

Applications et Exercices corrigés Chapitre Vecteurs

Partie 1 - Vecteurs dans le plan

Exercice 1 : Savoir calculer les coordonnées d'un vecteur, la norme, les coordonnées du milieu d'un segment, colinéarité, produit scalaire, dans le plan :

Soient deux points du plan $A(1; 2)$ et $B(-1; -2)$

- Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$
- Représenter ce vecteur dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- Déterminer la distance AB .

Soient deux points du plan $C(1; 0)$ et $D(2; 2)$

- Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$
- Représenter ce vecteur dans le repère précédent.
- Déterminer la distance CD .
- Que peut – on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$?
- Que peut – on dire des droites (AB) et (CD) ?
- Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.
- Que peut – on dire des vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{CD}$, que peut – on conclure concernant $IADC$?
- Déterminer $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$ que peut – on conclure de ce résultat ?
- Déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ comparer le résultat avec $AB \times CD$ que peut-on conclure ?

Solution exo 1 :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1-1 \\ -2-2 \end{pmatrix} \text{ d'où } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = \sqrt{5 \times 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-0 \end{pmatrix} \text{ d'où } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$CD = \|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

On a $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Les vecteurs sont colinéaires, donc ils ont même direction, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Les coordonnées de I sont $(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2})$ d'où $(0; 0)$ les points O et I sont confondus.

$\overrightarrow{IA} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on a vu précédemment $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, donc $IADC$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2+2 \\ -4+4 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a donc $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$ on conclut que les vecteurs sont colinéaires, que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = x_{\overrightarrow{AB}}x_{\overrightarrow{CD}} + y_{\overrightarrow{AB}}y_{\overrightarrow{CD}} = -2 \times 1 - 4 \times 2 = -10$$

D'après ce qui précède on a $AB \times CD = 2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 10$ on peut en conclure que les vecteurs ont même direction et un sens opposé, car une autre expression du produit scalaire est $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ d'où $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -1$ ce qui correspond à $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \pi + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), ils sont colinéaires et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 2 :

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm, on donne les points :

$$M(4; 3); N(-4; -3) \text{ et } P(-3; 4)$$

- 1) **Calculer** les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PM}$; $\overrightarrow{PN}$; $\overrightarrow{MN}$.
- 2) **Calculer** la norme de ces vecteurs.
- 3) **Montrer** que le triangle MNP est un triangle rectangle inscrit dans un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Solution Exercice 2 :

Questions 1 et 2 :

$$\overrightarrow{PM} \begin{pmatrix} x_M - x_P \\ y_M - y_P \end{pmatrix} \text{ d'où } \overrightarrow{PM} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \|\overrightarrow{PM}\| = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{PN} \begin{pmatrix} x_N - x_P \\ y_N - y_P \end{pmatrix} \text{ d'où } \overrightarrow{PN} \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix} \text{ et } \|\overrightarrow{PN}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = 5\sqrt{2}$$

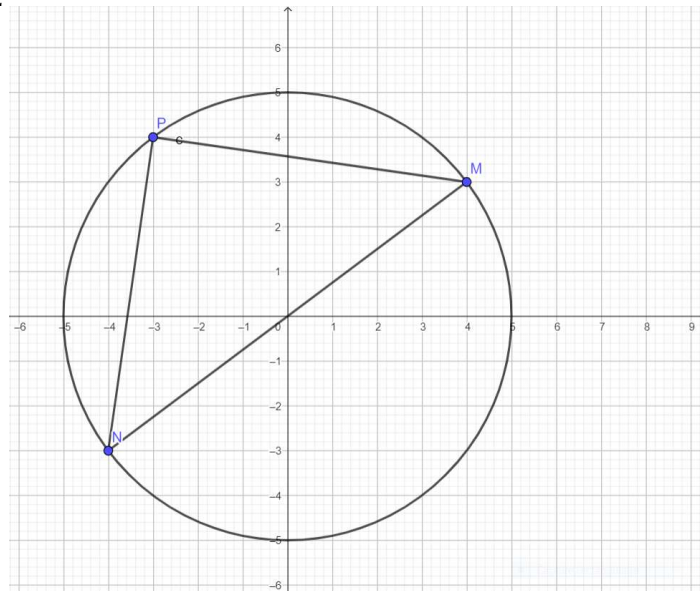
$$\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix} \text{ d'où } \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ et } \|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$$

On a $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = -7 + 7 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont orthogonaux, le triangle MNP est rectangle (et isocèle) en P, de plus :

$$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow P \text{ appartient au cercle de diamètre le segment } [MN]$$

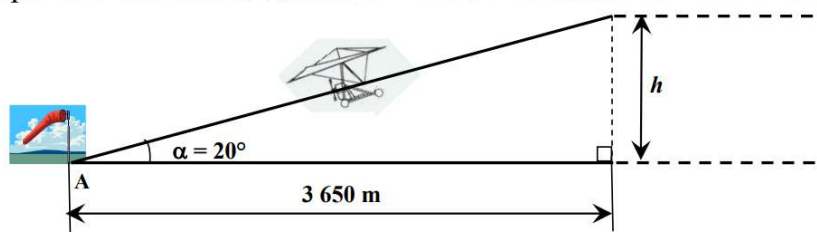
Le triangle MNP est inscrit dans un cercle de centre I, milieu de [MN] et de rayon 5.

Avec $I(\frac{x_N + x_M}{2}; \frac{y_N + y_M}{2})$ il vient : $I(0; 0)$ (I et O sont confondus).

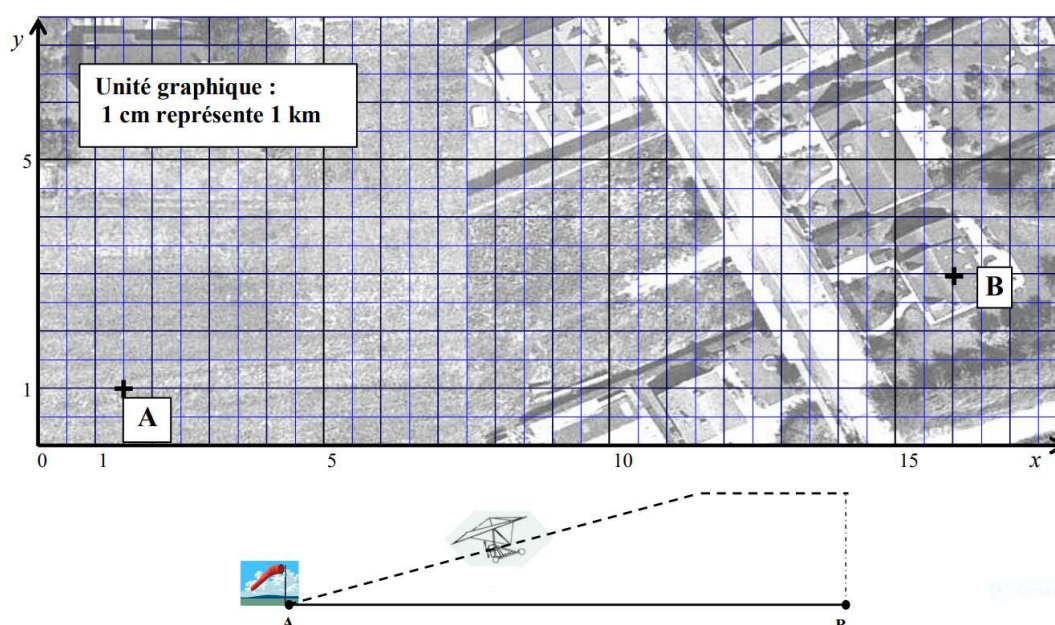


Exercice 3 - application 1 :

1) Au décollage, l'angle d'ascension d'un ULM est de 20° par rapport à l'horizontale. L'ULM monte régulièrement. À l'aide du schéma ci-dessous, **calculer**, en mètre, l'altitude h par rapport au sol que l'ULM atteint. **Justifier** les calculs. **Arrondir** la valeur à l'unité.



