

Applications et Exercices Chapitre Vecteurs

Partie 1 - Vecteurs dans le plan

Exercice 1 : Savoir calculer les coordonnées d'un vecteur, la norme, les coordonnées du milieu d'un segment, colinéarité, produit scalaire, dans le plan :

Soient deux points du plan $A(1; 2)$ et $B(-1; -2)$

- Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$
- Représenter ce vecteur dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- Déterminer la distance AB .

Soient deux points du plan $C(1; 0)$ et $D(2; 2)$

- Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$
- Représenter ce vecteur dans le repère précédent.
- Déterminer la distance CD .
- Que peut – on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$?
- Que peut – on dire des droites (AB) et (CD) ?
- Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.
- Que peut – on dire des vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{CD}$, que peut – on conclure concernant $IADC$?
- Déterminer $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$ que peut – on conclure de ce résultat ?
- Déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ comparer le résultat avec $AB \times CD$ que peut-on conclure ?

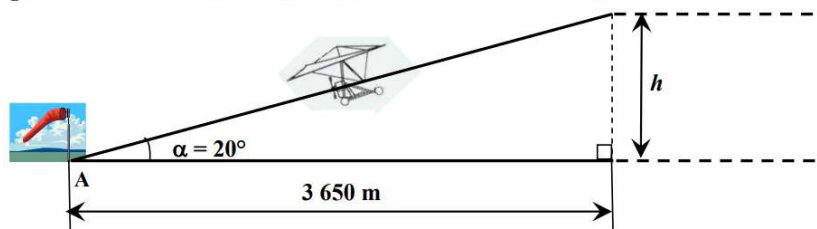
Exercice 2 :

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm, on donne les points :
 $M(4; 3)$; $N(-4; -3)$ et $P(-3; 4)$

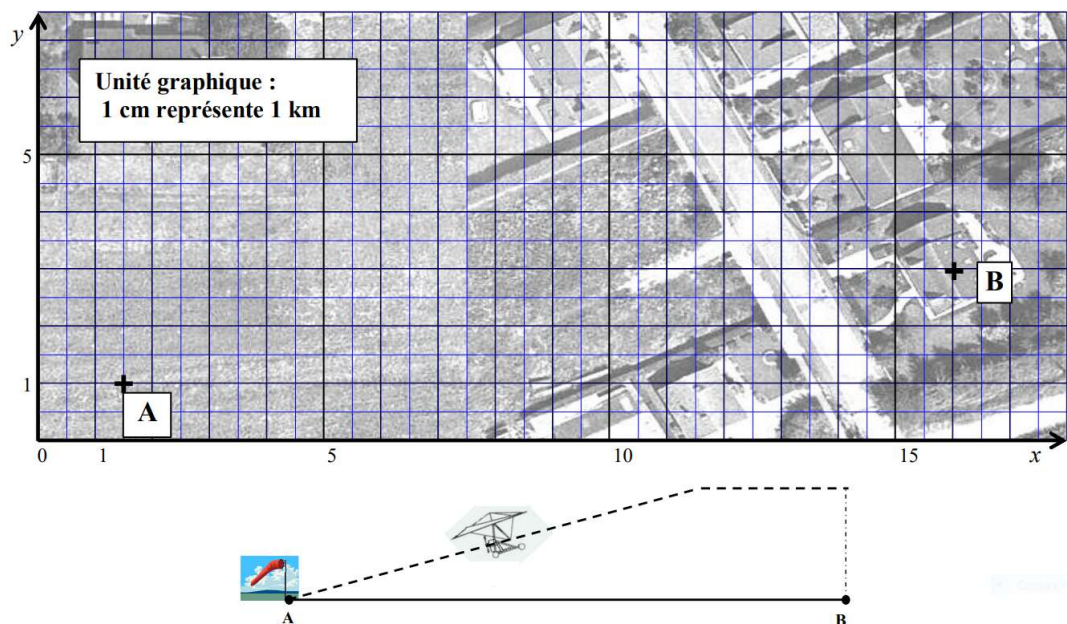
- 1) **Calculer** les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PM}$; $\overrightarrow{PN}$; $\overrightarrow{MN}$.
- 2) **Calculer** la norme de ces vecteurs.
- 3) **Montrer** que le triangle MNP est un triangle rectangle inscrit dans un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 3 - application 1 :

1) Au décollage, l'angle d'ascension d'un ULM est de 20° par rapport à l'horizontale. L'ULM monte régulièrement. À l'aide du schéma ci-dessous, **calculer**, en mètre, l'altitude h par rapport au sol que l'ULM atteint. **Justifier** les calculs. **Arrondir** la valeur à l'unité.



