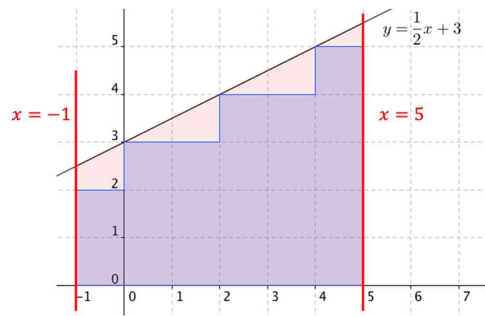
Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire (1)

a) Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ dans un repère orthonormé.

b) Calculer $\int_{-1}^5 f(x) dx$.

Correction

a)



b) Calculer $\int_{-1}^5 f(x) dx$ revient à calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 5$.

Donc par dénombrement, on obtient : $\int_{-1}^5 f(x) dx = 21 \text{ u. a.} + 3 \text{ u. a.} = 24 \text{ u. a.}$

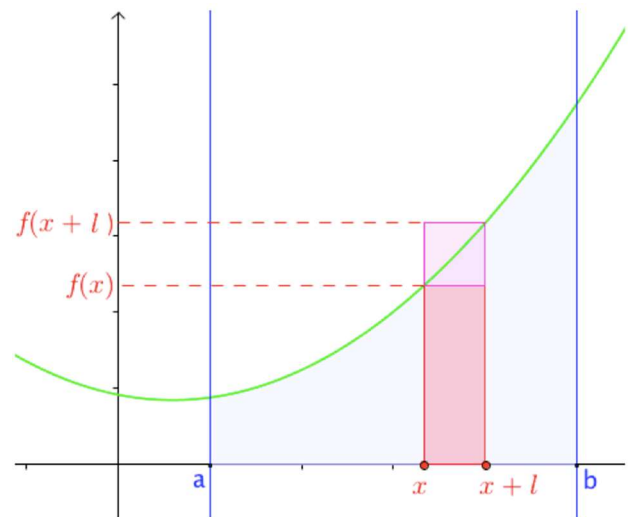
4) Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive

Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a ; b]$.

On partage l'intervalle $[a ; b]$ en n sous-intervalles de même amplitude $l = \frac{b-a}{n}$.

Sur un sous-intervalle $[x ; x + l]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- l'un de dimension l et $f(x)$ qui a pour aire : $l \times f(x)$;
- l'autre de dimension l et $f(x + l)$ qui a pour aire $l \times f(x + l)$.



Sur l'intervalle $[a ; b]$, l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs".

Voici un algorithme écrit en langage naturel permettant d'obtenir un tel encadrement :

Langage naturel
Définir fonction rectangle(a, b, n)
$L \leftarrow (b-a)/n$
$x \leftarrow a$
$m \leftarrow 0$
$p \leftarrow 0$
Pour i allant de 0 à n-1
$m \leftarrow m + L \times f(x)$
$x \leftarrow x + L$
$p \leftarrow p + L \times f(x)$
FinPour
Afficher m et p

```
def rectangle(a,b,n):
    l=(b-a)/n
    x=a
    m=0
    p=0
    for i in range(0,n):
        m=m+l*x**2
        x=x+l
        p=p+l*x**2
    return m,p
```

Exemple :

Avec Python, on programme cet algorithme pour la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

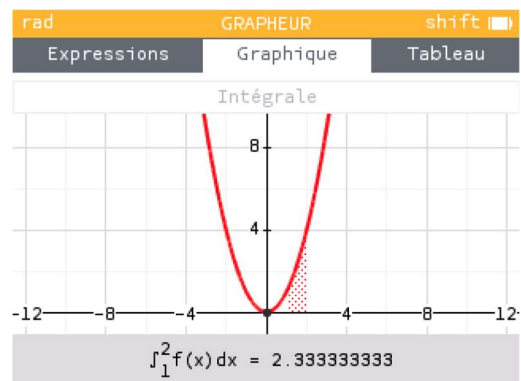
On exécute plusieurs fois le programme pour obtenir un encadrement de l'intégrale de la fonction carré sur $[1 ; 2]$.

