

Projeter un vecteur

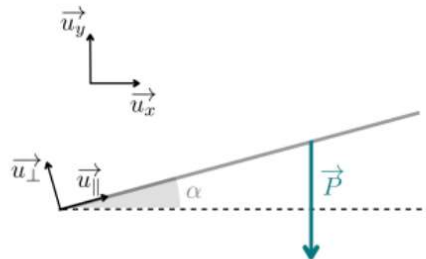


Les composantes du poids

? Exemple

Un mobile de masse m glisse sur une pente faisant un angle α avec l'horizontale

Exprimer les composantes du poids $\vec{P}$ du mobile dans la base $(\vec{u}_{\parallel}, \vec{u}_{\perp})$.

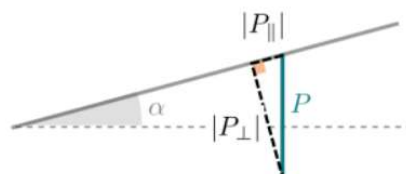


Explication

Le vecteur $\vec{P}$ n'est pas porté par l'un des deux vecteurs de base, il va donc falloir **projeter** ce vecteur. Pour projeter le vecteur $\vec{P}$ on va construire un triangle rectangle dans lequel on pourra appliquer les formules de la trigonométrie.

1. Construire le triangle pour projeter

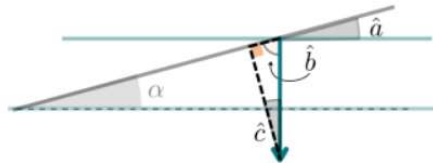
- On **dessine** un triangle rectangle dont
 - L'hypoténuse est le vecteur $\vec{P}$
 - L'un des côtés est parallèle à la pente (et donc colinéaire au vecteur $\vec{u}_{\parallel}$)
 - L'autre côté est perpendiculaire à la pente (et donc colinéaire au vecteur $\vec{u}_{\perp}$)
- On **nomme** les côtés du triangle
 - L'hypoténuse a pour norme $\|\vec{P}\| = P$
 - La valeur absolue de la composante sur $\vec{u}_{\parallel}$ de P ($|P_{\parallel}|$) correspond au petit côté du triangle rectangle de la figure ci dessus.
 - La valeur absolue de la composante sur $\vec{u}_{\perp}$ de P ($|P_{\perp}|$) correspond au grand côté du triangle rectangle de la figure ci dessus.



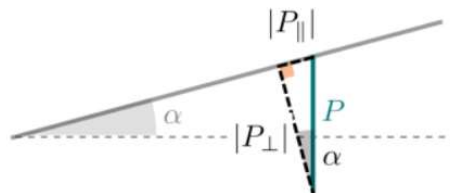
On a : $\vec{P} = P_{\parallel} \vec{u}_{\parallel} + P_{\perp} \vec{u}_{\perp}$ et dans notre cas $P_{\parallel}$ est négatif

2. Déterminer l'angle au sommet du triangle

On détermine les angles dans le triangle rectangle à partir des angles dessinés sur la figure et des angles particuliers :



- Angles particuliers :
 - Angles complémentaires (somme des angles dans un triangle rectangle) : $\hat{b} = \frac{\pi}{2} - \alpha$
 - Angles complémentaires (somme des angles dans un triangle rectangle) : $\hat{c} = \frac{\pi}{2} - \hat{b}$
 - On a donc : $\hat{c} = \alpha$
- On travaille donc dans le triangle rectangle suivant (on garde l'angle dont l'expression est la plus simple) :



3. Appliquer les formules de trigonométrie pour réaliser la projection

- En utilisant les relations de trigonométrie, on obtient l'expression de $P_{\parallel}$ et de $P_{\perp}$:
 - $\cos(\alpha) = \frac{|P_{\perp}|}{P} \Rightarrow |P_{\perp}| = P \cos(\alpha)$
 - $\sin(\alpha) = \frac{|P_{\parallel}|}{P} \Rightarrow |P_{\parallel}| = P \sin(\alpha)$

4. Choisir les signes

- On choisit maintenant les signes :
 - La composante selon $\vec{u}_{\perp}$ de $\vec{P}$ est positive donc $P_{\perp} = +P \cos(\alpha)$
 - La composante selon $\vec{u}_{\parallel}$ de $\vec{P}$ est négative donc $P_{\parallel} = -P \sin(\alpha)$

5. Résultat

- On écrit maintenant le vecteur en fonction des vecteurs de la base :

$$\vec{P} = -P \sin(\alpha) \vec{u}_{\parallel} + P \cos(\alpha) \vec{u}_{\perp}$$

1. **Dessiner le triangle rectangle** le plus pratique :

On commence par dessiner un triangle rectangle dont l'hypoténuse est le vecteur que l'on cherche à projeter et dont les deux autres côtés sont parallèles aux vecteurs de base.

2. **Nommer les côtés** de ce triangle avec les composantes du vecteur à projeter.

3. **Déterminer les mesures des angles** du triangle

On utilise les propriétés des angles particuliers pour trouver les angles de ce triangle rectangle.

4. **Utiliser les relations de trigonométrie**

On utilise les relations de trigonométrie pour trouver l'expression des composantes* en fonction de la norme du vecteur et de l'angle donné dans l'énoncé

5. **Déterminer le signe** de chaque composante

6. **Écrire le résultat**

On écrit le résultat $\vec{V} = \dots \vec{u}_{\dots} + \dots \vec{u}_{\dots}$ en faisant attention aux signes.

* en valeur absolue

Autre méthode

Remarque

Il est aussi possible de passer par le produit scalaire. En effet la composante de $\vec{V}$ sur un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$ est $\vec{V} \cdot \vec{u} = \|\vec{V}\| \times 1 \times \cos(\vec{V}, \vec{u})$ mais déterminer l'angle $(\vec{V}, \vec{u})$ est parfois plus compliqué.