2) Lors d'un vol, l'ULM décolle du point A et se rend en ligne droite jusqu'à la verticale du point B(16 ; 3) qui est au sol. En utilisant le repère, **indiquer** les coordonnées du point A.



3) Calculer la distance réelle AB au sol en Km

4) Arrivé à la verticale du point B, l'ULM poursuit son vol en faisant un virage à gauche et rejoint la verticale du point C, Placer le point C sur le repère sachant que le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Tracer le vecteur $\overrightarrow{BC}$. Calculer BC.

5) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CA}$ et calculer la distance réelle au sol CA.

6) Calculer la distance réelle au sol parcourue par l'ULM lors de ce vol (en km).

Solution exo 3 :

1) Dans le triangle rectangle on a $\tan(20^\circ) = \frac{h}{3650}$ d'où $h = 3650 \times \tan(20^\circ) \approx 1328$

2) $A(1,5; 1)$

3) $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(16 - 1,5)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{214,25}$

4) Pour tracer le vecteur $\overrightarrow{BC}$ on part du point C, on « recule » de trois unités selon l'axe des abscisses et on monte de 4 unités selon l'axe des ordonnées.

5) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ (Relation de Chasles)

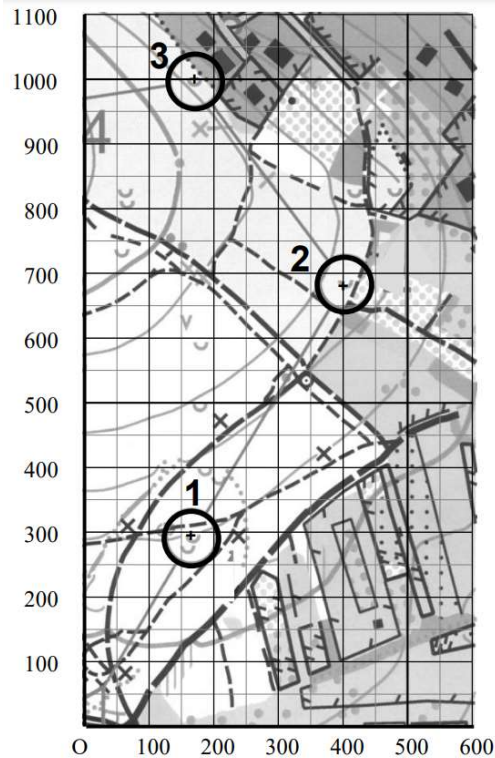
$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$ d'où $\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 3-14,5 \\ -4-2 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -11,5 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$CA = \|\vec{CA}\| = \sqrt{(-11,5)^2 + (-6)^2} = \sqrt{168,25}$$

- 6) Pour calculer la distance réelle au sol, l'ULM parcourt A, B puis B, C d'où $AB + BC = \sqrt{214,25} + \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{214,25} + \sqrt{25} = 5 + \sqrt{214,25}$ soit environ 19,67 km.

Exercice 4 - application 2 :

Le plan ci-dessous est extrait d'une carte de course d'orientation. L'échelle est de 1/10 000. Signification : 1 cm sur la carte représente 100 m sur le terrain.



poste ① : $P_1(170 ; 290)$;
 $A(440 ; 440)$;
 $B(330 ; 540)$;
 poste ② : $P_2(400 ; 680)$.

- 1) Calculer la distance réelle au sol entre le poste P_1 et le poste P_2 en mètre.
- 2) A) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{P_1A}$ et $\vec{AB}$
 B) Calculer $\|\vec{P_1A}\|$
 C) Calculer $\|\vec{P_1A}\| + \|\vec{AB}\| + \|\vec{BP_2}\|$
- 3) Le résultat du calcul de la question 2) c) est la mesure de la distance réelle P_1P_2 parcourue par un orienteur débutant. **Calculer** la différence entre cette distance réelle parcourue par cet orienteur et la distance P_1P_2 à vol d'oiseau. **Exprimer** cette différence en pourcentage par rapport à la distance à vol d'oiseau. **Arrondir** la valeur au dixième.

Solution Exo 4 :

Question 1 : $P_1P_2 = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_{P_2} - x_{P_1})^2 + (y_{P_2} - y_{P_1})^2}$ on fait l'application numérique, il vient :

$$\sqrt{(400 - 170)^2 + (680 - 290)^2} = 50\sqrt{82} \approx 452,77 \text{ m}$$

Question 2 : a) $\overrightarrow{P_1A} \begin{pmatrix} x_A - x_{P_1} \\ y_A - y_{P_1} \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{P_1A} \begin{pmatrix} 270 \\ 150 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -110 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \|\overrightarrow{P_1A}\| = \sqrt{270^2 + 150^2} = 30\sqrt{106} \approx 308,87 \text{ m}$$

$$\text{c) } \|\overrightarrow{BP_2}\| = \sqrt{(400 - 330)^2 + (680 - 540)^2} = 70\sqrt{5} \approx 156,52 \text{ m}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-110)^2 + 100^2} = 10\sqrt{221} \approx 148,66 \text{ m}$$

$$\text{d'où } \|\overrightarrow{P_1A}\| + \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BP_2}\| = 30\sqrt{106} + 10\sqrt{221} + 70\sqrt{5} \approx 604,05 \text{ m}$$

Question 3 : On avait $\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \|\overrightarrow{P_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP_2}\| = 50\sqrt{82} \approx 452,77 \text{ m}$

(Relation de Chasles) $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP_2}$

$$\|\overrightarrow{P_1A}\| + \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BP_2}\| - \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = 30\sqrt{106} + 10\sqrt{221} + 70\sqrt{5} - 50\sqrt{82} \approx 151,28 \text{ m}$$

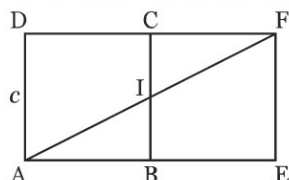
En pourcentage par rapport à la distance à vol d'oiseau : $\frac{151,28}{452,77} = 33,4 \%$

En parcourant P_1, A, B puis P_2 il parcourra 33,4 % de plus de distance que s'il avait parcouru P_1P_2 .