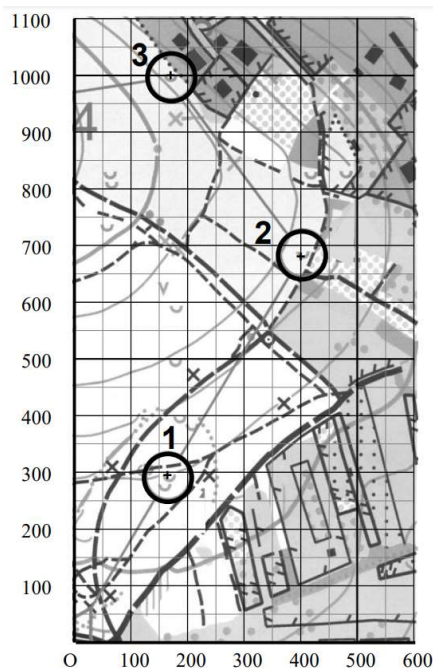
2) Lors d'un vol, l'ULM décolle du point A et se rend en ligne droite jusqu'à la verticale du point $B(16; 3)$ qui est au sol. En utilisant le repère, **indiquer** les coordonnées du point A .



- 3) Calculer la distance réelle AB au sol en Km
- 4) Arrivé à la verticale du point B, l'ULM poursuit son vol en faisant un virage à gauche et rejoint la verticale du point C, Placer le point C sur le repère sachant que le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Tracer le vecteur $\overrightarrow{BC}$. Calculer BC.
- 5) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CA}$ et calculer la distance réelle au sol CA.
- 6) Calculer la distance réelle au sol parcourue par l'ULM lors de ce vol (en km).

Exercice 4 - application 2 :

Le plan ci-dessous est extrait d'une carte de course d'orientation. L'échelle est de 1/10 000. Signification : 1 cm sur la carte représente 100 m sur le terrain.



poste ① : $P_1(170 ; 290)$;
 $A(440 ; 440)$;
 $B(330 ; 540)$;
 poste ② : $P_2(400 ; 680)$.

1) Calculer la distance réelle au sol entre le poste P_1 et le poste P_2 en mètre.

2) A) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{P_1A}$ et $\overrightarrow{AB}$

B) Calculer $\|\overrightarrow{P_1A}\|$

C) Calculer $\|\overrightarrow{P_1A}\| + \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BP_2}\|$

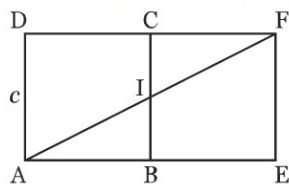
3) Le résultat du calcul de la question 2) c) est la mesure de la distance réelle P_1P_2 parcourue par un orienteur débutant. **Calculer** la différence entre cette distance réelle parcourue par cet orienteur et la distance P_1P_2 à vol d'oiseau.

Exprimer cette différence en pourcentage par rapport à la distance à vol d'oiseau. **Arrondir** la valeur au dixième.

Produit scalaire dans le plan :

Exercice 5 : Produit scalaire

Les côtés des carrés accolés ABCD et BEFC ont pour longueur non nulle c . I est l'intersection des segments $[AF]$ et $[BC]$. Utiliser trois différentes expressions du produit scalaire pour calculer $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AI}$.



Méthode :

1. On utilise la formule trigonométrique : on doit donc calculer les longueurs et la mesure de l'angle qui nous intéressent.
2. On utilise la formule du projeté orthogonal : B est le projeté orthogonal de I sur la droite (AE) .
3. On utilise la formule avec les coordonnées : pour cela, on choisit un repère orthonormé adapté à la situation.

