

Quizz : Produit scalaire



Dans la base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$. On définit les vecteurs $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{N}$ et $\overrightarrow{OX}$ définis par leurs composantes :

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}, \vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ +mg \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} -kx \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les vecteurs horizontaux ?

☐

$\vec{P}$

☐

$\vec{R}$

☐

$\overrightarrow{OX}$

☐

$\vec{N}$

☒

$\vec{P}$

La composante selon x de ce vecteur est nulle (première composante) : ce vecteur est donc vertical.

☒

$\vec{R}$

☒

$\overrightarrow{OX}$

☒

$\vec{N}$

La composante selon x de ce vecteur est nulle (première composante) : ce vecteur est donc vertical.



Explication Générale

À savoir : À 2D, quand l'une des composantes est nulle, le vecteur est porté par une droite parallèle à l'un des axes. La première composante correspond à l'axe horizontal (axe des x) et la deuxième composante correspond à l'axe vertical (axe des y).

- $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$ et $\vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ +mg \end{pmatrix}$ sont des vecteurs verticaux.
- $\vec{R} = \begin{pmatrix} -kx \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs horizontaux.



Soient deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$ dans R^3 .

Quelles sont, par définition, les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$?



$$\begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} v_x - w_x \\ v_y - w_y \\ v_z - w_z \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix}$$



$$v_x \times w_x + v_y \times w_y + v_z \times w_z$$



$$\begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} v_x - w_x \\ v_y - w_y \\ v_z - w_z \end{pmatrix}$$

C'est $\vec{v} - \vec{w}$.



$$\begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix}$$

C'est le produit vectoriel.



$$v_x \times w_x + v_y \times w_y + v_z \times w_z$$

C'est le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{w}$.



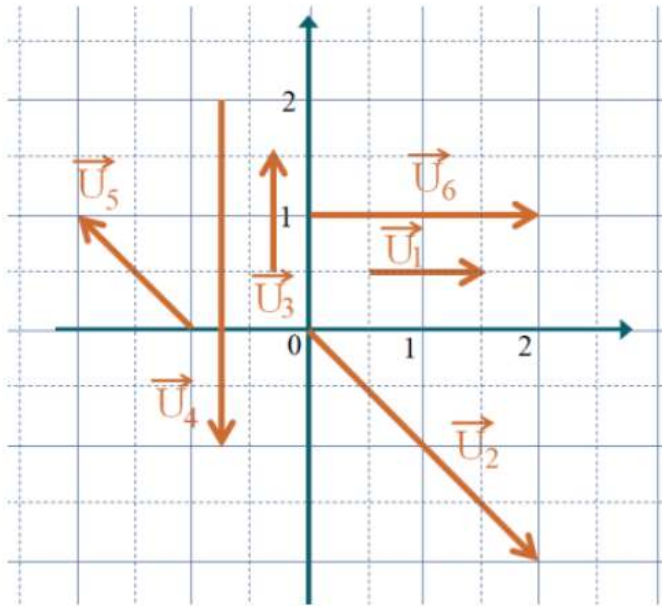
Explication Générale

À savoir : Les coordonnées de $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ sont donnés par : $\begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{pmatrix}$.



On considère les vecteurs représentés sur le schéma.

Quels sont les produits scalaires dont la valeur est égale à 2 ?



☐ $\vec{U_5} \cdot \vec{U_6}$

☐ $\vec{U_2} \cdot \vec{U_5}$

☐ $\vec{U_1} \cdot \vec{U_2}$

☐ $\vec{U_1} \cdot \vec{U_5}$

☐ $\vec{U_1} \cdot \vec{U_6}$

■ $\vec{U}_5 \cdot \vec{U}_6$

L'angle entre les deux vecteurs est obtus donc le produit scalaire est forcément négatif.

Prouvons le par le calcul : on lit sur le graphique que $\vec{U}_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{U}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a donc : $\vec{U}_5 \cdot \vec{U}_1 = (-1) \times 1 + 1 \times 0 = -1$.

■ $\vec{U}_2 \cdot \vec{U}_5$

Ces deux vecteurs sont colinéaires mais de sens opposés, le produit scalaire est négatif.

Prouvons le par le calcul. On lit sur le graphique que $\vec{U}_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{U}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Donc $\vec{U}_2 \cdot \vec{U}_5 = 2 \times 1 + (-2) \times (-1) = 4 + 2 = 0$.

✓ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2$

■ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_5$

Ces deux vecteurs sont de sens opposé : leur produit scalaire est donc nécessairement négatif.

On lit sur le graphique que $\vec{U}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{U}_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\vec{U}_3 \cdot \vec{U}_5 = 0 \times (-1) + (-3) \times 1 = -3$.