Produit scalaire dans le plan :

Exercice 5 : Produit scalaire

Les côtés des carrés accolés ABCD et BEFC ont pour longueur non nulle c . I est l'intersection des segments [AF] et [BC]. Utiliser trois différentes expressions du produit scalaire pour calculer $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AI}$.



Méthode :

1. On utilise la formule trigonométrique : on doit donc calculer les longueurs et la mesure de l'angle qui nous intéressent.
2. On utilise la formule du projeté orthogonal : B est le projeté orthogonal de I sur la droite (AE).
3. On utilise la formule avec les coordonnées : pour cela, on choisit un repère orthonormé adapté à la situation.

Solution exercice 5:

1. Avec le théorème de Pythagore dans le triangle AEF on a : $AF = \sqrt{AE^2 + FE^2} = \sqrt{(2c)^2 + c^2} = \sqrt{4c^2 + c^2} = \sqrt{5c^2} = c\sqrt{5}$ et avec les formules de trigonométrie : $\cos(\widehat{EAF}) = \frac{AE}{AF} = \frac{2c}{c\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

$$\text{Donc } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AI} = AE \times AI \times \cos(\widehat{EAI}) = 2c \times \frac{c\sqrt{5}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 2c^2.$$

2. (IB) $\perp$ (AE) donc B est le projeté orthogonal de I sur (AE) donc : $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2c \times c = 2c^2$.

3. Dans le repère orthonormé $\left(A; \frac{1}{c}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{c}\overrightarrow{AD}\right)$, on a $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 2c \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AI} = 2c \times c + 0 \times \frac{c}{2} = 2c^2$.

Exercice 6 : Utiliser la formule adaptée :

Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le triangle ABC.

1. $AB = 5$, $AC = 4\sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$.
2. $AB = 5$ et $AH = 4$ où H est le pied de la hauteur issue de C. De plus, $H \in [AB]$.
3. $A(-1; -1)$, $B(4; -1)$ et $C(3; 3)$ dans un repère orthonormé.

Méthode :

On choisit la formule du produit scalaire la plus adaptée en analysant la configuration :

1. trigonométrie lorsque les angles de la configuration sont connus ;
2. le projeté orthogonal dans une configuration comprenant des angles droits ;
3. dans un repère lorsque des coordonnées sont connues ou calculables.

Solution exercice 6 :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5 \times 4\sqrt{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 20\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20$.
2. H est le pied de la hauteur issue de C donc H est le projeté orthogonal de C sur (AB), donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 5 \times 4 = 20$.
3. $x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = 4 - (-1) = 5$ et $y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = -1 - (-1) = 0$.
On fait de même pour AC. Ainsi, on a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 4 + 0 \times 4 = 20$.

Exercice 7 :

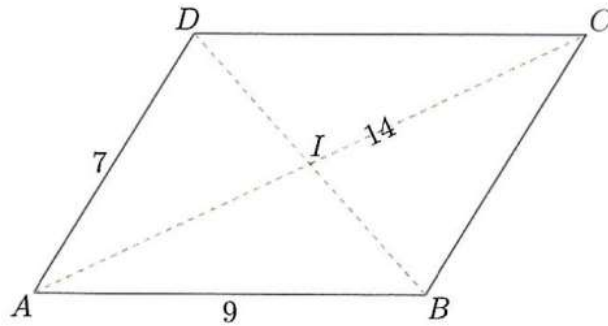
On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On rappelle les identités de « polarisation » suivantes (qui permettent de calculer des produits scalaires juste à partir de normes) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right) \\ \frac{1}{4} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right) \end{cases}$$

On considère un parallélogramme ABCD avec $AB = 9$, $AD = 7$ et $AC = 14$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ avec la première identité de polarisation. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
2. Exploiter le même produit scalaire que précédemment $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ mais avec la deuxième identité de polarisation pour en déduire la longueur DB.
3. On note I le centre du parallélogramme. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$ avec la troisième identité de polarisation. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC})$.



Solution exercice 7 :

1. Via la première identité de polarisation :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{2} (\|\vec{AB} + \vec{AD}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AD}\|^2)$$

$ABCD$ étant un parallélogramme, on a $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$
d'où :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{2} (\|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AD}\|^2) = \frac{1}{2} (14^2 - 9^2 - 7^2) = 33$$

Par ailleurs, avec la formule du produit scalaire avec le cosinus :

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AD} &= AB \times AD \times \cos(\vec{AB}, \vec{AD}) = 9 \times 7 \times \cos(\vec{AB}, \vec{AD}) \\ &= 63 \cos(\vec{AB}, \vec{AD}) \end{aligned}$$

Ainsi : $63 \cos(\vec{AB}, \vec{AD}) = 33$

$$\cos(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{11}{21}$$

D'où : $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \arccos\left(\frac{11}{21}\right) \approx 58,4^\circ$

2. Via la deuxième identité de polarisation :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{2} (\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AD}\|^2 - \|\vec{AB} - \vec{AD}\|^2)$$

Or, via la relation de Chasles $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{DA} = \vec{DA} + \vec{AB} = \vec{DB}$
d'où :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{2} (9^2 + 7^2 - DB^2)$$

Et comme on a vu à la question précédente que $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 33$:

$$33 = \frac{1}{2} (81 + 49 - DB^2)$$

$$66 = 130 - DB^2$$

$$DB^2 = 64$$

Et comme DB est une longueur (donc grandeur positive) : $DB = 8$

Nous avons calculé la longueur de la seconde diagonale du parallélogramme.

3. Via la troisième identité de polarisation :

$$\vec{IB} \cdot \vec{IC} = \frac{1}{4} (\|\vec{IB} + \vec{IC}\|^2 - \|\vec{IB} - \vec{IC}\|^2)$$

Or, puisque I est le milieu du segment $[DB]$, on a :

$$\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{DI} + \vec{IC} = \vec{DC}$$

Par ailleurs $\vec{IB} - \vec{IC} = \vec{IB} + \vec{CI} = \vec{CB}$, d'où :

$$\vec{IB} \cdot \vec{IC} = \frac{1}{4} (DC^2 - CB^2) = \frac{81 - 49}{4} = 8$$

Mais, d'autre part, avec la formule du produit scalaire avec le cosinus :

$$\vec{IB} \cdot \vec{IC} = IB \times IC \times \cos(\vec{IB}, \vec{IC}) = 7 \times 4 \times \cos(\vec{IB}, \vec{IC}) = 28 \cos(\vec{IB}, \vec{IC})$$

Et finalement : $28 \cos(\vec{IB}, \vec{IC}) = 8$

$$\cos(\vec{IB}, \vec{IC}) = \frac{2}{7}$$

D'où : $(\vec{IB}, \vec{IC}) = \arccos\left(\frac{2}{7}\right) \approx 73,4^\circ$

Partie 2 - Vecteurs dans l'espace :

Exercice 8 :

1) On donne les points $A(5 ; 2 ; 1)$, $B(7 ; 3 ; 1)$, $C(-1 ; 4 ; 5)$ et $D(-3 ; 3 ; 5)$. Démontrer que A, B, C et D sont coplanaires.

2) Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

3) Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Solution Exercice 8 :

Question 1 : Les points A, B, C et D sont coplanaires s'ils appartiennent à un même plan.