Exercice 6 : Utiliser la formule adaptée :

Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le triangle ABC.

1. $AB = 5$, $AC = 4\sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$.
2. $AB = 5$ et $AH = 4$ où H est le pied de la hauteur issue de C. De plus, $H \in [AB]$.
3. $A(-1 ; -1)$, $B(4 ; -1)$ et $C(3 ; 3)$ dans un repère orthonormé.

Méthode :

On choisit la formule du produit scalaire la plus adaptée en analysant la configuration :

1. trigonométrique lorsque les angles de la configuration sont connus ;
2. le projeté orthogonal dans une configuration comprenant des angles droits ;
3. dans un repère lorsque des coordonnées sont connues ou calculables.

Exercice 7 :

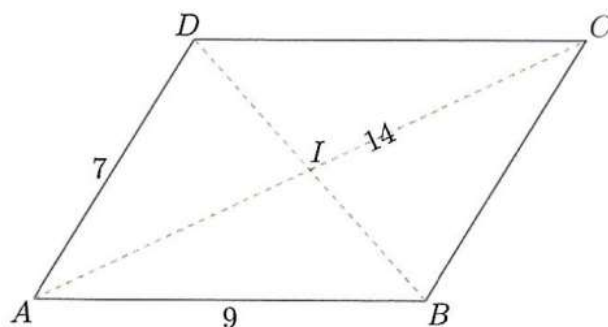
On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On rappelle les identités de « polarisation » suivantes (qui permettent de calculer des produits scalaires juste à partir de normes) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right) \\ \frac{1}{4} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right) \end{cases}$$

On considère un parallélogramme $ABCD$ avec $AB = 9$, $AD = 7$ et $AC = 14$.

1. Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ avec la première identité de polarisation. En déduire une mesure de l'angle $(\vec{AB}, \vec{AD})$.
2. Exploiter le même produit scalaire que précédemment $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ mais avec la deuxième identité de polarisation pour en déduire la longueur DB .
3. On note I le centre du parallélogramme. Calculer le produit scalaire $\vec{IB} \cdot \vec{IC}$ avec la troisième identité de polarisation. En déduire une mesure de l'angle $(\vec{IB}, \vec{IC})$.



Partie 2 - Vecteurs dans l'espace :

Exercice 8 :

1) On donne les points $A(5 ; 2 ; 1)$, $B(7 ; 3 ; 1)$, $C(-1 ; 4 ; 5)$ et $D(-3 ; 3 ; 5)$. Démontrer que A, B, C et D sont coplanaires.

2) Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

3) Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 9 :

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ (toutes les arêtes ont même longueur $a = 1$, toutes les faces sont des triangles équilatéraux). On note P, Q, R, S, U et V les milieux respectifs des arêtes $[AB], [BC], [CD], [DA], [AC]$ et $[BD]$. On note H le centre de gravité de la face BCD et G celui du tétraèdre $ABCD$.

1. Démontrer que des arêtes opposées du tétraèdre sont orthogonales.
2. La droite (AH) est-elle perpendiculaire au plan (BCD) ? Calculer AH .
3. Démontrer que $\vec{AG} = \frac{3}{4}\vec{AH}$ et calculer AG .
4. Déterminer une mesure de l'angle au centre du tétraèdre $\alpha = (\vec{GA}, \vec{GB})$.

Exercice 10 : Sujet BAC :

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 2; 4)$ et $C(-1; 1; 1)$.

- 1) a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
b) Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
c) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.
- 2) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
a) Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
- 3) Soient $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.
a) Démontrer que le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.
b) Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
c) Soit la droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

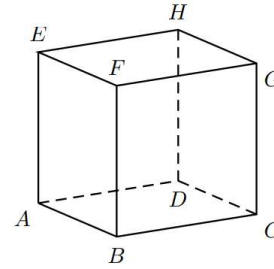
Démontrer que $\mathcal{D}$ est la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

- 4) Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 11 : Sujet BAC :

On considère un cube $ABCDEFGH$.

- 1) a) Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.
- b) En déduire que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
- c) On admet que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.
Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE) .