En augmentant le nombre de sous-intervalles, la précision du calcul s'améliore car l'encadrement formé de rectangles inférieurs et supérieurs se resserre autour de la courbe.

```
>>> rectangle(1,2,10)
(2.1850000000000014, 2.4850000000000017)
>>> rectangle(1,2,50)
(2.3034000000000017, 2.3634000000000017)
>>> rectangle(1,2,100)
(2.3183500000000003, 2.3483500000000026)
>>>
```

On en déduit que : $2,31 < \int_1^2 x^2 dx < 2,35$

Il est possible de vérifier avec la calculatrice :



5) Extension aux fonctions de signe quelconque

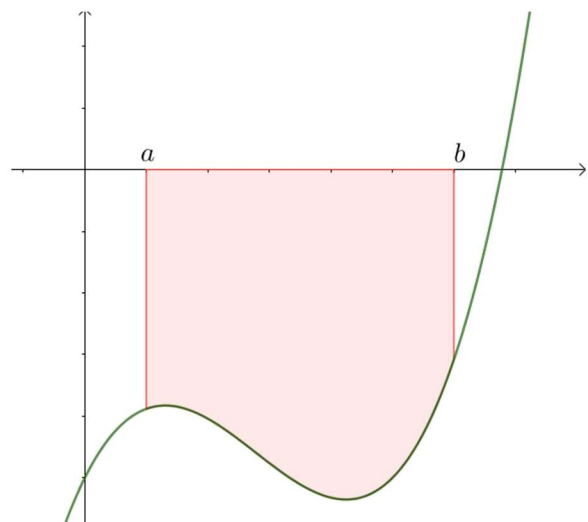
Propriété : Soit f une fonction continue et NÉGATIVE sur un intervalle $[a ; b]$.

L'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par :

- la courbe représentative de la fonction f ,
- l'axe des abscisses,
- et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

est égal à :

$$-\int_a^b f(x) dx$$



Propriétés sur les bornes d'intégration :

$$a) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$b) \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$c) \text{ Relation de Chasles : } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire (2)

Représenter la droite d'équation $y = 3 - x$ dans un repère.

En déduire $\int_2^5 3 - x dx$ en effectuant des calculs d'aire.

Correction

La droite d'équation $y = 3 - x$ coupe l'axe des abscisses en $x = 3$.

Donc, $3 - x \geq 0$ sur l'intervalle $[2 ; 3]$

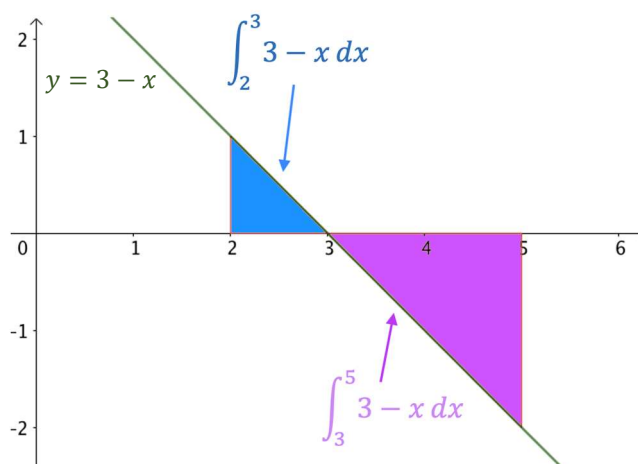
Et, $3 - x \leq 0$ sur l'intervalle $[3 ; 5]$.

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_2^5 3 - x dx = \int_2^3 3 - x dx + \int_3^5 3 - x dx$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_2^5 3 - x dx &= \frac{1 \times 1}{2} + \left(-\frac{2 \times 2}{2} \right) \\ &= -1,5 \end{aligned}$$

**Remarque :**

Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.