On sait que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe deux réels x et y tels que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$

On va chercher par exemple s'il existe x et y tels que $\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$

$$\vec{AD} \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 = 2x - 6y \\ 1 = x + 2y \\ 4 = 4y \end{cases} \text{ il vient } y = 1 \text{ et } x = -1$$

On a donc $\vec{AD} = -\vec{AB} + \vec{AC}$ donc les points A, B, C et D sont coplanaires.

Question 2 : on donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

on cherche s'il existe x et y tels que :

$\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$ il vient $\begin{cases} 3 = x + y \\ 6 = 2x + 2y \\ 0 = 2x - y \end{cases}$ $\begin{cases} 3 = x + 2 \\ 6 = 3y \\ 2x = y \end{cases}$ d'où $x = 1$ et $y = 2$. On a $\vec{u} = \vec{v} + 2\vec{w}$ donc les vecteurs sont coplanaires.

Question 3 : on donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

on cherche s'il existe x et y tels que :

$\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$ il vient $\begin{cases} 4 = 6x + 2y \\ -2 = -x \\ 0 = 2x - y \end{cases}$ Ce système n'a pas de solution les vecteurs ne sont pas coplanaires.

Exercice 9 :

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ (toutes les arêtes ont même longueur $a = 1$, toutes les faces sont des triangles équilatéraux). On note P, Q, R, S, U et V les milieux respectifs des arêtes $[AB], [BC], [CD], [DA], [AC]$ et $[BD]$. On note H le centre de gravité de la face BCD et G celui du tétraèdre $ABCD$.

1. Démontrer que des arêtes opposées du tétraèdre sont orthogonales.
2. La droite (AH) est-elle perpendiculaire au plan (BCD) ? Calculer AH .
3. Démontrer que $\vec{AG} = \frac{3}{4}\vec{AH}$ et calculer AG .
4. Déterminer une mesure de l'angle au centre du tétraèdre $\alpha = (\vec{GA}, \vec{GB})$.

Solution exercice 9 :

1. Raisonnons avec les arêtes $[AC]$ et $[BD]$ et calculons :

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (\vec{AV} + \vec{VC}) \cdot \vec{BD} = \vec{AV} \cdot \vec{BD} + \vec{VC} \cdot \vec{BD}$$

Or, $[AV]$ est la hauteur issue de A dans le triangle équilatéral ABD donc $\vec{AV} \cdot \vec{BD} = 0$. De même $[CV]$ est la hauteur issue de C dans BCD donc $\vec{VC} \cdot \vec{BD} = 0$.

On a donc $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$, ce qui prouve l'orthogonalité des arêtes opposées $[AC]$ et $[BD]$.

Même raisonnement pour les autres paires d'arêtes opposées.

2. Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan. Or :

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QH}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{QH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

De même, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ donc (AH) est perpendiculaire au plan (BCD) .

Ainsi, via Pythagore : $AH^2 = AC^2 - CH^2$

Or, le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux tiers de la médiane :

$$AH^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}CV\right)^2$$

Or, $CV = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (toujours Pythagore), $AH^2 = 1 - \frac{4}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$ d'où $AH = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

3. Par définition du centre de gravité, on a :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

Introduisons le point H via la relation de Chasles dans les 3 derniers vecteurs :

$$\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = \vec{0}$$

H étant le centre de gravité du triangle BCD , on a $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = \vec{0}$:

$$\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GH} = \vec{0} \quad \text{c-à-d} \quad 4\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AH} = \vec{0} \quad \text{c-à-d} \quad \overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AH}$$

Le centre de gravité d'un tétraèdre est situé aux trois quarts des médianes (en partant d'un sommet) et $AG = \frac{3}{4}AH = \frac{\sqrt{6}}{4}$; de même pour BG, CG et DG .

4. Développons le produit scalaire suivant (qui est nul par définition de G) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) &= 0 \\ GA^2 + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GD} &= 0 \end{aligned}$$

Les 3 derniers produits scalaires sont égaux, par symétrie. En effet, puisque toute hauteur du tétraèdre est perpendiculaire à la face opposée, on a :

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \quad \text{c-à-d} \quad \overrightarrow{GA} \cdot (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GB}) = 0 \quad \text{c-à-d} \quad \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC}$$

De même $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GD}$ d'où :

$$GA^2 + 3\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = 0 \quad \text{c-à-d} \quad GA^2 + 3GA \cdot GB \cos(\alpha) = 0$$

Et comme $GA = GB$, il vient : $\cos(\alpha) = -\frac{1}{3}$

$$\alpha \approx 109^\circ$$

Exercice 10 : Sujet BAC :

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 2; 4)$ et $C(-1; 1; 1)$.

1) a) Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

c) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.

2) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .

3) Soient $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.

a) Démontrer que le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.

b) Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

c) Soit la droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que $\mathcal{D}$ est la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

4) Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

Solution Exercice 10 :

1) a) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(2, 0, 4)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(0, -1, 1)$.

Si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, on a en particulier $-1 = 0k$ (en analysant la deuxième coordonnée) ce qui est impossible. Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore les points A , B et C ne sont pas alignés.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 0 + 0 \times (-1) + 4 \times 1 = 4$.

c) $AB = \sqrt{2^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Par suite,

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{4}{2\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

La calculatrice fournit alors $\widehat{BAC} = 51^\circ$ arrondi au degré.

2) a) Les points A , B et C ne sont pas alignés et donc les points A , B et C définissent un unique plan, le plan (ABC) .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 2 \times 2 + 0 \times (-1) + 4 \times (-1) = 4 - 4 = 0,$$

et

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0 \times 2 + (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) = 1 - 1 = 0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) . Donc, le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

b) Le plan (ABC) est le plan passant par $A(-1, 2, 0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2, -1, -1)$. Une équation cartésienne du plan (ABC) est $2(x + 1) - (y - 2) - (z - 0) = 0$ ou encore $2x - y - z + 4 = 0$.

3) a) Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}'_2$ d'équation $x - 2z + 6 = 0$ est le vecteur $\vec{n}'_2$ de coordonnées $(1, 0, -2)$. Puisque $\mathcal{P}_2$ est parallèle à $\mathcal{P}'_2$, $\vec{n}'_2$ est encore un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_2$. Ainsi, $\mathcal{P}_2$ est le plan passant par $O(0, 0, 0)$ et de vecteur normal $\vec{n}'_2(1, 0, -2)$. Une équation cartésienne de $\mathcal{P}_2$ est donc $x - 2z = 0$ ou encore $x = 2z$.

b) Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ est le vecteur $\vec{n}_1$ de coordonnées $(3, 1, -2)$. Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires et donc les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles. Par suite, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants en une droite.

c) Puisque l'on sait que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants en une droite, il suffit de vérifier que tout point de $\mathcal{D}$ est un point de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

Soit $M(2t, -4t - 3, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite $\mathcal{D}$.

$$3x_M + y_M - 2z_M + 3 = 3(2t) + (-4t - 3) - 2(t) + 3 = 6t - 4t - 3 - 2t + 3 = 0$$

et donc M appartient à $\mathcal{P}_1$. De même,

$$x_M - 2z_M = (2t) - 2(t) = 0$$

et donc M appartient à $\mathcal{P}_2$. Ainsi, tout point de $\mathcal{D}$ appartient à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ et donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est la droite $\mathcal{D}$.