- 2) L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
 - a) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.
 - b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE) .
 - c) On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Calculer le volume de la pyramide $BDEG$.

Exercice 12 - Sujet BAC :

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, considère les points :
 $A(2;0;3)$, $B(0;2;1)$, $C(-1;-1;2)$ et $D(3;-3;-1)$.

1. Calcul d'un angle

- 1.a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.
- 1.b. Calculer les longueurs AB et AC .
- 1.c. À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.

2. Calcul d'une aire

- 2.a. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB) .
- 2.b. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .
- 2.c. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB) c'est à dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathcal{P}$.
- 2.d. Calculer l'aire du triangle ABC .

3. Calcul d'un volume

- 3.a. Soit le point $F(1;-1;3)$. Montrer que les points A , B , C et F sont coplanaires.
- 3.b. Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC) .
- 3.c. Sachant que le volume d'un tétraèdre est le tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Partie 3 : Analyse vectorielle :

Exercice 13 :

On définit $f(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$, calculer $\overrightarrow{\text{grad}} f(M)$.

On choisit un point M de la sphère de centre $\Omega = (a, b, c)$, représenter graphiquement le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f(M)$.

Exercice 14 :

Donner l'équation d'un plan sous la forme $f(x, y, z) = c$ et calculer $\overrightarrow{\text{grad}} f$.

Exercice 15 :

Soit $\vec{V} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix}$, montrer que $\text{rot } \vec{V} = 2\omega \vec{k}$

Exercice 16 :

On définit un champ de vecteurs de composante $\vec{V} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$ avec α une constante. Calculer $\text{div } \vec{V}$

Exercice 17 :

Si α est une constante réelle, et si f et g sont deux fonctions qui admettent des dérivées partielles secondes, démontrer les propriétés suivantes :

$$\Delta (f + g) = \Delta f + \Delta g$$

$$\Delta (\alpha f) = \alpha \Delta f$$

$$\text{div } \overrightarrow{\text{grad}} f = \Delta f$$

Exercice 18 :

Si α est une constante réelle, et si f et g sont deux fonctions différentiables, démontrer les propriétés suivantes :

$$\overrightarrow{\text{grad}} (f + g) = \overrightarrow{\text{grad}} f + \overrightarrow{\text{grad}} g$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} (\alpha f) = \alpha \overrightarrow{\text{grad}} f$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} (fg) = f \overrightarrow{\text{grad}} g + g \overrightarrow{\text{grad}} f$$

Exercice 19 :

Pour $(x; y) \neq (0; 0)$, on définit $f(x; y) = (\sqrt{x^2 + y^2})^n$ et on note $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Monter que $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) = nr^{n-2} \overrightarrow{OM}$

Exercice 20 : Gradient en coordonnées polaires

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si r et θ sont les coordonnées polaires d'un point M de $\mathbf{R}^2$, différent de O , on définit les vecteurs

$$\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}, \quad \vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

Si f est une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, différentiable en M , on définit la fonction g par $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Montrer que le gradient s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \vec{u} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \vec{v}$$

Pour ce faire on pourra utiliser les règles de dérivation des fonctions composées pour calculer les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de f , puis en déduire les dérivées partielles de f en fonction de celles de g et enfin remplacer dans l'expression du gradient.

Exercice 21 :

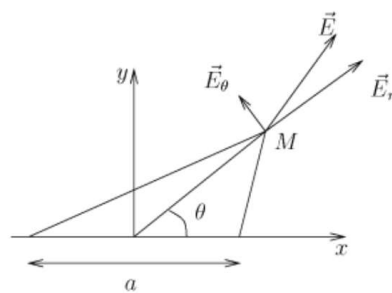
Le potentiel V d'un dipôle électrique est donné à grande distance par l'expression :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \theta}{r^2}$$

Le champ électrique est donné par :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$$

Déterminer les composantes $\vec{E}_r, \vec{E}_\theta$. Voir figure.



dipole

Exercice 22 : gradient en coordonnées cylindriques

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Si r , θ et z sont les coordonnées cylindriques d'un point M de $\mathbf{R}^3$ n'appartenant pas à Oz , on définit les vecteurs

$$\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}, \quad \vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

Si f est une fonction de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$, différentiable en M , on définit la fonction g par

$$g(r, \theta, z) = f(r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

Représenter sur une figure le point M et les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{u}, \vec{v}$.

