

Calculer un produit scalaire



Calcul avec les composantes

? Exemple

Le travail (en J) fourni par une force $\vec{F}$ (intensité en Newton N) sur un objet qui se déplace en suivant le vecteur $\vec{\ell}$ (norme en m) est défini par un produit scalaire : $W = \vec{F} \cdot \vec{\ell}$.

On considère un solide qui se déplace de 1 mètre selon $\vec{u}_x$ et de 2 mètres selon $\vec{u}_y$ en étant soumis à la force $\vec{F} = 3\vec{u}_x - 2\vec{u}_y$ (intensité en Newton N).

Calculer le travail de $\vec{F}$ lors du déplacement $\vec{\ell}$.

On rappelle que $1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ J}$

Explication

Calcul littéral :

- OPTION 1 : On remplace chaque vecteur par son expression et on calcule le produit scalaire :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\ell} = (3\vec{u}_x - 2\vec{u}_y) \cdot (1\vec{u}_x + 2\vec{u}_y)$$
- OPTION 2 : les deux vecteurs sont exprimés dans la même base, on peut donc utiliser la formule : $W = F_x l_x + F_y l_y$

Application numérique :

- On remplace ensuite les composantes par leurs valeurs :

$$W = (3 \text{ N}) \times (1 \text{ m}) + (-2 \text{ N}) \times (2 \text{ m}) = 3 \text{ N} \cdot \text{m} - 4 \text{ N} \cdot \text{m} = -1 \text{ N} \cdot \text{m}$$
- On réalise la conversion d'unité : $W = -1 \text{ J}$

Calcul avec la norme et l'angle

? Exemple

Une péniche avance sur l'eau et est tirée par des chevaux. Sur une durée de 10 secondes, la péniche avance de 1 mètre alors que les chevaux tirent avec une force de 200 N. Cette force fait un angle de 60° avec le déplacement de la péniche.

On rappelle que le travail (en J) fourni par une force $\vec{F}$ (intensité en Newton N) sur un objet qui se déplace en suivant le vecteur $\vec{\ell}$ (norme en m) est définie par un produit scalaire : $W = \vec{F} \cdot \vec{\ell}$.

Déterminer la valeur du travail fourni pendant ces dix secondes.

On rappelle que $1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ J}$

Explication

- On connaît les normes de chacun des vecteurs ainsi que l'angle entre ces vecteurs, on utilise donc la formule avec le cosinus : $W = \|\vec{F}\| \times \|\vec{\ell}\| \cos(\vec{F}, \vec{\ell})$

Application numérique :

$$W = (1 \text{ m}) \times (200 \text{ N}) \times \cos(60^\circ)$$

- On calcule la valeur et on regroupe les unités : $W = 100 \text{ m} \cdot \text{N}$
- On réalise le changement d'unité : $W = 100 \text{ J}$

Calcul avec les composantes



Méthode

1. Décomposition dans la base

On commence par décomposer les vecteurs dans une base orthonormée (revoir la fiche "projection d'un vecteur")

2. Calcul littéral

- On réalise le produit de vecteurs (l'opération peut être plus complexe mais cette méthode marche toujours)
- Les termes croisés s'annulent car les vecteurs de base sont orthogonaux : $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = 0$
- On simplifie l'expression littérale obtenue

3. On réalise l'application numérique

Calcul avec les normes et l'angle entre les vecteurs



Méthode

On utilise la relation : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \cos(\vec{U}, \vec{V})$,

où $(\vec{U}, \vec{V})$ est l'angle entre $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

1. Calcul littéral :

- On commence par écrire la formule en l'appliquant au cas considéré
- On mène le calcul littéral et les simplifications possibles

2. Application numérique :

- On remplace les grandeurs par leurs valeurs avec les unités
- On mène les calculs
- On réalise les changements d'unités nécessaires

Le résultat d'un produit scalaire est un nombre



Attention

Le produit scalaire de 2 vecteurs donne un nombre. Ce nombre peut être positif ou négatif en fonction de l'angle entre les deux vecteurs.

- Si les deux vecteurs "tirent dans le même sens" : le résultat est positif
- Si les deux vecteurs "tirent dans des sens opposés" : le résultat est négatif