

Quizz : Dérivées



On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3}{x^2}$.

Quelle formule va-t-on utiliser pour calculer la dérivée de cette fonction de la manière la plus efficace ?

☐

$$\frac{u}{v}$$

☐

$u \times v$ où u et v sont des fonctions

☐

$a \times x^n$ où n est un entier relatif

☐

$$\frac{k}{u} \text{ où } k \text{ est un réel}$$



$$\frac{u}{v}$$



$u \times v$ où u et v sont des fonctions



$a \times x^n$ où n est un entier relatif



$$\frac{k}{u} \text{ où } k \text{ est un réel}$$



Explication Générale

Raisonnement : On a une fraction dont le numérateur est une constante et donc le dénominateur est une puissance de x . On reconnaît donc une expression de la forme $a \times x^n$ avec a une constante et $n = -2$

- On a donc $(3x^{-2})' = 3 \times (-2) \times x^{-2-1} = -6 \times x^{-3} = \frac{-6}{x^3}$

On aurait aussi pu utiliser d'autres formules "plus générales", mais le risque d'erreurs de calcul est alors plus grand.



Un mobile considéré comme ponctuel se déplace suivant un axe Ox avec une vitesse v .

Son accélération est donnée par $a(t) = \frac{dv}{dt}$

Si l'accélération est nulle à tout instant, que peut on dire de la vitesse v ?

☐

La vitesse est nulle à tout instant du mouvement

☐

La vitesse est constante au cours du temps.

☐

La vitesse est proportionnelle au temps écoulé



La vitesse est nulle à tout instant du mouvement

La dérivée d'un nombre constant non nul est nul.



La vitesse est constante au cours du temps.



La vitesse est proportionnelle au temps écoulé

Si la vitesse est proportionnelle au temps alors on a $v = kt$ avec k une constante. Dans ce cas, la dérivée de v donnerait $a = k$ et non $a = 0$



Explication Générale

Raisonnement :

Ici l'accélération vaut : $a(t) = \frac{dv}{dt} = 0$

La dérivée d'un nombre constant donne une valeur nulle, par définition de la dérivée.

Donc la vitesse est un nombre constant au cours du temps.



Un oscillateur considéré comme ponctuel se déplace suivant un axe (Ox). L'équation horaire du mouvement selon cet axe est : $x(t) = a \sin(\omega t + \phi)$.

La vitesse instantanée est définie par $v(t) = x'(t) = \dot{x}(t)$

Quelle est l'expression de la vitesse instantanée v du mobile ?



$$a \cos(\omega t + \phi)$$



$$-a\omega \cos(\omega t + \phi)$$



$$a\omega \sin(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$$



$$a\omega \cos(\omega t + \phi)$$



$$a \cos(\omega t + \phi)$$



$$-a\omega \cos(\omega t + \phi)$$



$$a\omega \sin(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$$



$$a\omega \cos(\omega t + \phi)$$



Explication Générale

Raisonnement : ici $x(t)$ est l'analogue de $f(x)$. Pour déterminer $v(t)$, il faut dériver $x(t)$. Il faut donc dériver une fonction trigonométrique.

- On identifie que t est la variable : $x(t) = a \sin(\omega t + \phi)$
- Il faut connaître la dérivée d'une fonction composée : $(\sin(u))' = u' \cos(u)$ avec $u = \omega t + \phi$ et donc $u' = \omega$
- Il faut connaître la dérivée d'une fonction multipliée par une constante : $(k \times v)' = k \times v'$
- On applique la formule de la fonction composée : $a\omega \cos(\omega t + \phi)$
- De plus il faut de plus connaître la formule trigonométrique : $\cos \phi = \sin(\phi + \frac{\pi}{2})$
- On obtient donc : $a\omega \sin(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$



Un oscillateur considéré comme ponctuel se déplace suivant un axe (Ox). L'équation horaire du mouvement selon cet axe est : $x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$

Quelle est la vitesse instantanée $v(t) = x'(t) = \dot{x}(t)$ du mobile?