On a par exemple :

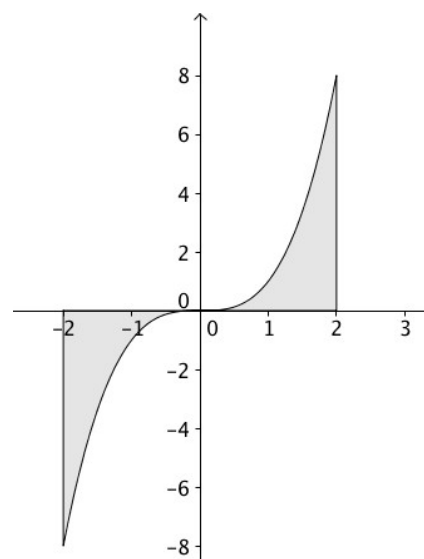
$$\int_{-2}^2 x^3 dx = 0$$

En effet, la courbe représentative de la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine du repère, donc :

$$\int_{-2}^0 x^3 dx = - \int_0^2 x^3 dx$$

Et donc :

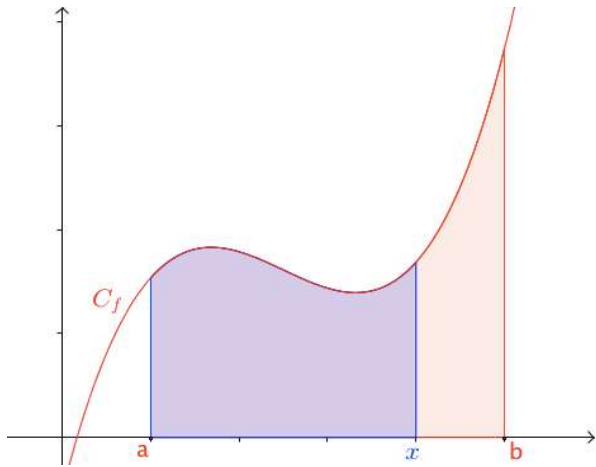
$$\int_{-2}^2 x^3 dx = \int_{-2}^0 x^3 dx + \int_0^2 x^3 dx = 0$$



Partie 2 : Intégrale et primitive

1) Fonction définie par une intégrale

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.
La fonction F définie sur $[a ; b]$ par :
 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .



Démonstration dans le cas où f est strictement croissante :

- 1^{er} cas : $h > 0$

On considère deux réels x et $x + h$ de l'intervalle $[a ; b]$.

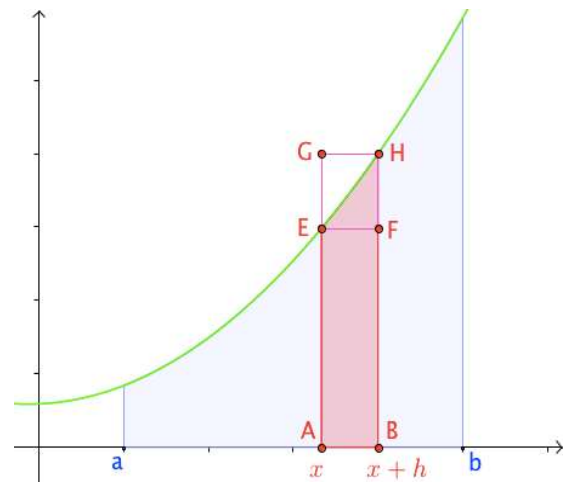
On veut démontrer que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^{x+h} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$

On a représenté ci-contre, la courbe de la fonction f (en vert).

Cette différence est égale à l'aire de la surface colorée en rouge.

Elle est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABHG.



Or, $\text{Aire}(ABFE) = h \times f(x)$ et

$\text{Aire}(ABHG) = h \times f(x+h)$.