4) Soit $M(2t, -4t - 3, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite $\mathcal{D}$.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 2(2t) - (-4t - 3) - t + 4 = 0 \Leftrightarrow 7t + 7 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Quand $t = -1$, on obtient le point I de coordonnées $(-2, 1, -1)$. Le point I est le point d'intersection des plans (ABC) , $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Exercice 11 : Sujet BAC :

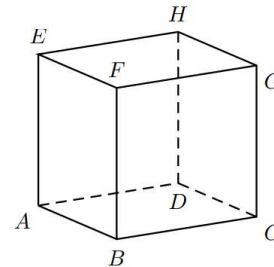
On considère un cube $ABCDEFGH$.

1) a) Simplifier le vecteur $\vec{AC} + \vec{AE}$.

b) En déduire que $\vec{AG} \cdot \vec{BD} = 0$.

c) On admet que $\vec{AG} \cdot \vec{BE} = 0$.

Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE) .



2) L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

a) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE) .

c) On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Calculer le volume de la pyramide $BDEG$.

Solution exercice 11 :

1) a) $\vec{AC} + \vec{AE} = \vec{AC} + \vec{CG} = \vec{AG}$.

b) $\vec{AG} \cdot \vec{BD} = (\vec{AC} + \vec{AE}) \cdot \vec{BD} = \vec{AC} \cdot \vec{BD} + \vec{AE} \cdot \vec{BD}$.

$[AC]$ et $[BD]$ sont les diagonales du carré $ABCD$ et donc $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$.

D'autre part, la droite (AE) est perpendiculaire aux droites (AB) et (AD) qui sont deux droites sécantes du plan (ABD) . On en déduit que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABD) . Mais alors, la droite (AE) est orthogonale à toute droite du plan (ABD) et en particulier, la droite (AE) est orthogonale à la droite (BD) . Ceci fournit $\vec{AE} \cdot \vec{BD} = 0$.

Finalement, $\vec{AG} \cdot \vec{BD} = 0 + 0 = 0$.

c) La droite (AG) est orthogonale aux droites (BD) et (BE) qui sont deux droites sécantes du plan (BDE) . Donc, la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE) .

2) a) Dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, le point A a pour coordonnées $(0, 0, 0)$ et le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ (car $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG} = 1\vec{AB} + 1\vec{AD} + 1\vec{AE}$). Donc, le vecteur $\vec{AG}$ a pour coordonnées $(1, 1, 1)$.

Le plan (BDE) est le plan passant par $B(1, 0, 0)$ et de vecteur normal $\vec{AG}(1, 1, 1)$. Une équation cartésienne de ce plan est $1 \times (x - 1) + 1 \times (y - 0) + 1 \times (z - 0) = 0$ ou encore $x + y + z - 1 = 0$.

b) La droite (AG) est la droite passant par $A(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{AG}(1, 1, 1)$. Une représentation paramétrique de la droite (AG) est $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Soit donc $M(t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AG) .

$$M \in (BDE) \Leftrightarrow t + t + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Quand $t = \frac{1}{3}$, on obtient le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

c) GK est donc la hauteur de la pyramide $BDGE$ associée à la base BDE . Ainsi, le volume de la pyramide $V = \frac{1}{3} \times GK \times \text{aire de } BDE$.

$$GK = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{3 \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \text{ Donc,}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 12 - Sujet BAC :

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, considère les points : $A(2;0;3)$, $B(0;2;1)$, $C(-1;-1;2)$ et $D(3;-3;-1)$.

1. Calcul d'un angle

- Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ et en déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.
- Calculer les longueurs AB et AC .
- À l'aide du produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.

2. Calcul d'une aire

- Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB) .
- Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .
- En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB) c'est à dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathcal{P}$.
- Calculer l'aire du triangle ABC .

3. Calcul d'un volume

- Soit le point $F(1;-1;3)$. Montrer que les points A , B , C et F sont coplanaires.
- Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC) .
- Sachant que le volume d'un tétraèdre est le tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

CORRECTION

$$1.a. \vec{AB} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 2-0 \\ 1-3 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -1-2 \\ -1-0 \\ 2-3 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A , B et C ne sont pas alignés.

$$1.b. AB^2 = (-2)^2 + 2^2 + (-2)^2 = 4 + 4 + 4 = 12 \quad AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$AC^2 = (-3)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 = 9 + 1 + 1 = 11 \quad AC = \sqrt{11}$$

$$1.c. \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -2 \times (-3) + 2 \times (-1) + (-2) \times (-1) = 6 - 2 + 2 = 6$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\text{donc } 6 = 2\sqrt{3} \times \sqrt{11} \times \cos(\widehat{BAC}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{6}{2\sqrt{3} \times \sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{33}}.$$

En utilisant la calculatrice : $\widehat{BAC} = 58,5^\circ$

$$2.a. M(x; y; z) \quad C(-1; -1; 2) \quad \vec{CM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$M \text{ appartient à } \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CM} = 0 \Leftrightarrow -2 \times (x+1) + 2 \times (y+1) - 2 \times (z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2y - 2z - 2 + 2 + 4 = 0 \Leftrightarrow -2x + 2y - 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow -x + y - z + 2 = 0$$

$$\mathcal{P}: -x + y - z + 2 = 0$$

$$2.b. (AB): \begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = 2t + 0 \\ z = -2t + 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2.c. On résout le système

$$\begin{cases} -x+y-z+2=0 \\ x=-2t+2 \\ y=2t \\ z=-2t+3 \end{cases}$$

On obtient : $-(-2t+2)+(2t)-(-2t+3)+2=0 \Leftrightarrow 2t+2t+2t-2-3+2=0 \Leftrightarrow 6t=3 \Leftrightarrow$

$$t=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0,5$$

$$x=-2 \times 0,5+2=1 \quad y=2 \times 0,5=1 \quad z=-2 \times 0,5+3=2$$

$$E(1;1;2)$$

2.d. CE est la hauteur du triangle ABC issue de C.

$$\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+1 \\ 2-2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad CE^2=2^2+2^2+0^2=4+4=8 \quad CE=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

L'aire du triangle ABC est égale à : $\frac{1}{2} \times AB \times CE = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$ (en unité d'aire).