$-a \sin(\omega t + \phi)$



$-a\omega \cos(\omega t + \phi)$



$a\omega \cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$



$-a\omega \sin(\omega t + \phi)$



$-a \sin(\omega t + \phi)$

Erreur dans la dérivée de la fonction composée $\cos(\omega t)$



$-a\omega \cos(\omega t + \phi)$

La dérivée de la fonction cosinus est -sinus



$a\omega \cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$



$-a\omega \sin(\omega t + \phi)$



Explication Générale

Raisonnement : ici $x(t)$ est l'analogue de $f(x)$. Pour déterminer $v(t)$, il faut dériver $x(t)$. Il faut donc dériver une fonction trigonométrique.

- On identifie que t est la variable : $x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$
- Il faut connaître la dérivée d'une fonction composée : $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$ avec $u = \omega t + \phi$ et donc $u' = \omega$
- Il faut connaître la dérivée d'une fonction multipliée par une constante : $(k \times v)' = k \times v'$
- On applique la formule de la fonction composée : $-a\omega \sin(\omega t + \phi)$
- De plus il faut de plus connaître la formule trigonométrique : $-\sin \phi = \cos(\phi + \frac{\pi}{2})$
- On obtient donc : $a\omega \cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$



Une particule en mouvement sur un axe (Ox) est soumise à une force $F(x) = -kx + \frac{a}{x^3}$

k et a sont deux constantes positives. Le potentiel V est une primitive de $-F$.

Quelle est l'expression du potentiel $V(x)$?



$$k \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{a}{x^2}$$



$$k \frac{x^2}{2} - \frac{a}{4x^4}$$



$$k \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{a}{x^2} + V_0$$



$$k - \frac{a}{4x^4}$$



$$k \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{a}{x^2}$$

Erreur dans le calcul de la primitive de $\frac{a}{x^3}$



$$k \frac{x^2}{2} - \frac{a}{4x^4}$$

Erreur dans le calcul d'une primitive de $\frac{a}{x^3}$



$$k \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{a}{x^2} + V_0$$



$$k - \frac{a}{4x^4}$$

Le calcul d'une primitive est demandé et non celui de la dérivée.



Explication Générale

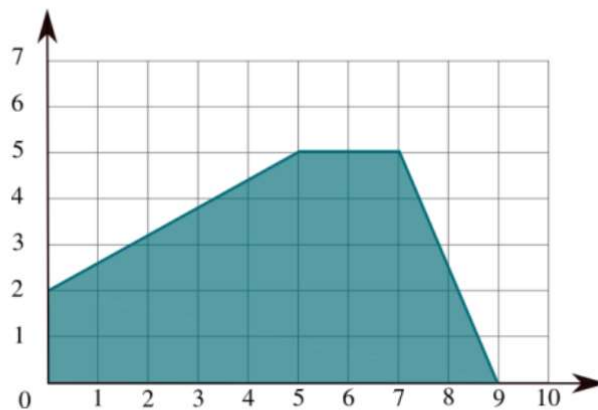
Raisonnement : On identifie que la relation de départ est une somme de deux fonctions $F(x) = u + v$. Il faut ici chercher une primitive de $-F$

Calcul :

- On détermine les primitives de chacun des termes de l'addition :
 - La primitive de $-kx$ est $-0,5kx^2$
 - On rappelle que la primitive d'une fonction de type $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
 - La primitive de $\frac{a}{x^3}$ est $\frac{1}{2}\frac{a}{x^2}$
- On obtient la primitive de $-F(x) : kx - \frac{a}{x^3}$
- On obtient en intégrant : $V(x) = 0,5kx^2 - \frac{1}{2}\frac{a}{x^2}$
- On n'oublie pas qu'une primitive est connu à une constante près : il faut donc déterminer cette constante.
 - On cherche la primitive qui vérifie la condition initiale : $V(0) = V_0$
 - Donc $V(0) = 0,5k \times 0 - \frac{1}{2} \times 0 + K = V_0$
 - Donc la constante $K = V_0$
- On obtient donc le résultat : $V(x) = 0,5kx^2 - \frac{1}{2}\frac{a}{x^2} + V_0$



Sur le graphique ci-dessous représentant une fonction f , quel est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 8 ?