Comme f est croissante sur $[a ; b]$, on a :

$h \times f(x) < F(x+h) - F(x) < h \times f(x+h)$

Puisque $h > 0$, on a :

$$f(x) < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x+h)$$

Comme f est continue sur $[a; b]$, $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

Et donc : $F'(x) = f(x)$.

F est donc une primitive de f .

Par ailleurs, F s'annule en a , car $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$.

- 2^e cas : $h < 0$

La démonstration est analogue (les encadrements sont inversés).

Conséquence immédiate :

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Méthode : Étudier une fonction définie par une intégrale

Soit F la fonction définie sur $[0; 10]$ par : $F(x) = \int_0^x \frac{t}{2} dt$.

a) Étudier les variations de F .

b) Tracer sa courbe représentative.

Correction

a) $t \mapsto \frac{t}{2}$ est continue et positive sur $[0; 10]$ donc F est dérivable sur $[0; 10]$ et $F'(x) = \frac{x}{2} > 0$.

Donc F est croissante sur $[0; 10]$.

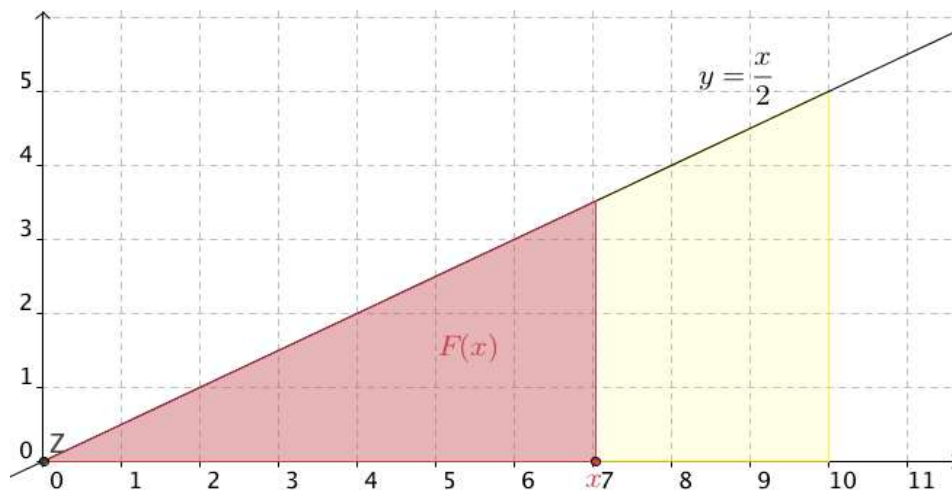
On dresse le tableau de variations :

x	0	10
$F'(x)$	+	
$F(x)$	0	25



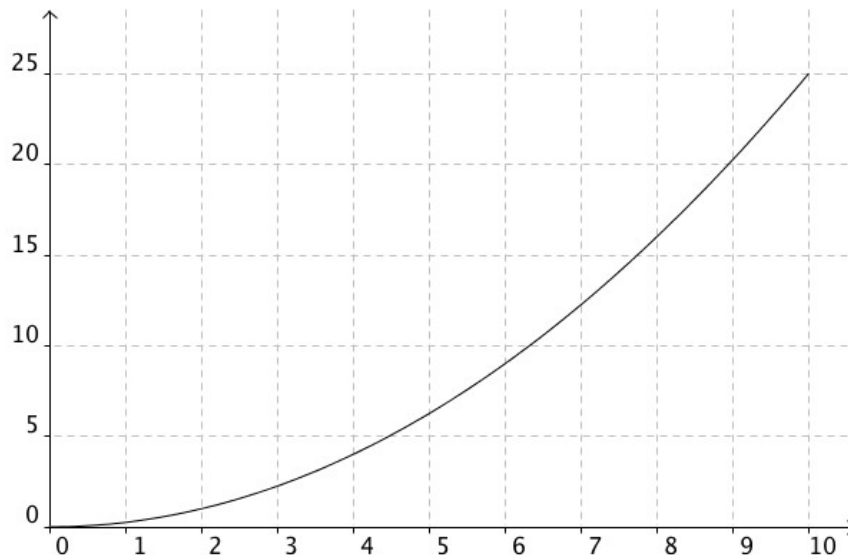
$F(x)$ est égal à l'aire du triangle rouge.