Montrer l'expression du gradient suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) = \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta, z) \vec{u} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta, z) \vec{v} + \frac{\partial g}{\partial z}(r, \theta, z) \vec{k}$$

Exercice 23 :

Si f est une fonction différentiable, si α est une constante, si $\vec{V}, \vec{V}_1, \vec{V}_2$ sont des champs de vecteurs différentiables, démontrer les relations suivantes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}_1) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}_2),$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\alpha \vec{V}) = \alpha \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}),$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{V}) = f \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{V}$$

Exercice 24 :

Montrer que si f et g sont 2 fonctions différentiables qui vérifient

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \overrightarrow{\text{grad}} g,$$

alors $f - g = c$ où c est une constante.

Exercice 25 :

Montrer que le champ de vecteur $\vec{V} = (y, x + z, y + 2z)$ dérive d'un potentiel, calculer ce potentiel.

Réponse : $f(x, y, z) = xy + zy + z^2 + c$.

Exercice 26 :

Si f est une fonction différentiable, si α est une constante, si $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ sont des champs de vecteurs différentiables, montrer les relations suivantes :

$$\operatorname{div} (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \operatorname{div} (\vec{V}_1) + \operatorname{div} (\vec{V}_2),$$

$$\operatorname{div} (\alpha \vec{V}) = \alpha \operatorname{div} (\vec{V}),$$

$$\operatorname{div} (f \vec{V}) = f \operatorname{div} (\vec{V}) + \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot \vec{V}$$

$$\operatorname{div} (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_2 \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V}_1 - \vec{V}_1 \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V}_2$$

Exercice 27 :

Montrer que $\operatorname{div} (f \overrightarrow{\operatorname{grad}} g - g \overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = f \Delta g - g \Delta f$

Exercice 28 :

Montrer que :

$$\vec{\Delta} \vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{V}) - \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V}.$$

Exercice 29 :

Les équations de Maxwell dans un milieu isotrope non conducteur sans charge sont données par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{H} = 0 \end{cases}$$

où $\vec{E}$ est le champ électrique et $\vec{H}$ est le champ magnétique.

En utilisant $\overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E})$, montrer que l'on obtient :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\mu \epsilon} \vec{\Delta} \vec{E} = \vec{0}$$

Exercice 30 : Laplacien en coordonnées polaires

Si r, θ sont les coordonnées polaires d'un point M de $\mathbf{R}^2$ ($M \neq O$), si f est une fonction de 2 variables qui admet des dérivées secondes, on définit la fonction g par

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Exprimer les dérivées partielles premières de g à l'aide des dérivées partielles de f .

Calculer les dérivées partielles de g_1, g_2 par rapport à r et θ à l'aide des dérivées secondes de g .

Exercice 31 : Laplacien en coordonnées cylindriques

Si r, θ, z sont les coordonnées cylindriques d'un point M de $\mathbf{R}^3$ ($M \notin Oz$), si f est une fonction de 3 variables qui admet des dérivées partielles secondes, si on définit la fonction g par $g(r, \theta, z) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$, montrer alors que l'on a l'expression du laplacien :

$$\Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta, z) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta, z) + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(r, \theta, z)$$

Exercice 32 :

1. Dans le plan on définit la fonction suivante pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- 1) Calculer le laplacien de f en utilisant les coordonnées cartésiennes .
- 2) Calculer le laplacien de f en utilisant les coordonnées polaires

Exercice 33 :

Dans l'espace on définit la fonction suivante pour $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

- 1) Calculer le laplacien de f en utilisant les coordonnées cartésiennes.
- 2) Calculer le laplacien de f en utilisant les coordonnées sphériques

Exercice 34 :

Pour $M \neq O$ on définit $f(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$. Utiliser l'expression du laplacien en coordonnées sphériques pour montrer que $\Delta f(M) = 0$.