3.a. Les points A, B et C ne sont pas alignés donc les points A, B, C et F sont coplanaires si et seulement si le point F appartient au plan (ABC) c'est à dire s'ils existent deux nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{AF}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$.

$$A(2;0;3) \quad F(1;-1;3) \quad \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AF}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1=-2a-3b(1) \\ -1=2a-b(2) \\ 0=-2a-b(3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1=-2a-3b(1) \\ -1=2a-b(2) \end{cases} \quad \text{on obtient : } -2=-4b \Leftrightarrow b=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

$$\text{et } -1=2a-\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}=2a \Leftrightarrow a=-\frac{1}{4}$$

$$\text{On vérifie pour l'équation (3) : } -2a-b=-2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

donc $\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et les points A, B, C et F sont coplanaires.

$$3.b. \quad \overrightarrow{FD} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AB}=2 \times (-2)+(-2) \times 2+(-4) \times (-2)=-4-4+8=0$$

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AC}=2 \times (-3)+(-2) \times (-1)+(-4) \times (-1)=-6+2+4=0$$

$\overrightarrow{FD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc $\overrightarrow{FD}$ est un vecteur normal plan (ABC) et FD est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.

$$FD^2=2^2+(-2)^2+(-4)^2=4+4+16=24 \quad FD=\sqrt{24}=2\sqrt{6}.$$

Le volume du tétraèdre ABCD est égal à :

$$\frac{1}{3} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{6} = \frac{4 \times 6}{3} = 8 \text{ (en unité de volume).}$$

Partie 3 : Analyse vectorielle :

Exercice 13 :

On définit $f(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$, calculer $\overrightarrow{\text{grad}} f(M)$.

On choisit un point M de la sphère de centre $\Omega = (a, b, c)$, représenter graphiquement le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f(M)$.

Solution exercice 13 :

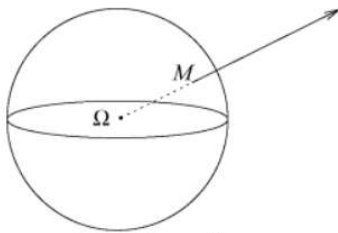
On utilise la définition du gradient : $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - a) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y - b) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial z} = 2(z - c) \quad (\text{rappel : } (u^n)' = nu'u^{n-1})$$

$$\text{Il vient } \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = 2(x - a) \vec{i} + 2(y - b) \vec{j} + 2(z - c) \vec{k} \text{ ou } \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) \begin{pmatrix} 2(x - a) \\ 2(y - b) \\ 2(z - c) \end{pmatrix}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{\Omega M} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{pmatrix} \text{ d'où } \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = 2\overrightarrow{\Omega M}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M) = 2(x - a, y - b, z - c) = 2\overrightarrow{\Omega M}$$



Exercice 14 :

Donner l'équation d'un plan sous la forme $f(x, y, z) = c$ et calculer $\overrightarrow{\text{grad}} f$.

Solution exercice 14 : Sachant que l'équation cartésienne d'un plan est de la forme :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = c \text{ avec } \alpha, \beta \text{ et } \gamma \text{ des nombres réels}$$

La réponse est $\alpha x + \beta y + \gamma z = c$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \text{ d'où } \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k} = \vec{n} \text{ avec } \vec{n} \text{ vecteur normal au plan précédemment défini.}$$

Exercice 15 :

$$\text{Soit } \vec{V} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ montrer que } \text{rot } \vec{V} = 2\omega \vec{k}$$

Solution exercice 15 :

On applique la définition du rotationnel :

$$\overrightarrow{\text{Rot}}(F)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y}(a) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(a) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(a) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

Il vient $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega + \omega \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = 2\omega \vec{k}$

Exercice 16 :

On définit un champ de vecteurs de composante $\vec{V} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$ avec α une constante. Calculer $\text{div } \vec{V}$

Solution exercice 16 :

On applique la définition de la divergence : $\text{div} \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$, il vient : $\text{div } \vec{V} = 3\alpha$

Exercice 17 :

Si α est une constante réelle, et si f et g sont deux fonctions qui admettent des dérivées partielles secondes, démontrer les propriétés suivantes :

$$\Delta (f + g) = \Delta f + \Delta g$$

$$\Delta (\alpha f) = \alpha \Delta f$$

$$\text{div } \overrightarrow{\text{grad}} f = \Delta f$$

Solution exercice 17 :

On utilise : $\frac{\partial(f+g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial \alpha f}{\partial x} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}$

La définition du Laplacien : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ et $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$

D'où $\Delta f + \Delta g = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$ d'une part et

$\Delta(f + g) = \frac{\partial^2(f+g)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(f+g)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(f+g)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$ d'autre part donc on conclut $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$

$$\Delta(\alpha f) = \frac{\partial^2(\alpha f)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\alpha f)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\alpha f)}{\partial z^2} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) = \alpha \Delta f$$

On cherche $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f))$

Définition de divergence : $\text{div} \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$

Définition gradient : $\overrightarrow{\text{grad}} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial z})}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f \text{ par définition du Laplacien.}$$

Exercice 18 :

Si α est une constante réelle, et si f et g sont deux fonctions différentiables, démontrer les propriétés suivantes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f + g) = \overrightarrow{\text{grad}} f + \overrightarrow{\text{grad}} g$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\alpha f) = \alpha \overrightarrow{\text{grad}} f$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\text{grad}} g + g \overrightarrow{\text{grad}} f$$

Solution exercice 18 :

$$\text{On a : } \frac{\partial(f+g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \qquad \frac{\partial(\alpha f)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(fg)}{\partial x} = f \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\text{Définition gradient : } \overrightarrow{\text{grad}} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f + g)(x) = \frac{\partial(f+g)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(f+g)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(f+g)}{\partial z} \vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f + g)(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z}\right) \vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f + g)(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} + \frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k}$$

$$\text{Il vient : } \overrightarrow{\text{grad}}(f + g)(x) = \overrightarrow{\text{grad}} f(x) + \overrightarrow{\text{grad}} g(x)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\alpha f)(x) = \frac{\partial \alpha f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \alpha f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \alpha f}{\partial z} \vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\alpha f)(x) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \alpha \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \alpha \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\alpha f)(x) = \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\alpha f)(x) = \alpha \overrightarrow{\text{grad}} f(x)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg)(x) = \frac{\partial(fg)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(fg)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(fg)}{\partial z} \vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg)(x) = \left(f \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x}\right) \vec{i} + \left(f \frac{\partial g}{\partial y} + g \frac{\partial f}{\partial y}\right) \vec{j} + \left(f \frac{\partial g}{\partial z} + g \frac{\partial f}{\partial z}\right) \vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg)(x) = f \left(\frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k} \right) + g \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg)(x) = f \overrightarrow{\text{grad}} g(x) + g \overrightarrow{\text{grad}} f(x)$$

Exercice 19 :

Pour $(x; y) \neq (0; 0)$, on définit $f(x; y) = (\sqrt{x^2 + y^2})^n$ et on note $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Monter que $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) = nr^{n-2} \overrightarrow{OM}$

Solution exercice 19 : On peut écrire : $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}$

Rappel : $(u^k)' = ku'u^{k-1}$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{n}{2} 2x(x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}-1} = nx(x^2 + y^2)^{\frac{n-2}{2}} = nx(\sqrt{x^2 + y^2})^{n-2} = nxr^{n-2}$

Il vient : $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) = nxr^{n-2}\vec{i} + nyr^{n-2}\vec{j}$ et $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ d'où

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) = nr^{n-2}\overrightarrow{OM}$$

Exercice 20 : Gradient en coordonnées polaires

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si r et θ sont les coordonnées polaires d'un point M de $\mathbf{R}^2$, différent de O , on définit les vecteurs

$$\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}, \quad \vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

Si f est une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, différentiable en M , on définit la fonction g par

$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Montrer que le gradient s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)\vec{u} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)\vec{v}$$

Pour ce faire on pourra utiliser les règles de dérivation des fonctions composées pour calculer les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de f , puis en déduire les dérivées partielles de f en fonction de celles de g et enfin remplacer dans l'expression du gradient.