Ainsi $F(10) = \frac{10 \times 5}{2} = 25$ u. a.



b) Pour tout x de $[0 ; 10]$, on a $F(x) = \frac{x \times \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{4}$ u. a.

On a ainsi la représentation graphique de F :



2) Calcul d'intégrales

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.

Si F est une primitive de f alors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration :

La fonction G définie sur $[a ; b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur $[a ; b]$ d'après le premier théorème du paragraphe II.

Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a ; b]$, on a : $G(x) = F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

En effet, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

De plus, $G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ et $G(a) = F(a) + k$ donc $F(a) = -k$ et donc :

$$k = -F(a).$$

$$\text{Or } G(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) + k = F(b) - F(a).$$

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a ; b]$.

On appelle **intégrale** de f sur $[a ; b]$ la différence $F(b) - F(a)$.

Notation :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2} dx \qquad B = \int_2^5 3x^2 + 4x - 5 dx \qquad C = \int_{-1}^1 e^{-2x} dx$$

Correction

$$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2} dx$$

$$\text{On a : } f(x) = \frac{3}{x^2} = 3 \times \frac{1}{x^2}$$

Une primitive de f est la fonction F telle que : $F(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{3}{x}$

Donc :

$$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2} dx = \left[-\frac{3}{x}\right]_1^4 = F(4) - F(1) = -\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{1}\right) = \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned} B &= \int_2^5 3x^2 + 4x - 5 dx \\ &= [x^3 + 2x^2 - 5x]_2^5 \\ &= 5^3 + 2 \times 5^2 - 5 \times 5 - (2^3 + 2 \times 2^2 - 5 \times 2) = 144 \end{aligned}$$

$$C = \int_{-1}^1 e^{-2x} dx$$

$$\text{On a : } f(x) = e^{-2x} = \frac{1}{-2}(-2)e^{-2x}$$

Une primitive de f est la fonction F telle que : $F(x) = \frac{1}{-2}e^{-2x}$

Donc :

$$\begin{aligned} C &= \int_{-1}^1 e^{-2x} dx = \left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{-1}^1 = F(1) - F(-1) \\ &= \frac{1}{-2}e^{-2 \times 1} - \frac{1}{-2}e^{-2 \times (-1)} \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right) \end{aligned}$$

Partie 3 : Propriétés des intégrales

1) Propriété de linéarité

Propriété :

a) Pour k réel, $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

b) $\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

Éléments de démonstration :

On applique les propriétés sur les primitives :

- kF est une primitive de kf

- $F + G$ est une primitive de $f + g$

Méthode : Calculer une intégrale en appliquant la linéarité

On pose : $A = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$ et $B = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$

a) Calculer $A + B$ et $A - B$.

On donne : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$

b) En déduire A et B .

Correction

a) On calcule en appliquant les formules de linéarité :

$$\begin{aligned} A + B &= \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx + \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx & A - B &= \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx - \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(x) + \sin^2(x) dx & &= \int_0^{2\pi} \cos^2(x) - \sin^2(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dx & &= \int_0^{2\pi} \cos(2x) dx \\ &= [x]_0^{2\pi} & &= \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi & &= \frac{1}{2} \sin(2 \times 2\pi) - \frac{1}{2} \sin(2 \times 0) = 0 \end{aligned}$$

b) On a ainsi :

$$\begin{cases} A + B = 2\pi \\ A - B = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 2A = 2\pi \\ A = B \end{cases} \text{ soit : } A = B = \pi$$

2) Positivité et comparaison

Propriétés :

a) Si, pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

b) Si, pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

Démonstration :

a) Par définition, lorsque f est positive, l'intégrale de f est une aire donc est positive.

b) Si $f(x) \geq g(x)$ alors $f(x) - g(x) \geq 0$.