✓ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_6$



Explication Générale

On cherche un produit scalaire positif : il faut que les deux vecteurs impliqués soient dans le même sens.

Parmi les propositions, c'est donc uniquement possible pour : $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2$ et $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_6$.

On calcule alors ces deux produits scalaires :

On lit sur le graphique les coordonnées suivantes :

$$\vec{U}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{U}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{U}_6 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme nous sommes dans un repère orthonormé on en déduit :

- $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 = 2 \times 1 + (-2) \times 0 = 2$;
- $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_6 = 1 \times 2 + 0 \times 0 = 2$.



Soit deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans l'espace, de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Que vaut le produit scalaire $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$?

☐ 7

☐ 1

☐ 6

☐ 0

☒ 7

☐ 1

Attention à ne pas additionner toutes les coordonnées.

☐ 6

Il faut multiplier terme à terme.

☐ 0

Attention à ne pas multiplier toutes les coordonnées.



Explication Générale

On calcule le produit scalaire en effectuant $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + (-2) \times (-3) + 4 \times 0 = 1 + 6 = 7$.



Le travail (en J) effectuée par une force uniforme $\vec{F}$ (norme en N) appliquée en un solide ponctuel M, lors d'un déplacement $\vec{l}$ (en m) est égal au produit scalaire $\vec{F} \cdot \vec{l}$.

Calculer le travail d'une force de norme 2 N qui déplace son point d'application de 30 cm, l'angle entre $\vec{F}$ et $\vec{l}$ étant de 120° .

☐ -30 J

☐ 30 J

☐ 0,3 J

☐ -0,3 J

☐ ☒ -30 J

Attention aux unités !

☐ ☒ 30 J

Attention aux unités et au signe du cosinus !

☐ ☒ 0,3 J

Attention au signe du cosinus !

☐ ☒ -0,3 J



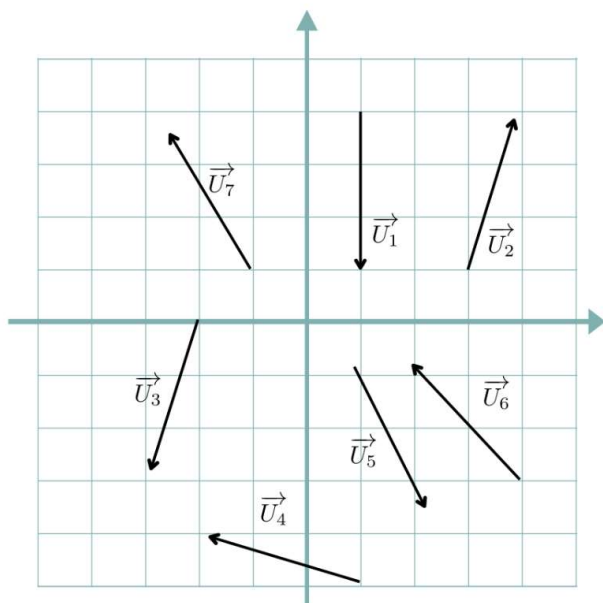
Explication Générale

$$\vec{F} \cdot \vec{l} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{l}\| \cos(120^\circ) = 2 * 0,3 * (-0,5) = -0,3 J$$



Les vecteurs représentés ci-dessous ont tous la même norme.

Parmi les produits scalaires suivants, lequel est le plus petit ?



☐ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2$

☐ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_5$

☐ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_6$

☐ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_3$

☒ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2$

L'angle entre $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ est strictement supérieur à 90° (le cos sera négatif) et c'est entre ces deux vecteurs que l'angle est le plus grand.

☐ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_5$

L'angle entre $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_5$ est inférieur à 90° . Le cos sera positif.

☐ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_6$

L'angle entre $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_6$ est $> 90^\circ$ (le cos sera négatif). Le produit scalaire sera négatif, mais l'angle entre ces vecteurs n'est pas le plus grand (ie proche de 180°).

☐ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_3$

L'angle entre $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_3$ est $< 90^\circ$. Le cos sera positif.