- ☐ $f'(8) = 0$
- ☐ $f'(8) = -\frac{5}{2}$
- ☐ $f'(8) = -\frac{2}{5}$
- ☐ $f'(8) = \frac{5}{2}$

☐ $f'(8) = 0$

Décalage de segment

☒ $f'(8) = -\frac{5}{2}$

☐ $f'(8) = -\frac{2}{5}$

Inversion du coefficient directeur

☐ $f'(8) = \frac{5}{2}$

Faute de signe (attention la droite descend donc le coefficient directeur est négatif)



Explication Générale

Raisonnement : On prend deux points sur le segment où x est compris entre 7 et 9

Les points $(7; 5)$ et $(9; 0)$ donnent le coefficient : $\frac{5-0}{7-9} = -\frac{5}{2}$



Un oscillateur considéré comme ponctuel se déplace suivant un axe (Ox). L'équation horaire du mouvement selon cet axe est : $x(t) = 10 \times e^{-0,1t} \cos(100t)$

Quelle est la vitesse instantanée $v(t) = x'(t) = \dot{x}(t)$ du mobile?

☐ $-10e^{-0,1t}[0, 1 \cos(100t) + 100 \sin(100t)]$

☐ $-10e^{-0,1t}[\cos(100t) + 100 \sin(100t)]$

☐ $-10e^{-0,1t}[0, 1 \cos(100t) + \sin(100t)]$

☐ $e^{-0,1t}100 \sin(100t)$

☐ $-e^{-0,1t}[\cos(100t) + 1000 \sin(100t)]$

☒ $-10e^{-0,1t}[0, 1 \cos(100t) + 100 \sin(100t)]$

☐ $-10e^{-0,1t}[\cos(100t) + 100 \sin(100t)]$

Attention à la dérivée de $e^{-0,1t}$

☐ $-10e^{-0,1t}[0, 1 \cos(100t) + \sin(100t)]$

Attention à la dérivée de $\cos(100t)$

☐ $e^{-0,1t}100 \sin(100t)$

Attention à la dérivée du produit de 2 fonctions

☒ $-e^{-0,1t}[\cos(100t) + 1000 \sin(100t)]$



Explication Générale

Raisonnement :

- On identifie que t est la variable : $x(t) = 10 \times e^{-0,1t} \cos(100t)$
- Il faut connaître la dérivée d'une fonction composée : $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$ et $(e^u)' = u' e^u$
- Il faut connaître la dérivée d'un produit de fonctions : $(uv)' = u'v + uv'$
- On dérive u et v
 - $u = e^{-0,1t}$ donc $(e^{-0,1t})' = -0,1 \cdot e^{-0,1t}$
 - $v = \cos(100t)$ donc $(\cos(100t))' = -100 \sin(100t)$
- On applique la formule de la dérivée d'un produit de fonctions sachant que a une constante :
 $-10 \times 0,1 e^{-0,1t} \cos(100t) - 10 \times 100 e^{-0,1t} \sin(100t)$
- On factorise par $-10e^{-0,1t}$: $-10e^{-0,1t} [0,1 \cos(100t) + 100 \sin(100t)]$
- On peut aussi factoriser que par $e^{-0,1t}$: $-e^{-0,1t} [\cos(100t) + 1000 \sin(100t)]$



Un mobile considéré comme ponctuel se déplace suivant un axe (Ox). La position du mobile (m) en fonction du temps (s) selon cet axe est donnée par la relation $x(t) = -5t^2 + 5t + 2$.

Quelle est la date (en s) pour laquelle le mobile rebrousse chemin?

On dit qu'un objet rebrousse chemin quand il revient en arrière. Au moment où le mobile rebrousse chemin, sa vitesse change de signe (positive à négative).

☐

0,7

☐

0,5

☐

1

☒

0,7

La dérivée de 2 est 0

☒

0,5

☒

1

Erreur dans la dérivée de t^2



Explication Générale

Raisonnement : Le mobile rebrousse chemin lorsque sa vitesse $v(t)$ s'annule. Pour trouver $v(t)$, il faut d'abord dériver $x(t)$ qui est l'analogue de $f(x)$. Il faut donc dériver un polynôme de degré 2.

Calcul :

- On identifie que t est la variable et on reconnaît une somme de fonctions : $x(t) = -5t^2 + 5t + 2$
- On dérive chacune d'entre elles individuellement :
 - $(-5t^2)' = 2 \times (-5)t$
 - $(5t)' = 5$
 - $(2)' = 0$
- On obtient : $v(t) = -5 \times 2t + 5 = -10t + 5$
- Pour $v(t) = 0$, on résout l'équation : $-10t + 5 = 0$ soit : $t = 0,5s$