Donc en appliquant a), on a : $\int_a^b f(x) - g(x) dx \geq 0$.

Par linéarité, on a $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0$ et donc $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Méthode : Encadrer une intégrale

a) Démontrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) En déduire que : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$.

Correction

a) Sur $[0 ; 1]$, $x^2 \leq x$.

Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) On déduit de la question précédente que :

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \int_0^1 e^x dx$$

$$\int_0^1 0 dx = 0 \text{ et } \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

$$\text{D'où : } 0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1.$$

Partie 4 : Intégration par parties

Théorème : Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a ; b]$. Alors, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Démonstration :

uv est dérivable sur $[a ; b]$ et on a : $(uv)' = u'v + uv'$

Les fonctions uv' , $u'v$ et $(uv)'$ sont continues sur $[a ; b]$, donc :

$$\begin{aligned} [u(x)v(x)]_a^b &= \int_a^b (uv)'(x) dx \\ &= \int_a^b (u'v + uv')(x) dx \\ &= \int_a^b (u'v)(x) dx + \int_a^b (uv')(x) dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Méthode : Calculer une intégrale en intégrant par parties

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx \qquad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx \qquad C = \int_1^{e^2} \ln x \, dx$$

Correction

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$$

$v \quad u'$ **» Ce choix n'est pas anodin ! L'idée est ici de ne plus laisser le facteur x dans l'expression qu'il restera à intégrer. Il faudrait donc dériver x .**

On pose : $v(x) = x \rightarrow v'(x) = 1$

$u'(x) = \sin x \rightarrow u(x) = -\cos x$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x) v(x) \, dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x) \, dx \\ &= [-\cos x \times x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x \times 1 \, dx \\ &= [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \\ &= -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + 0 \times \cos 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 \end{aligned}$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx$$

$v \quad u'$
On pose : $v(x) = x^2 \rightarrow v'(x) = 2x$

$u'(x) = \cos x \rightarrow u(x) = \sin x$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x) v(x) \, dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x) \, dx \\ &= [\sin x \times x^2]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \times 2x \, dx \\ &= [x^2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx \end{aligned}$$

Or, dans le terme de droite, on reconnaît l'intégrale A de la question précédente qui a été calculée par parties. Il s'agit ici d'une **double intégration par parties**.

On a donc :

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2} - 0^2 \sin 0 - 2 \times 1 \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{aligned}$$

$$C = \int_1^{e^2} \underset{u'}{1} \times \underset{v}{\ln x} dx$$

On pose : $v(x) = \ln x \rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$
 $u'(x) = 1 \rightarrow u(x) = x$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned} C &= \int_1^{e^2} u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} u(x) v'(x) dx \\ &= [x \ln x]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \frac{1}{x} dx \\ &= e^2 \ln e^2 - 1 \ln 1 - \int_1^{e^2} 1 dx \\ &= e^2 \times 2 \ln e - [x]_1^{e^2} \\ &= e^2 \times 2 - e^2 + 1 \\ &= e^2 + 1 \end{aligned}$$

Partie 5 : Applications du calcul intégral

1) Aire délimitée par deux courbes

Méthode : Calculer l'aire délimitée par les courbes de deux fonctions continues et positives

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.

On admet que pour tout x de $[-1 ; 2]$, on a $f(x) \leq g(x)$.

Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de f et g sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.