Solution exercice 20 :

On a :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

On en déduit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$$

On remplace dans l'expression :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$$

Il vient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \left(\cos \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \right) \vec{i} + \left(\sin \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \right) \vec{j}$$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \vec{u} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \vec{v}$$

Exercice 21 :

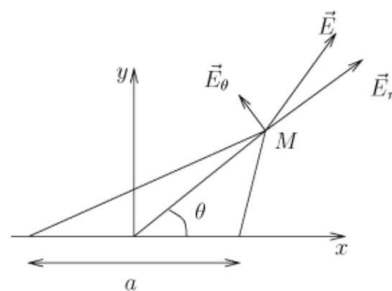
Le potentiel V d'un dipôle électrique est donné à grande distance par l'expression :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \theta}{r^2}$$

Le champ électrique est donné par :

$$\vec{E}(M) = - \overrightarrow{\text{grad}} V(M)$$

Déterminer les composantes $\vec{E}_r, \vec{E}_\theta$. Voir figure.



dipole

Solution exercice 21 :

Ici on connaît le potentiel en fonction de r et θ , on peut appeler cette fonction $g(r, \theta)$, calculer

$$\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\cos\theta}{r^3}, \frac{\partial g}{\partial \theta} = -\frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r^2}$$

En déduire

$$\vec{E}_r = -\frac{\partial g}{\partial r} \vec{u}, \vec{E}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \vec{v}$$

On obtient :

$$\vec{E}_r = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\cos\theta}{r^3} \vec{u}, \vec{E}_\theta = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r^3} \vec{v}$$

Exercice 22 : gradient en coordonnées cylindriques

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{r}, \vec{j}, \vec{k})$

Si r , θ et z sont les coordonnées cylindriques d'un point M de $\mathbf{R}^3$ n'appartenant pas à Oz , on définit les vecteurs

$$\vec{u} = \cos\theta \vec{r} + \sin\theta \vec{j}, \vec{v} = -\sin\theta \vec{r} + \cos\theta \vec{j}$$

Si f est une fonction de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$, différentiable en M , on définit la fonction g par

$$g(r, \theta, z) = f(r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

Représenter sur une figure le point M et les vecteurs $\vec{r}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{u}, \vec{v}$.

Montrer l'expression du gradient suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) = \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta, z) \vec{u} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta, z) \vec{v} + \frac{\partial g}{\partial z}(r, \theta, z) \vec{k}$$

Solution exercice 22 :

Exprimer

$$\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial g}{\partial z}$$

à l'aide de

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

En déduire

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Remplacer dans l'expression du gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}.$$

On a :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta, z) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta, z) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x) = \left(\cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \vec{i} + \left(\sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x) = \frac{\partial g}{\partial r} \vec{u} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \vec{v} + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{v} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

Exercice 23 :

Si f est une fonction différentiable, si α est une constante, si $\vec{V}, \vec{V}_1, \vec{V}_2$ sont des champs de vecteurs différentiables, démontrer les relations suivantes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}_1) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}_2),$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\alpha \vec{V}) = \alpha \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}),$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{V}) = f \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{V}$$

Solution exercice 23 :

Les composantes de $\vec{V}_1 + \vec{V}_2, \alpha \vec{V}, f \vec{V}$ sont

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (P_1(x, y, z) + P_2(x, y, z), Q_1(x, y, z) + Q_2(x, y, z), R_1(x, y, z) + R_2(x, y, z))$$

$$\alpha \vec{V} = (\alpha P(x, y, z), \alpha Q(x, y, z), \alpha R(x, y, z))$$

$$f \vec{V} = (f(x, y, z)P(x, y, z), f(x, y, z)Q(x, y, z), f(x, y, z)R(x, y, z))$$

Appliquer la définition de rotationnel.

Utiliser les règles de dérivation de la somme, du produit, attention α est une constante alors que f dépend de x, y, z

Calculons la première composante de $\vec{V}' = \overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{V})$:

$$P' = \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y, z)R(x, y, z)) - \frac{\partial}{\partial z}(f(x, y, z)Q(x, y, z)) \quad (1)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)R(x, y, z) + f(x, y, z)\frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)Q(x, y, z) - f(x, y, z)\frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) \quad (2)$$

$$= f(x, y, z)\left(\frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z)\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)R(x, y, z) - \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)Q(x, y, z) \quad (3)$$

On reconnaît la première composante de $f \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{V}$

Exercice 24 :

Montrer que si f et g sont 2 fonctions différentiables qui vérifient

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \overrightarrow{\text{grad}} g,$$

alors $f - g = c$ où c est une constante.

Solution exercice 24 :

Ecrire successivement l'égalité des composantes de $\overrightarrow{\text{grad}} f$ et $\overrightarrow{\text{grad}} g$

Que peut-on conclure sur f et g si

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}?$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) \iff \frac{\partial(f - g)}{\partial x} = 0$$

Donc $f - g$ ne dépend pas de x .

On continue avec les variables y, z .

Exercice 25 :

Montrer que le champ de vecteur $\vec{V} = (y, x + z, y + 2z)$ dérive d'un potentiel, calculer ce potentiel.

Réponse : $f(x, y, z) = xy + zy + z^2 + c$.

Solution exercice 25 :

Calculer $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$, en déduire l'existence d'un potentiel f . Calculer f .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y.$$

En déduire une expression de f . Préciser l'expression précédente puis traduire que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x + z.$$

Continuer avec

$$\frac{\partial f}{\partial z}$$

Inspirez vous de l'exemple traité dans le cours.

La solution est :

$$f(x, y, z) = xy + zy + z^2 + c$$

Exercice 26 :

Si f est une fonction différentiable, si α est une constante, si $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ sont des champs de vecteurs différentiables, montrer les relations suivantes :

$$\text{div} (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \text{div} (\vec{V}_1) + \text{div} (\vec{V}_2),$$

$$\text{div} (\alpha \vec{V}) = \alpha \text{div} (\vec{V}),$$

$$\text{div} (f \vec{V}) = f \text{div} (\vec{V}) + \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{V}$$

$$\text{div} (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_2 \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}_1 - \vec{V}_1 \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}_2$$

Solution exercice 26 :

Ecrire les composantes de

$$\vec{V}_1 + V_2, \alpha \vec{V}, f \vec{V}, \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2.$$

Appliquer la définition de divergence.

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (P_1(x, y, z) + P_2(x, y, z), Q_1(x, y, z) + Q_2(x, y, z), R_1(x, y, z) + R_2(x, y, z))$$

$$\alpha \vec{V} = (\alpha P(x, y, z), \alpha Q(x, y, z), \alpha R(x, y, z))$$

$$f \vec{V} = (f(x, y, z)P(x, y, z), f(x, y, z)Q(x, y, z), f(x, y, z)R(x, y, z))$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (Q_1 R_2 - R_1 Q_2, R_1 P_2 - P_1 R_2, P_1 Q_2 - Q_1 P_2)$$

Utiliser les règles de dérivation de la somme, du produit, attention α est une constante alors que f dépend de x, y, z

Pour démontrer l'égalité

$$\operatorname{div} (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_2 \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V}_1 - \vec{V}_1 \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V}_2$$

Calculer les termes à droite et à gauche et constater l'égalité.

