

Test de rentrée : Calculs numériques et algébriques

Développer et factoriser + Identités remarquables :

Question 1 :

Développer et factoriser l'expression : $A = (3 + 2x)(x - 3) - (3x - 2)(x - 3)$

Solution 1 :

Forme développer réduite :

$$A = (3x - 9 + 2x^2 - 6x) - (3x^2 - 9x - 2x + 6) = -x^2 + 8x - 15$$

$$\text{Forme factoriser : } A = (x - 3)(3 + 2x - 3x + 2) = (x - 3)(5 - x)$$

0.5 point par bonne réponse

Question 2 :

Développer : $B = (2x - 3)^2$

Factoriser : $C = 4x^2 - 25$

Solution 2 :

$$B = (2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + (3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$\text{rappel } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$C = 4x^2 - 25 = (2x)^2 - (5)^2 = (2x + 5)(2x - 5)$$

$$\text{rappel } a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

0.5 point par bonne réponse

Calculer avec des fractions :

Question 3 :

Utiliser la quantité conjuguée pour simplifier $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$

Solution 3 :

$$\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$$

1 point pour la bonne réponse

Calculer avec des puissances :

Question 4 : Simplifier

$$5^n \times 3^n =$$

$$\frac{2}{4^n} =$$

Solution 4 :

$$5^n \times 3^n = (5 \times 3)^n = 15^n$$

$$\text{rappel : } a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$\frac{2}{4^n} = \frac{2}{(2^2)^n} = \frac{2}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n-1}} = 2^{-2n+1}$$

$$\text{rappel : } \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

0.5 point par bonne réponse

Calculer avec des racines carrées :

Question 5 : Simplifier (avec a et b des nombres réels strictement positifs)

$$\sqrt{81a^5b} =$$

$$3\sqrt{5a} \times 8\sqrt{35a^2} =$$

Solution 5 :

$$\sqrt{81a^5b} = 9a^2\sqrt{ab} \quad \text{rappel : } \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \text{ et } \sqrt{a^2} = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a \leq 0 \end{cases}$$

$$3\sqrt{5a} \times 8\sqrt{35a^2} = 120a\sqrt{7a}$$

0.5 point par bonne réponse

Résoudre une équation du premier degré :

Question 6 :

La somme des âges de Marie, de sa mère et de sa grand-mère est 90 ans. La grand-mère a le double de l'âge de la mère et l'âge de Marie est le tiers de celui de sa mère. Quel est l'âge de chacune ?

Solution 6 : Posons x l'âge de la mère, alors l'âge de la grand-mère est $2x$ et l'âge de Marie est $\frac{x}{3}$.

Sachant que la somme des âges est 90 ans, il vient :

$$x + 2x + \frac{x}{3} = 90$$

$$\frac{10}{3}x = 90$$

$x = 27$ donc la mère a 27 ans, Marie a 9 ans et la grand-mère a 54 ans

0.5 point pour l'âge de Marie et 0.5 point pour l'âge de la grand-mère

Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{R}$:

Question 7 :

Quelles sont les dimensions d'un rectangle dont le périmètre est 34 cm et dont l'aire est 60 cm² ?

Solution 7 :

Nommons l la largeur et L la longueur, d'après l'énoncé on a :

$$\begin{cases} 2l + 2L = 34 \\ lL = 60 \end{cases} \quad \begin{cases} l + L = 17 \\ l(17 - l) = 60 \end{cases} \quad \begin{cases} l + L = 17 \\ -l^2 + 17l - 60 = 0 \end{cases}$$

Méthode utilisant le discriminant : on avait $-l^2 + 17l - 60 = 0$

$$\Delta = 17^2 - 4 \times (-1) \times (-60) = 289 - 240 = 49 \text{ donc 2 racines } x_1 = \frac{-17+7}{-2} = 5 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-17-7}{-2} = 12$$

Méthode utilisant la forme canonique : $l^2 - 17l + 60 = 0$

$$\left(l - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{17^2}{2^2} + 60 = 0$$

$$\left(l - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{289}{4} + \frac{240}{4} = 0$$

$$\left(l - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = 0$$

$$\left(l - \frac{17}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(l - \frac{17}{2} - \frac{7}{2}\right)\left(l - \frac{17}{2} + \frac{7}{2}\right) = 0$$

$(l - 12)(l - 5) = 0$ les solutions sont 12 et 5, le rectangle mesure 12 cm sur 5 cm.

1 point pour la bonne réponse

Résoudre une inéquation dans $\mathbb{R}$:

Question 8 :

Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation : $\frac{x^2-3x+2}{x^2+x+1} \geq 0$

Solution 8 :

$x^2 + x + 1 > 0$ (car $\Delta = -3$ pas de solution dans $\mathbb{R}$, le polynôme est du « signe de a » donc positif)

L'expression est du signe de $x^2 - 3x + 2$: $\Delta = 9 - 8 = 1$ ce polynôme admet deux racines réelles

$x_1 = 2$ et $x_2 = 1$ Le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines d'où

$$S =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$$

1 point pour la bonne réponse

Valeur absolue

Question 9 :

Quel est l'ensemble de solution pour l'inégalité $|x - 10| \geq 1$

Solution 9 :

Si $x - 10 \geq 0$, $|x - 10| = x - 10$ d'où $x - 10 \geq 1$ d'où $x \geq 11$

Si $x - 10 \leq 0$, $|x - 10| = -x + 10$ d'où $-x + 10 \geq 1$ d'où $x \leq 9$

$$\text{Donc } S =]-\infty; 9] \cup [11; +\infty[$$

1 point pour la bonne réponse

Calculer avec des exponentielles et des logarithmes

Question 10 : calculer avec des logarithmes et des exponentielles

Le réel $\ln(4\sqrt{2})$ est égal à :

- a) $\ln(\sqrt{2})^4$
- b) $\frac{5}{2} \ln 2$
- c) $\ln 4 \times \ln \sqrt{2}$
- d) Aucune des propositions n'est juste

Solution 10 : Réponse **b)** $\ln(4\sqrt{2}) = \ln 4 + \ln \sqrt{2}$ car $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

$$\ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2 \quad \text{et} \quad \ln \sqrt{2} = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 2 \quad \text{car} \quad \ln a^n = n \ln a$$

$$\text{Il vient } \ln(4\sqrt{2}) = 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{5}{2} \ln 2$$

1 point pour la bonne réponse