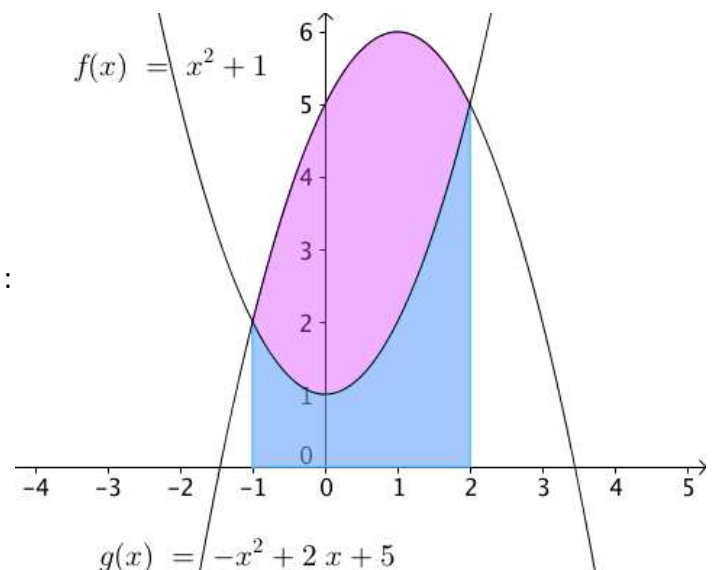
Correction

On calcule la différence de l'aire sous la courbe représentative de g et de l'aire sous la courbe représentative de f .

Cela revient à calculer la différence des intégrales :

$$A = \int_{-1}^2 g(x) dx - \int_{-1}^2 f(x) dx$$

$$\begin{aligned} I_g &= \int_{-1}^2 g(x) dx \\ &= \int_{-1}^2 -x^2 + 2x + 5 dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x \right]_{-1}^2 \\ &= -\frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 + 5 \times 2 - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + 5 \times (-1) \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= 15 \\
I_f &= \int_{-1}^2 f(x) dx \\
&= \int_{-1}^2 x^2 + 1 dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^2 \\
&= \frac{1}{3} \times 2^3 + 2 - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1) \right) \\
&= 6
\end{aligned}$$

Donc : $A = I_g - I_f = 15 - 6 = 9 \text{ u. a.}$

Remarque : Une autre méthode, un peu plus rapide, consisterait à utiliser la linéarité de l'intégrale.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^2 g(x) dx - \int_{-1}^2 f(x) dx \\
&= \int_{-1}^2 -x^2 + 2x + 5 dx - \int_{-1}^2 x^2 + 1 dx \\
&= \int_{-1}^2 -x^2 + 2x + 5 - x^2 - 1 dx \\
&= \int_{-1}^2 -2x^2 + 2x + 4 dx = \dots = 9
\end{aligned}$$

2) Valeur moyenne d'une fonction

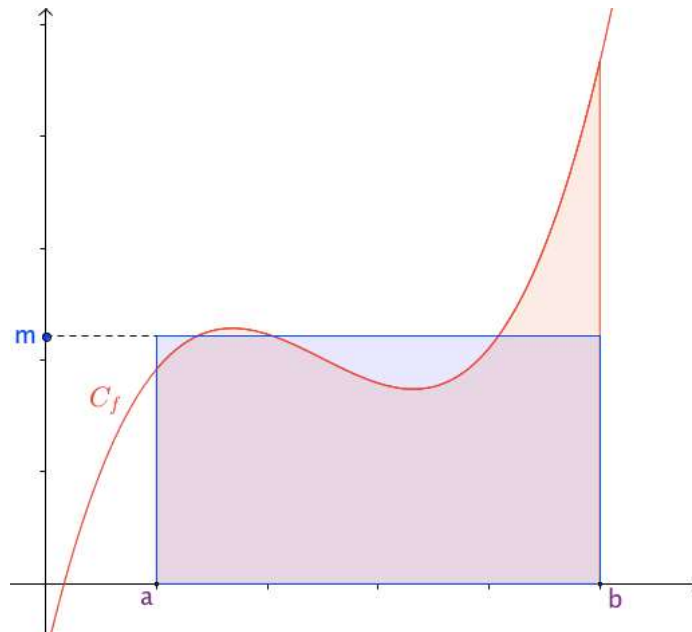
Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a \neq b$.