Exercice 27 :

Montrer que $\operatorname{div} (f \overrightarrow{\operatorname{grad}} g - g \overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = f \Delta g - g \Delta f$

Solution exercice 27 :

Calculer $\operatorname{div} (f \overrightarrow{\operatorname{grad}} g)$

Que vaut $\operatorname{div} (f \vec{V})$, $\operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} g)$?

Utiliser ces propriétés ici.

$$\operatorname{div} (f \overrightarrow{\operatorname{grad}} g) = f \Delta g + \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} g$$

En déduire le résultat.

Exercice 28 :

Montrer que :

$$\vec{\Delta} \vec{V} = \vec{\text{grad}} (\text{div } \vec{V}) - \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{V}.$$

Solution exercice 28 :

Il suffit d'appliquer les différentes définitions et de comparer le vecteur de droite et le vecteur de gauche.

Exercice 29 :

Les équations de Maxwell dans un milieu isotrope non conducteur sans charge sont données par :

$$\begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, & \text{div } \vec{E} = 0 \\ \vec{\text{rot}} \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{div } \vec{H} = 0 \end{cases}$$

où $\vec{E}$ est le champ électrique et $\vec{H}$ est le champ magnétique.

En utilisant $\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{E})$, montrer que l'on obtient :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\mu\epsilon} \vec{\Delta} \vec{E} = \vec{0}$$

Solution exercice 29 :

On a :

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}$$

En déduire que

$$\vec{\text{rot}} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{H}$$

Utiliser les propriétés du laplacien vectoriel.

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{H} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ &= \vec{\text{grad}} \vec{\text{grad}} (\text{div } \vec{E}) - \vec{\Delta} \vec{E} = -\vec{\Delta} \vec{E} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 30 : Laplacien en coordonnées polaires

Si r, θ sont les coordonnées polaires d'un point M de $\mathbf{R}^2$ ($M \neq O$), si f est une fonction de 2 variables qui admet des dérivées secondes, on définit la fonction g par

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Exprimer les dérivées partielles premières de g à l'aide des dérivées partielles de f .

Calculer les dérivées partielles de g_1, g_2 par rapport à r et θ à l'aide des dérivées secondes de g .

Solution exercice 30 :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

En déduire

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$$

Remplacer dans l'expression du gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$$

En déduire que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = g_1(r, \theta),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = g_2(r, \theta)$$

Il suffit de résoudre le système linéaire précédent.

$$\frac{\partial g_1}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta}(r, \theta)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \theta}(r, \theta) = -\sin \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \cos \theta \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta}(r, \theta) - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial r}(r, \theta) = \sin \theta \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) - \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta}(r, \theta)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \theta}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \sin \theta \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta)$$

En déduire $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Vous savez calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

à l'aide de

$$\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

Donc vous savez calculer

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

à l'aide de

$$\frac{\partial g_1}{\partial r}, \frac{\partial g_1}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \cos \theta \frac{\partial g_1}{\partial r}(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g_1}{\partial \theta}(r, \theta)$$

Il suffit maintenant de remplacer par les expressions précédemment calculées.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

Faire un calcul similaire pour obtenir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

En déduire l'expression du laplacien en coordonnées polaires.

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}. \end{aligned}$$

Exercice 31 : Laplacien en coordonnées cylindriques

Si r, θ, z sont les coordonnées cylindriques d'un point M de $\mathbf{R}^3$ ($M \notin Oz$), si f est une fonction de 3 variables qui admet des dérivées partielles secondes, si on définit la fonction g par $g(r, \theta, z) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$, montrer alors que l'on a l'expression du laplacien :

$$\Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta, z) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta, z) + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(r, \theta, z)$$

Solution exercice 31 :

Exprimer

$$\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial g}{\partial z}$$

à l'aide de

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

Résoudre le système linéaire pour obtenir

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

à l'aide de

$$\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial g}{\partial z}$$

Si vous savez calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x},$$

vous savez calculer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

C'est la même chose que pour le laplacien en coordonnées polaires.

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Exercice 32 :

1. Dans le plan on définit la fonction suivante pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- 1) Calculer le laplacien de f en utilisant les coordonnées cartésiennes .
- 2) Calculer le laplacien de f en utilisant les coordonnées polaires

Solution exercice 32 :

- 1) Ecrire

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$$

Calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-3/2}2x = -x(x^2 + y^2)^{-3/2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-3/2}2y = -y(x^2 + y^2)^{-3/2}\end{aligned}$$

Calculer les dérivées partielles secondes.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -(x^2 + y^2)^{-3/2} + \frac{3x}{2}(x^2 + y^2)^{-5/2}(2x) = \frac{-x^2 - y^2 + 3x^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} = \frac{2x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

Calculer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en déduire

$$\Delta f.$$

$$\Delta f = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

- 2)

$$(r, \theta) = \frac{1}{r},$$

calculer

$$\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

En déduire Δf

$$\frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \frac{2}{r^3}, \Delta f = \frac{1}{r^3}$$

Exercice 33 :

Dans l'espace on définit la fonction suivante pour $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

- 1) Calculer le laplacien de f en utilisant les coordonnées cartésiennes.
- 2) Calculer le laplacien de f en utilisant les coordonnées sphériques

Solution exercice 33 :

- 1) Ecrire

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

Calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2x = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2y = -y(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2z = -z(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

Calculer les dérivées partielles secondes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + \frac{3x}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}(-2x) \\ &= \frac{-x^2 - y^2 - z^2 + 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \\ &= \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

Calculer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

en déduire

$$\Delta f.$$

$$\Delta f = 0$$

2)

$$g(r, \theta) = \frac{1}{r},$$

calculer

$$\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial g}{\partial \phi}, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}$$

En déduire Δf .

$$\frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \frac{2}{r^3}, \Delta f = 0$$

C'est beaucoup plus rapide !

$$\Delta f = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \Delta f = 0.$$

Exercice 34 :

Pour $M \neq O$ on définit $f(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$. Utiliser l'expression du laplacien en coordonnées sphériques pour montrer que $\Delta f(M) = 0$.

Solution exercice 34 :

$$g(\rho, \theta, \phi) = \frac{\sin \phi}{\rho^2},$$

calculer

$$\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial g}{\partial \phi}, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = -\frac{2 \sin \phi}{\rho^3},$$

$$\frac{\partial g}{\partial \phi} = \frac{\cos \phi}{\rho^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} = \frac{6 \sin \phi}{\rho^4}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2} = -\frac{\sin \phi}{\rho^2}$$

$$\Delta f = \frac{6 \sin \phi}{\rho^4} - \frac{4 \sin \phi}{\rho^4} - \frac{\sin \phi \cos \phi}{\cos \phi \rho^2 \rho^2} - \frac{\sin \phi}{\rho^4} = 0$$