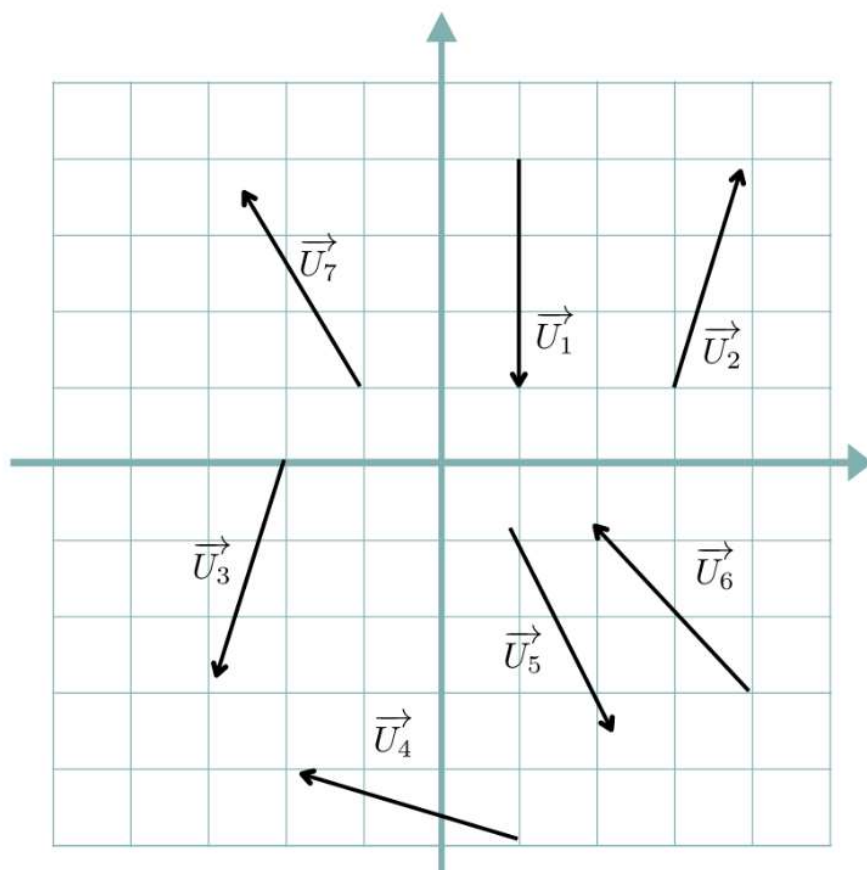
Explication Générale

Des propositions données, seuls $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2$ et $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_6$ sont négatifs. Par contre, l'angle entre $(\vec{U}_1)$ et $\vec{U}_2$ est plus grand que celui entre $(\vec{U}_1)$ et $\vec{U}_6$. Donc $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 < \vec{U}_1 \cdot \vec{U}_6$.



Soient les vecteurs représentés ci-dessous. Ils ont tous la même norme.

Parmi les produits scalaires suivants, lequel(s) est (sont) le(s) plus grand(s) ?



☐ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_4$

☐ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_7$

☐ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_3$

☐ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_5$

☐ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2$

☒ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_4$

L'angle entre $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_4$ est obtus, le produit scalaire sera négatif.

☒ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_7$

L'angle entre $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_7$ est obtus, le produit scalaire sera négatif.

☒ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_3$

L'angle entre $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_3$ est le plus petit parmi les solutions proposées, le produit scalaire sera le plus grand.

☒ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_5$

L'angle entre $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_5$ est le plus petit parmi les solutions proposées, le produit scalaire sera le plus grand.

☒ $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2$

L'angle entre $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ est obtus, le produit scalaire sera négatif.

Explication Générale

Comme les vecteurs ont la même norme, il suffit de comparer les angles entre les vecteurs. Le produit scalaire le plus élevé sera celui pour lequel l'angle est aigu (le cosinus sera strictement positif) et le plus petit possible (le cosinus sera le plus grand). L'angle entre $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_3$ est le même que celui entre $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_5$. Les deux réponses sont justes.



On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de norme non nulle. On appelle angle α l'angle non orienté entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dans quel(s) cas a-t-on le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ égal à 0 ?

☐

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction et le même sens.

☐

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction mais sont de sens opposés.

☐

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.

☐

$\vec{u} = -\vec{v}$

☐

$\vec{u} = \vec{v}$



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction et le même sens.

Dans ce cas $\cos(\alpha) = 1$, et le produit scalaire donne $||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$ qui est non nul car les deux vecteurs sont de norme non nulle.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction mais sont de sens opposés.

Dans ce cas $\cos(\alpha) = -1$, et le produit scalaire donne $-||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$, qui est non nul car les deux vecteurs sont de norme non nulle.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.

Dans ce cas $\cos(\alpha) = 0$, et le produit scalaire vaut 0.



$\vec{u} = -\vec{v}$

Dans ce cas $\cos(\alpha) = -1$, et le produit scalaire donne $-||\vec{u}||^2$.



$\vec{u} = \vec{v}$

Dans ce cas le produit scalaire donne $||\vec{u}||^2$ car $\cos(\alpha) = 1$.



Explication Générale

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est donné par $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| ||\vec{v}|| \cos((\vec{u}, \vec{v}))$.

Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de norme non nulle, le seul cas où le produit scalaire s'annule est le cas où $\cos((\vec{u}, \vec{v})) = 0$, c'est-à-dire le cas où les deux vecteurs sont orthogonaux.