On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a ; b]$ le nombre réel :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Interprétation géométrique :

L'aire sous la courbe représentative de f (**en rouge ci-dessous**) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (**en bleu**), entre a et b .



Exemple :

Calculons la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle $[1 ; 10]$.

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{1}{10 - 1} \int_1^{10} 3x^2 - 4x + 5 \, dx \\
 &= \frac{1}{9} [x^3 - 2x^2 + 5x]_1^{10} \\
 &= \frac{1}{9} ((10^3 - 2 \times 10^2 + 5 \times 10) - (1^3 - 2 \times 1^2 + 5 \times 1)) = \frac{1}{9} (850 - 4) = \frac{846}{9} = 94
 \end{aligned}$$

Méthode : Calculer une valeur moyenne d'une fonction

On modélise, à l'aide d'une fonction, le nombre de malades lors d'une épidémie.

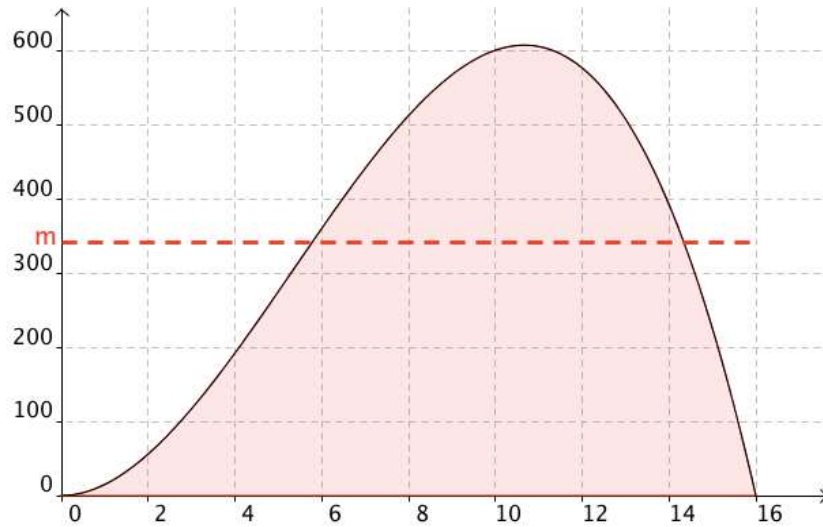
Au x -ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.

Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

Correction

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{1}{16 - 0} \int_0^{16} f(x) \, dx \\
 &= \frac{1}{16} \int_0^{16} 16x^2 - x^3 \, dx \\
 &= \frac{1}{16} \left[\frac{16}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^{16} \\
 &= \frac{1}{16} \left(\frac{16}{3} \times 16^3 - \frac{1}{4} \times 16^4 \right) \\
 &= \frac{1024}{3} \approx 341
 \end{aligned}$$

Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.



3) Intégrales et suites

Méthode : Étudier une suite d'intégrales

On considère la suite d'intégrales (I_n) définie pour tout entier n , par :

$$I_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx$$

a) Calculer I_0 .

b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$

Correction

a) Pour $n = 0$, on a :

$$I_0 = \int_1^e x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} 1^2 = \frac{e^2 - 1}{2}$$

b) L'objectif est d'exprimer I_{n+1} en fonction de I_n .

$$I_{n+1} = \int_1^e x (\ln x)^{n+1} dx$$

$u' \quad v$

On pose : $v(x) = (\ln x)^{n+1} \rightarrow v'(x) = (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^n$

$$u'(x) = x \rightarrow u(x) = \frac{1}{2} x^2$$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_1^e - \int_1^e u(x) v'(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 (\ln x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x^2 (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^n dx \\ &= \frac{1}{2} e^2 (\ln e)^{n+1} - \frac{1}{2} \times 1^2 (\ln 1)^{n+1} - \frac{n+1}{2} \int_1^e x (\ln x)^n dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$